



XIX

241

N. P. 341

BIBLIOTECA

VIRT. LIB. III

25-9-18

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armad.

XIX



Palchetto

Num. d'ordine

7. 78554

116
3
3

B. Pw
118
211

PAULLI FRISII
OPERUM
TOMUS SECUNDUS
MECHANICAM UNIVERSAM
ET MECHANICÆ APPLICATIONEM
AD AQUARUM FLUENTIAM
THEORIAM CONTINENS.

*Nunc age, quo motu genitalia materiai
Corpora res varias gignant, genitasque resolvant;
Et qua vi facere id cogantur, quæque sit ollis
Reddita mobilitas magnum per inane meandi,
Expedit: tu te diſſis præbere memento.*

Lucret. Lib. II.



MEDIOLANI.)o(MDCCLXXXIII.



APUD JOSEPH GALEATUM REGIUM TYPOGRAPHUM.

Superiorum approbatione.



JOANNI JOSEPHO WILZECK
S. R. I. COMITI
BARONI HULTSCHINI GUTTELANDI &c.
OLIM MARIE THERESIE AUG.
APUD MAGNUM HETRURIE DUCEM
ET APUD UTRIUSQUE SICILIE REGEM LEGATO
NUNC JOSEPHI II. AUG.
IN ITALIA IMPERIALI COMMISSARIO
ET IN INSUBRIA AUSTRIACA
PLENA CUM POTESTATE ADMINISTRO &c. &c.
LITTERARUM ET BONARUM ARTIUM CULTORI OPTIMO
ET FAUTORI AMPLISSIMO
PATRONO SUO
PAULLUS FRISIUS
HOC ALTERUM VOLUMEN OPERUM
D. D. D.

PRÆFATIO.



Mechanica est ea Mathematicos pars, quæ generationi agit de æquilibrio, & motu corporum, eaque in partes alias dividitur, Dynamicam quæ singillatim agit de motu, Staticam quæ de æquilibrio corporum solidorum, & de machinarum viribus, Hydrostaticam quæ de fluidorum æquilibrio, Hydraulicam quæ de machinis ad fluidorum motum spectantibus, Hydromettriam quæ de mensura aquarum fluentium, Aeromettriam quæ de mensura aeris: Hydrodynamica vero universim dicitur ea pars Mechanicæ, quæ universim agit de fluidis. Vitruvius Mechanicam Architecturæ civilis partem statuebat, partem aliam Architecturæ totius Hydraulicam: Architecturam autem amplissime acceptam vocavit scientiam pluribus disciplinis, ac variis eruditionibus ornatam, cujus judicio probantur omnia, quæ ab cæteris artibus perficiuntur opera. Recentiores Mathematicarum institutionum scriptores singillatim Architecturam civilem vocant bene ædificandi, militarem bene muniendi scientiam.

Archimedes Staticæ, Galilæus Dynamicæ scientiæ fundator cense-
 ri debet: vix enim in Mechanicæ historia merentur commemorari
 quæ in suis Mechanicis Quæstionibus ante Archimedes scripserat Ari-
 stoteles. Nam quamvis æquilibrio haberi agnovisset Philosophus acu-
 tissimus ubi potentiæ essent reciproce velocitatibus proportionales, negle-
 cta tamen principii uberrimi applicatione, de machinarum viribus non
 nisi vagas, & erroneas quasdam considerationes protulit. Archimedes
 Geometrarum veterum maximus, in duobus libris de æquiponderan-
 tibus, & de iis, quæ vehuntur in fluido, ab æquilibrio legibus exor-
 sus generalem proprietatem centri gravitatis primus omnium invenit,
 & in figuris quibusdam planis centrum idem determinavit, & æqui-
 librium corporum suspensorum haberi ostendit, ubi distantiz a pun-
 cto suspensionis essent reciproce ut pondera suspensa: planum etiam
 inclinarum, & cochleam, quæ adhuc Archimedis dicitur, machinis
 veterum adjecit, & Hieronis problemate excitatus differentiam pon-
 derum specificorum considerare cœpit, atque universim docuit quæ

Mechanica

A

fo-

2
solida corpora in fluidis posita descendere ad fundum vasis, & quæ; quaque sui parte superinnatare debeant.

Ab Archimede ad Galilæum usque ea Staticæ accessio facta est quod gravitatis centrum in solidis quibusdam corporibus Lucas Valerius determinaverit, Dynamicæ quod Guido Ubalduſ principium compositionis motuum, ac virium a Fracastorio, atque authoribus aliis vetustioribus subobscurè indicatum enucleaverit binis trianguli lateribus binas vires exprimendo tertiæ æquipollentes, quæ diagonali exprimitur, Hydrostaticæ quod Stevinus deprehenderit fluidorum pressionem in fundum vasis exercitam ex vasis figura, & amplitudine minime pendere, sed ex basi dumtaxat, & altitudine. Hoc tamen, quod paradoxum Hydrostaticum vocant, demonstravit Galilæus, & principio illo compositionis, ac resolutionis motuum ad exarandam corporum oblique projectorum theoriam, quæ Ballistica dicitur, feliciter usus est. Galilæus etiam in sermone de corporibus fluido insidentibus Staticam Archimedis theoriam ab objectis omnibus vindicavit, & casus omnes solidorum corporum in fluidis descendentium, aut superinnantium distinctè evolvit: in Dialogis autem de Mechanica, & motu locali naturæ leges experimentis, & Geometriæ subsidio investigavit, æquabilis, accelerati, & retardati motus theoriam distinctè exposuit, generalia principia tradidit, quibus abstrusiora etiam Dynamicæ problemata resolveri possent.

Post illud tempus singulares Dynamicæ accessiones censeri debent quod e Galilæi schola Castellius de theoria aquarum fluentium agere cœperit, quod Torricellius generalem motus theoriam amplificaverit, ac Barometro invento absoluti ponderis aeris mensuram, variationesque exhibuerit, quod inventa antlia Pneumatica Guerjckius, & Wolderus artificium præbuerint motuum in vacuo explorandorum, quod leges consuetus, & percussione corporum directe sibi occurrentium a Cartesio infelicitè tentatas Wallisius, Wrennus, & Hugenius tradiderint, quod Hugenius ipse virium centrifugarum, & circularis motus doctrinam proposuerit, & Horologium pendulo instructum, quod Galilæus nimis imperfectè excogitaverat, ad accuratam temporis mensuram accomodaverit. Maxima autem universæ Mechanicæ accessio facta est cum gravitatem in corpora universa fieri, & esse particu-
la-

3
larum omnium in omnes summo phaenomenorum omnium consensu
deprehendit Newtonus, inventisque tot calculi infinitesimalis subsidii
universalis, & mutuae gravitatis problematis excogitandis simul, ac
resolvendis parem se praebuit.

Theoriam Planetarum, Cometarumque, atque in primis Ter-
rae, ac Lunae exposuit Newtonus libro primo, & tertio Principiorum
Mathematicorum: libro autem secundo exposuit theoriam corporum
in spatiis resistentibus motorum. Joannes Bernoullius, quodam New-
toni lapsu emendato, de resistentiae legibus, & de libero corpo-
rum motu quamplura adjecit, cumque agere coepisset de viribus ex-
tra gravitatis centrum corpori impressis, ostendit binos projectionis, &
rotationis motus ex unica tantum vi oriri posse. Quae etiam Mathe-
maticos inter illius temporis agitata fuerunt problemata curvae bra-
chytochronae, synchronae, isochronae, elasticae, lineariae, catenariae,
&c, promovendae simul Mechanicae, & Algebrae plurimum contule-
runt, & quae ante aetatem hanc nostram Mechanicae universae ordine
promovendae plurimum contulerunt illustrium Mathematicorum ope-
ra commemorari in primis, ac laudari debent, quae Mac-Laurinus
suo de Fluxionibus Geometricis operi inseruit, Jacobi Hermanni Pho-
nonomia, & Danielis Bernoullii Hydrodynamica.

Praeticam etiam Hydrodynamicam partem excoluerunt Mariottus,
& Galli alii Mathematici, in primis illam, quae fontes salientes, ja-
ctusque aquarum respicit. In Gallia etiam, Anglia, & Germania plu-
rium machinarum inventionem, ac perfectionem, Hydraulicarum potissi-
mum, plurimum commodi, atque adjumenti humanae vitae, ac socie-
tatis usibus accessit: atque ut ex vetustioribus generis hujus inventis
recenseri in primis debet quod maxime ingeniosum est Archimedis
cochlea, quod maxime utile antlia, quam Vitruvius Ctebifio tri-
buit; ita summe ingeniosum, atque utile recentiorum inventum cen-
seri debet quod ignis, & vaporum vi ad antlias agitandas usi novam
antliae speciem exhibuerint Papin, & Savery, ac deinde perfecerint
undique Defaguliers, Newcomen, aliique. Itali eam Hydraulicam,
& Hydrometricam partem excoluerunt potissimum, quae ad fluminum
cursum spectat, atque huic theoriae excolendae, promovendaeque Bo-
noniensis ager veluti incitamento fuit. Nam cum exundantibus late

4
aquis Rhēni, aliorumque amnium Æmiliæ satagerent Bononienses ut agrorum perniciem averterent, accersitis celebrioribus Mathematicis doctrinæ aquarum fluentium amplificandæ plurimum contulerunt. Eos inter eminet Gulielminus, qui in præclaro opere de Natura Fluminum phænomena, ac repagula aquarum, ut terrestribus aliis corporibus permixtæ defluunt, ad generales leges, ac certa quædam principia revocare aggressus est.

Ætate hac nostra præclare de Mechanica universa meruerunt Alembertius in libris de principiis Dynamicæ, & de legibus resistentiæ, æquilibrii, & motus fluidorum, Eulerus in libro potissimum de motu corporum rigidorum: utrique vero subtilioris theoriæ motuum promovendæ, & rotationis legum evolvendarum occasionem præbuit earum omnium inæqualitatum diurni motus Terræ investigatio, quæ præcessionis æquinodiorum, & nutationis axis dici solent. Ego cum iisdem problematis resolvendis operam darem, in dissertationibus quibusdam jam usque ab anno 1759. Lucæ editis, rotationum componendarum, resolvendarumque theorema protuli, unde facilis problematum eorundem solutio profuit, atque ostendi quam ratione bini rotationis motus in rotationem unicam confluant. Nam qui jam antea de rotatione, & motu corporum pluribus viribus impulsorum, quarum singulæ rotationem aliquam gignerent circa axem datum, agere cœperant Mathematici, intelligebant utique iis viribus simul impressis unicum aliquem rotationis motum oriri. At cum non adhuc definiissent ipsi quam ratione a se junctis iis rotationibus progrediendum esset ad motum, qui ex omnibus simul oritur, alias problematum resolvendorum methodos, ac rationes secuti sunt, ac dubium adhuc reliquerunt num sine aliqua disgregatione partium, & corporis continui solutione ex binis motibus rotationis unica tantum rotatio haberi posset, quod dubium Cl. Alembert proposuerat Par. 11. de Mundi Systemate Lib. III. Cap. 1. Art. 11. §. 300. Ego autem cum singillatim binos rotationis motus in plano primum, ac deinde in solido corpore componere cœpisssem, elisis iis portionibus velocitatum, quæ opponuntur sibi invicem, deprehendi velocitatem in particulis singulis residuam proportionalem esse distantie ab axe positione dato, & directione sua rectæ ad axem ductæ normaliter insistere, axem vero ipsum jacere
in

in plano duorum axium, circa quos rotationes binæ seorsim haberentur, & sinus deviationis axis compositæ rotationis ab axibus rotationum sejunctarum esse reciproce proportionales velocitatibus sejunctarum earundem rotationum.

Iisdem fere temporibus in hanc Mechanicæ sublimioris partem studia sua contulerunt amici optimi, quorum consuetudine in Hetruria frequentissime utebar, Eques Julius Mozzius, & Ignatius Radicatus Coconati Comes. Radicatus simplicissimam exhibuit demonstrationem theorematis, quod usque ab anno 1755. in specimine theoriæ turbine Halæ edito proposuerat D. Segnerus, quod scilicet in unoquoque corpore saltem tres axes assignari possint, se ad angulum rectum fecantes, circa quos, ubi semel rotatio incœperit, invariabiliter continuari possit: & demonstrationi theorematis corollaria elegantia adjecit Radicatus tunc temporis plane nova. Mozzius in libro de momentanea rotatione corporum, qui anno 1763 Neapoli prodiit, & jam usque ab anno 1760. intra amicorum manus versabatur, falsum esse ostendit principium illud, quod Joannes Bernoullius ad definiendum axem spontaneæ rotationis in corpore extra gravitatis centrum impulsu assumpserat, quoque statuit Bernoullius eundem axem semper esse normalem plano per centrum gravitatis, & directionem vis impellentis ducto. Problemate etiam ad generalia motus principia optime revocato æquationes binas exhibuit Mozzius, quæ projectionis motum, & quatuor alias æquationes, quæ motum rotationis pro casu quolibet determinant: ac postmodum iisdem casibus sphaericorum corporum evolutis, quos proposuerat Alembertius citato in loco, singillatim ostendit Mozzius perinde esse si aut binæ vires, ex quibus motus omnis exoritur, aut bini rotationis motus, qui seorsim haberi possent, simul componantur. Clarissimus etiam Perellius qui tunc temporis in Pisana Academia Astronomiæ Professor erat, & quo cum sæpius de hisce omnibus simul omnes colloquebamur, demonstrationem aliam theorematis rotationum compositarum se invenisse dixerat, ac plura ad rotationis motum spectantia eidem theoremati adjecisse.

Anno 1761. in lucem prodiit tomus primus Opusculorum D. Alembertii, ubi sex æquationes exhibuit ipse, quæ motum corporis utcumque

que impulsi generaliter definiunt: & anno 1765. prodit D. Euleri opus de motu corporum rigidorum, ubi problemata hæc omnia ad ultimas usque æquationes per casus singulos deducta sunt. Singillatim vero in Probl. LIX., & LX. binas æquationes alias invenit Eulerus, quæ positionis axi, & motui rotationis determinando generaliter sufficiunt, æquationesque ipsas evolvendo in alia incidit Mozzi theoremata: quod rotationis axis non semper jacet in plano per gravitatis centrum traducto, atque ad directionem vis impellentis normalis: quod unica tantum vi impressa, præter motum rotationis, alius insuper motus haberi possit, quo singulæ corporis particule parallele ad axem ferantur: quod motus centri gravitatis semper sit idem, ac si vis imprimeretur in centro ipso. Ego simul hæc omnia comparando tres priores Mozzi æquationes pro rotationis motu determinando alia methodo, atque ex ipsa genesi rotationis collegi: deinde animadverti tres hujusmodi æquationes in priores binas Euleri æquationes facile resolvi: ac denique æquationibus generalibus evolutis peculiare alias æquationes facile obrinui, quibus Eulerus rotationis axem determinavit relate ad planum quod per centrum gravitatis transit, & est directioni vis impressæ perpendicularare. At cum formularum hujusmodi ad casus quofvis simpliciores etiam applicatio mihi operosior videretur, monuit Radicatus bina simul theoremata trium axium invariabilium, compositionis motuum rotationis, & aliud insuper theorema, cujus singularem demonstrationem jam antea inveneram, æqualitatis momenti vis impellentis, & summæ momentorum omnium in particulis omnibus rotantibus, simpliciore solutionem problematum exhibere posse: eoque consilio excitatus uberiores institui theorematum eorundem ad solvenda problemata applicationem.

Hæc cum vix amplius quam ad ingenii exercitationem spectent, diuturnum eos erudiendi, ac docendi munus, qui Architecturæ Staticæ, atque Hydraulicæ se dederent, exegit plane ut Mechanicæ universæ elementa qua melius ratione poteram explicarem, & Mechanicæ usum in ædificiis construendis, fulciendisque, in munimentis fluminum statuendis, in fossis navigabilibus educendis, in machinarum delectu qui esse possit ostenderem. Vulgare igitur compositionis, &

re-

resolutionis virium principium, & quæ inde pendent æquilibrii leges, quæque ex legibus æquilibrii pendent leges aliæ machinarum ad Staticam pertinentium, & resistentiæ corporum solidorum, principia etiam æquilibrii, pressiois, motus, resistentiæ fluidorum corporum in omnes partes versavi quosque is rerum ordo, ea demonstrationum ratio se obtulerit, quæ & ab ambage omni exsoluta, & discentium commodo videretur maxime accomodata. In iis etiam omnibus pervolvendis cum errores quosdam, qui summis authoribus exciderant, attigissem, solutiones aliæ quærendæ fuerunt illustrium problematum, præcipue quæ aliquando nostrarum studia exercuerant, ut quæ tholi cujusvis firmitatem, vim fornium, generales formulas mercurii in barometris suspensi, formularum usum in dimetienda montium altitudine, fontium salientium jactus, minimas aeris vibrationes, & propagationem soni respiciunt. Occasione autem Bononiensis agri perlustranda cum mihi primum aquarum fluentium observandarum copia fuisset facta, cumque deinde & in regione nostra, & in Veneta Ditione, & in Tridentinorum finibus fluviorum aliorum casibus, ac phænomenis aliis considerandis munere publico sæpius incubuissem, utilitatis publicæ esse censui si singula certo ordine digererem, & ea, qualiacumque sint, Hydrometris omnibus exhiberem.

Quæ ad Mechanicam pertinent plura in libro de Gravitate Corporum, atque in utroque Cosmographiæ volumine, & quæ præcipue ad usus Academicos pertinent in libro Institutionum Mechanicarum jam evulgaveram: & cum jam nova operis hujus editio paranda esset, & tradita jam in priore volumine, quod anno elapso editum est, Algebra, & Geometria Analytica, in hoc altero volumine, quæ ad Mechanicam universam, tertio quæ ad Cosmographiam Physicam, & Mathematicam spectant complecti vellem, & continuatam præcipuarum Matheos partium institutionem exhibere; quæ ad Mechanicam spectant ordine collegi omnia, & adhuc magis perspicua efficere conatus sum, & reliqua etiam suo loco adjeci, quæ post priorem eorundem operum editionem in mentem venerant. Sunt autem præcipua, quæ Galileanæ resistentiæ corporum theoriam, & experimentata a D. Buffon instituta, quæ methodum supputandæ fornium firmitatis a D. Bossut traditam, quæ singulares casus corporum in quibus-

busdam curvis motorum a Mathematicis aliis propositos, quæ D. Walmesley theoremata de velocitate sphaeroidum circa diversos axes rotantium, quæ controversam adhuc apud nostrates legem velocitatis, quantitatemque, & mensuram aquarum fluentium, & alia etiam quæ nostræ, & Venetæ Ditionis fluvios respiciunt.

Opus hoc omne in sex libros partiri volui, quorum primus de æquilibrio, & motu communi corporum, alter de motu rotationis, tertius de æquilibrio & motu fluidorum est: eosque, cum generalem Mechanicæ tractationem, applicationemque exhibeant, ad omnium usus latino idiomate conscripsi: italico autem idiomate conscribendi potius libri alii visi sunt, qui aquarum fluentium theoriam ad Italiæ potissimum, & regionum nostrarum exempla applicatam continent, quique ad Italos præcipue pertinent, quartus ubi de generali theoria fluminum, quintus ubi de alveis naturalibus fluminum, ac torrentium, sextus ubi de fossis artificialibus. Atque ita quidem Authorum aliorum, & Galilæi præcipue exemplum secutus sum, qui in suis de Mechanica Dialogis, quæ ad generalem theoriam motus spectabant latino idiomate, reliqua italico conscripsit. Cum vero in omnibus hisce tradendis, atque ad Academiæ nostræ usus accomodandis, quæ maxime utilia, & practica casibus affinia videbantur Hydrometriæ, & Mechanicæ principia distincte singula recensuissem, & occasione data adjecissem etiam nonnulla, quæ potius ad Matheſim abstractam pertinent, qui aquarum praxi apud nos potissimum se dedunt, omisso libro secundo, & posterioribus primi, & tertii libri problematis, reliquis omnibus continuatam præcipuarum rerum institutionem habere poterunt, & subsidia præcipua invenient, quæ naturalium legum consideratio, & observatio phænomenorum ad praxim affert.

MECHANICÆ UNIVERSÆ

LIBER PRIMUS.

DE ÆQUILIBRIO,

ET MOTU COMMUNI CORPORUM.



Motus absolutus est corporis translatio de uno in aliū locum, motus relativus est corporum accessus, recessusque a se invicem: unde quæ absolute in Universi hujus spatiis moventur corpora quiescent relative si eadem celeritate, eademque directione motus ferantur. Directio est linea, juxta quam motus corporis dirigitur: major autem celeritas est qua uniformiter continuata majus spatium dato tempore absolvi potest, & qui uniformiter continuatur motus dicitur uniformis, sive æquabilis, & cui nova accedunt celeritatis incrementa, vel decrementa dicitur motus acceleratus, vel retardatus, & motus uniformiter acceleratus, vel retardatus ille, in quo incrementa, vel decrementa velocitatis æqualibus temporibus æqualia habentur. Quantitas motus, sive impetus moti corporis est summa omnium motuum in singulis particulis, adeoque data quantitate materiæ quantitas motus in dato corpore proportionalis est communi particularum omnium velocitati, auctaque massa in eadem massæ ratione augeri debet, & universim esse debet in ratione composita massæ, & velocitatis.

Ideæ, ac notiones temporis, spatii, corporis, motus, velocitatis adeo perspicuæ, ac simplices videntur esse, ut in Mechanicæ limine eas indicare potius, quam explicare necesse sit: atque in tota etiam nostrarum idearum serie, quæ compositæ sunt in simpliciores alias resolveri possunt, at ubi demum ad simplicissimas deventum sit resolutionis totius progressus jam sisti debet. Qui priores illas notiones metaphysicis quæstionibus obvolvere voluerunt Philosophi disputarunt, Pyrronici num dentur corpora, Zenonici num detur motus, Cartesiani num sublata materie omni intermedia, quæ extrema sunt corpora de-

Mechanica

B

bent

beant se mutuo tangere; alii etiam an tangere aliquando se possint corpora, an vero ex punctis indivisibilibus componantur se se invicem attrahentibus cum dato aliquo intervallo distant, ad minimas autem distantias se se adeo repellentibus ut contactus omnes impendant. Aliæ insuper de vis motricis natura, & indole disputationes subortæ sunt, cum vis motricis nomine satis intelligi videatur actio quælibet quæ statum moti aut quiescentis corporis immutat. His autem omnibus disputationibus vix quidpiam Mechanicæ adjecerunt Philosophi, cum qui a principiis simplicissimis ad investigandas naturæ leges Mathematici progressi sunt Mechanicam undique amplificaverint.

Primo autem ex ipsa corporis, ac motus notione manifestum est quod si corpus aliquod semel quieverit, vi aliqua motrice opus erit ut e quietis statu deturbetur, quodque si in motum semel actum fuerit, eadem velocitate, eademque motus directione moveri perget, nisi novis impressis viribus cogatur aut priorem celeritatem immutare, aut a priore directione motus deflectere. Aliquam enim causam, rationemque esse oportet, qua aut celeritas, aut directio moti corporis immutetur, & in singulis motuum variationibus, quæ oculis possunt objici, semper aliquam hujusmodi causam deprehendimus. Balianus Lib. IV. de motu naturali, qui anno 1646. Genævæ in lucem prodiiit, considerare cœpit quod corpora indifferenter se habeant ad motum, & ad quietem, quodque eodem modo continuari debet motus quo primum incipit, nisi aliqua accedat variationis alicujus causa. Newtonus initio prioris libri Principiorum Mathematicorum tanquam materiæ insitam consideravit potentiam resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est perseverat in statu suo quiescendi, vel movendi uniformiter in directum: atque insitam vim hujusmodi nomine, ut aiebat ipse, significantissimo vim inertię appellavit.

Newtoni dictum non recte accepisse videntur ii, qui idcirco peculiarem aliquam, ac positivam vim censuerunt esse, qua statum motus aut quietis tueantur corpora: quod & jam Desagulierius Lect. V. Physicæ Experimentalis §. LI. ex peculiaribus quibusdam casibus colligi posse censuit, in quibus alii obices vinci debent, confirmavitque exemplis volucrum, remigum, urinatorum, qui retro impellendo a-

rem,

rem, vel aquam promoventur. At dum Mechanicæ leges quærimus minime considerari debent spontanei animantium motus, qui pendent ex causis aliis immechanicis, & quibus fit ut ex quiete illico surgerent animantia, & sibi illico a motu possint, objectoque aliquo corpore, & muscutorum nisu in adversam partem concepto antrosum promoveantur. In motibus omnibus mechanicis causa aliqua exterior debet esse, qua status motus, aut quietis deturbetur, atque ideo tantum ex se statum suum tuentur corpora quod neque ex se motus abire in nihilum, neque ex nihilo potest exsurgere. Et plane si positiva esset vis ulla, qua statum suum tuerentur corpora, non amplius externa quavis vi impressa e statu illo deturbari possent, quamdiu saltem exterior vis minor esset vi interna, & status conservatrice novimus autem externa quavis vi impressa variari motum, & agi in motum corpora quiescentia, quæ ab externis aliis impediementis cohesionis, frictionis, infixionis &c. sint libera.

Neque etiam accurate a Newtono dictum censi debet, quod in corporibus se se invicem percutientibus actioni contraria semper, & æqualis sit reactio, sive quod duorum corporum actiones in se invicem exercitæ æquales sint, & in partes contrarias dirigantur. Nam si ex adverso sibi occurrant corpora, utique æquales quantitates motus, quæ in partes contrarias diriguntur, destitui, & binæ actiones æquales utrumque haberi debent, ut iis elisis sola post ictum differentia quantitatis motus supersit, quæ ante ictum habebatur. At si motus ad plagam eandem dirigatur, & quod tardius est corpus celerioris impulsu acceleretur, retardetur autem quod antea erat celerius, tardioris actio proprie nulla erit, & motus quantitas in celeriore corpore deficiet ea tantum de causa, quod aliqua sui portione in aliud corpus transfertur. Resistentiæ etiam, quæ corpori in fluido aliquo progredienti obicitur, non alia vis erit quam quod ut progredi possit corpus, particulas fluidi, in quas incurrit, deturbare debet e locis suis, & motum aliquem singulis communicare, eandemque quantitatem motus amittere, quam communicare.

Absolute corporum vires sunt gravitas, attractio, cohesio, elasticitas, vis magnetica, vires omnes quibus corpora præjiciuntur. Gravitatem Newtonus attractionem etiam vocavit, quod fiat ad parti-

culas singulas aliorum corporum, & vim centripetam quod ex compositis hîc attrationibus vis una exsurgat, quæ ad datum centrum dirigitur, atque attrationis vocabulo se effectus potius, quam causam, & rationem physicam indicasse monuit. Effectus ipsos, legesque motus, ac naturæ phænomena tanto observationum consensu undique ad calculum revocavit Newtonus: qui vero mechanicam gravitatis, atque attrationis causam investigantes Philosophi cælestes vortices Des Cartes, particulas lucis e confiniis Planetarii systematis in Solem relabentes Bernoullius, ætherem utcumque motum Huygens, Bulfinger, alique in subsidium advocarunt, incertas quasdam, & phænomenis minime consentaneas hypotheses protulerunt, quæ ne fufius quidem merentur exponi, ac refutari. Aliam etiam peculiarem vim attrationis in minimis corporum distantis exerceri animadvertit Newtonus, ex qua pendet omnis cohæfio, & ex qua Keillius vim illam oriri existimavit, qua corpora utcumque compressa, sublata vi comprimente, in pristinam figuram redeunt, & quæ dicitur elasticitas.

Peculiaris hujusmodi attractio in minimis distantis, atque in contactu corporum quandoque est maxima, auctisque aliquantisper distantis adeo imminuitur ut vix amplius ad datam distantiam sit sensibilis, neque esse potest reciproce nisi ut aliqua distantie potentia, quæ quadratica, & cubica sit major. Ut vero universalem gravitatis vim accuratius designaret Newtonus triplicem ipsius quantitatem distinxit, acceleratricem, motricem, & absolutam. Gravitatis quantitas acceleratrix est ipsius mensura proportionalis celeritati, quam generat dato tempore: quantitas motrix est mensura proportionalis quantitati motus, quæ pariter gignitur dato tempore: gravitas vero absoluta est ea vis omnis, qua corpus grave in aliud aliquod corpus tendit. Gravitatis acceleratrix paribus ab eodem centro distantis in corporibus omnibus est eadem: in antlia enim Pneumatica sublato densiore aere plumule, & auri frustula, & corpora alia quælibet eodem tempore ex paribus altitudinibus decidunt, & in libero aere quæ exigua temporis differentia a Galilæo jam observari cœpit non alia est quam quæ diversæ aeris resistentiæ debet tribui. Ex eadem celeritatis æqualitate manifeste consequi animadvertit Galilæus, quod quantitas motus corporum decidentium, quæ gravitas motrix est, &

pon-

pondus absolutum corporum, esse debet quantitati materiæ proportionalis.

Inventa vero antlia Pneumatica cum successivis emboli agitationibus aerem rarefaciendo flamma, fumus, vapores omnes ad imum recidunt, absolute gravia esse patuit ea corpora, quæ quod sub eodem volumine minus pondus habeant, & aere specificè leviora sint, in libero aere feruntur altius. Corpora omnia cælestia aliquo modo esse gravia ex eo primum collegerat Newtonus, quod Planetæ, & Cometæ circa Solem, Luna circa Terram, & Satellites alii circa Planetas primarios lineas curvas, & in se redeuntes describant. Cum enim omnia, quæ moventur corpora, ex se in directum tendant, quod in perimetro alicujus curvæ moveretur corpus sibi relictum excurret per lineam rectam, quæ curvæ in dato puncto productio sit, sive quæ curvam ibidem tangat, & vi aliqua continua erit opus ut corpus a tangente quavis deflexum curvam continuam describat. Itaque vim aliquam centripetam cælestium omnium corporum esse oportet: & quia sublata vi hujusmodi in dato curvæ descriptæ puncto quodcumque corpus excurreret per tangentem, hoc vero excursu a centro motus longius recederet, ex nisu illo corporis abeundi per lineam rectam vis alia profluet recedendi directè a centro, quæ idcirco dicitur vis centrifuga, quæque eadem vis est, quæ, dum lapis in funda volvitur, filum tendit, & manu experiri solet.

Duplici igitur vi absolvi motum cælestium corporum statuit Newtonus, centripeta, quæ corporibus singulis est insita, ac centrifuga, quæ ex motu illo oritur quo primum singula in directum debuerunt projici. Vires centripetas Planetarum, Cometarumque in Solem dirigi, & vires satellitum simul dirigi in Solem, & Planetas primarios ex phænomenis aliis collegit Newtonus: & motu Lunæ ad velocitatem corporum circa Terræ superficiem decidentium relato, motibus cælestium aliorum corporum comparatis inter se deprehendit gravitatem acceleratricem corporum ad idem centrum tendentium esse reciproce ut quadratum distantie a centro: deprehenditque phænomenis omnibus cælestibus amplissime satisfieri si absoluta vis gravitatis statuatur quantitati materiæ corporum attrahentium directè, & quadratis distantiarum reciproce proportionalis: quæ generalis gravitatis lex explicando Plane-

ta-

tario systemati, & cælestibus iisdem phænomenis ad calculum revocandis in subsequenti Cosmographiæ volumine argumentum suppeditabit.

Ut modo ad priores illas gravitatis notiones redeamus duas adhuc virium species distinguere voluit Leibnitius: vires corporum gravium in æquilibrio consistentium, quas vires mortuas appellabat ipse, ac metiebatur ex producto massæ, & illius velocitatis, qua sublato utcumque æquilibrio corpora moveri inciperent: & vires corporum motorum, quas vivas appellabat, contendeatque metiendas esse ex massa, atque ex quadrato velocitatis. Cum virium mortuarum, & æquilibrii corporum non alia ratio esse possit; in æstimandis viribus vivis Leibnitio primum Bernoullius, ac deinde Hermannus, alique Mathematici adhæserunt, Mac-Laurinus vero, Mairanus, alique veterem Galilæi, & Cartesii rationem secuti sunt vires quascumque corporum æstimandi ex massa, & simplici velocitate. In Italia etiam nostra postremo loco Vincentium Riccattum inter, & Franciscum Zanottum viros clarissimos de mensura virium vivarum disputatum est, cum Leibnitii sententiam fusius propugnaret Riccatus, Zanottus vero rationes alias secutus indicaret etiam, quod Cl. Alembertus in suæ Dynamicæ exordio expresse monuit, quæstionem omnem de vivarum virium mensura ad Metaphysicam potius quam ad Mechanicam pertinere, neque ad Problematum Mechanicorum resolutionem majus subsidium aliquod asferre posse.

Cum vero actiones, vires, causæ omnes ex effectibus metiendæ sint, eo redit quæstio quod si effectus loco accipiatur altitudo illa, ad quam gravia velocitate data verticaliter possunt projici, quæque est semper quadrato velocitatis proportionalis, eadem erit vis vivæ in dato corpore proportio, atque in diversis corporibus erit vis in ratione composita ex simplici ratione massæ, & duplicata velocitatis; & cum velocitas, quæ in corporibus ascendentibus contraria gravitatis actione demitur, quæque adjicitur semper corporibus descendentibus, sit temporis proportionalis, ut ferunt priora universæ Dynamicæ theoremata, erit etiam vis viva in ratione simplici massæ, velocitatis, & temporis conjunctim. Gravitatis actioni, quæ motum corporum verticaliter projectorum, atque ascendentium continue re-

tar-

retardat; comparari possunt continuæ aliæ resistentiæ, quæ in elastris tendendis, relaxandisque, atque in corporibus tenacibus permeandis exercentur: atque ita numerus elastrorum, quæ data vi relaxari, & numerus stratorum, quæ in materia quavis uniformiter tenaci superari possunt, sive altitudo omnis fovearum, quæ excavantur, erit quadrato velocitatis proportionalis: quam in elastris relaxandis legem primo exposuit Joannes Bernoullius, atque in excavandis foveis experimento confirmavit s^r Gravefande, Polenus, & Martinus.

Ita igitur si vis viva metiri debeat ex numero resistentiarum; quibus extinguitur, erit in ratione simplici massæ, & duplicata velocitatis. Quod si vero effectus loco non numerus, sed absoluta quantitas resistentiarum omnium consideretur, quæ data vi superari possunt, cum in iis superandis tota impendatur quantitas motus corporis, erit eadem vis vivæ, & quantitatis motus mensura, massa videlicet, & velocitas. Quod etiam ex subsequentibus fiet clarius ubi ostendemus, actionem quamvis proportionalem esse vi agenti per tempus multiplicatæ, & productum vis cujusvis, & dati elementi temporis proportionalem esse velocitati, quæ dato tempore adjicitur, vel demitur, adeoque summam actionum omnium in dato corpore esse velocitati proportionalem. Quæstio igitur de vi viva aut ex velocitate simplici, aut ex quadrato velocitatis æstimanda eo redit ut videatur num ex quantitate totius resistentiæ qua absumitur, vel ex numero æqualium obicium, qui superantur, metiri debeat, ut recte ab Alemberto notatum est: cumque in problematum Mechanicorum resolutione alterutrum, vel utrumque considerari possit, & quantitas illa ex simplici velocitate, numerus autem actionum motui corporis adversantium ex quadrato velocitatis recte metiatur; mirum esse non debet si ex utrolibet principio digressi authores varii ad easdem omnino conclusiones pervenerint.

Hoc ipso autem quod principium utrumque ad resolutionem problematum indifferenter assumi possit, seposita virium vivarum consideratione, non alia in sequentibus elementa assumemus, quam quæ ad eandem resolutionem sufficiunt, corporum massam, directionem motus, velocitatem. Principium aliud, quod novo vocabulo virium mortuarum dicitur, vetus Archimedis principium est, quo æquilibrium ha-

ha-

haberi ostendit ubi corporum pondera sint reciproce proportionalia distantis a centro motus: distantiarum enim eadem est ratio, ac velocitatum, quas turbato utcumque æquilibrio corpora circa idem centrum conciperent, habeturque idcirco æquilibrio ubi utrumque æquentur producta massæ, & velocitatis. Ut ab hoc ipso æquilibrii casu, atque ex theoria machinarum translationem omnem exordiamur, æquilibrii principium ad principium aliud compositionis, & resolutionis motuum revocabimus, compositionis autem, ac resolutionis motuum demonstrationem eandem asseremus, quam primum in libro de universali gravitate corporum anno 1768. edidimus, quamque post illud tempus alii Mechanicæ scriptores exteri, ac nostrates secuti sunt, reductione scilicet ad absurdum facta ubi angulus directionis virium simul in eodem corpore agentium sit rectus, & casibus aliis acuti, obtusique anguli directionis virium ad recti anguli casum reductis.

CAPUT PRIMUM.

DE ÆQUILIBRIO

CORPORUM SOLIDORUM.

T H E O R E M A I.

SI corpori alicui in puncto *A*, fig. 1., binæ vires imprimantur, quarum una ex *A* in *B*, altera ex *A* in *D* dato tempore seorsim moveri possit, & angulus *BAD* sit rectus; completo reſtangulo *ABCD*, corpus eodem tempore ex *A* in *C* per diagonalem *AC* feretur.

Quoniam corpus vi una secundum *AB* impressa recedit a recta *AD*, atque in fine dati temporis ad rectam *BC* pervenit, vi autem altera recedendo a recta *AB* pervenit ad rectam *DC*; si binis viribus simul impressis corpus eodem modo ad easdem rectas *BC*, *DC* accedat, post finem dati temporis reperietur in communi duarum reſtarum concurſu *C*; & quia motus omnis, qui ex viribus semel impressis oriſtur, per rectam lineam debet dirigi; corpus ex *A* in *C* non nisi

nisi per diagonalem AC feretur. Non potest autem corpus vi AD impulsus ob vim aliam AB ad rectam DC citius accedere nisi vis AB portio aliqua agat ex A in D , & priori vi adjungatur. At cum angulus BAD sit rectus, & producta DA in E vis AB ad directiones AD , AE utrimque æqualiter se habeat, si quæ ipsius portio ex A in D exerceretur, tantundem vis ex A in E deberet exerceri: quo posito binæ æquales, ac contrariæ actiones se invicem destruerent: Quod si e contra assumamus binis viribus simul impressis corpus ad rectam DC tardius accedere, aliqua erit actio contraria ex vi AB orta, quæ dirigetur ex A in E : cumque ob æqualem vis ejusdem AB inclinationem, positionemque tantundem ex A in E , & ex A in D debeat agere, corpus ob vim AD eodem semper modo ad rectam DC accedet, sive vis AB imprimatur, sive non. Simili ratione ostendi poterit corpus ob vim AB ad rectam BC æque accedere, ac si vis alia AD tolleretur. Corpus igitur conjunctis viribus ad utramque rectam DC , BC æque accedet, & diagonalem AC absolvet eodem tempore, quo rectanguli latera AB , AD sejunctis viribus posset absolvere.

COROLLARIUM.

Binæ igitur velocitates, ac motus, qui sint lateribus rectanguli alicujus proportionales, exprimanturque ipsis lateribus, motum unicum component, cujus directio, & quantitas exprimitur diagonali: & cum vis omnis eidem corpori impressa sit proportionalis motui, & velocitati quam generat; binæ etiam vires binis lateribus expressæ æquivalent vi uni, quæ exprimitur diagonali, & uni huic binæ illæ; & binis illis hæc una substitui poterit. Pari enim modo dum corpus per diagonalem AC movetur spatio AB recedit a latere AD , & spatio AD recedit a priore latere AB , & bini hi motus, cum rectum angulum suis directionibus efficiant, nequeunt se invicem turbare. Principia compositionis, & resolutionis motuum, ac virium indifferenter tradidisse videtur Newtonus in corollariis Legis tertiæ Principiorum. Ipse autem assumpsit corpus binis viribus AH ; AF impulsus, fig. 2., & 3., eodem modo ad parallelas alia HC , FC accedere ac si vires seorsum imprimerentur: quod cum pro casu

Mechanica,

C

anguli recti jam pateat, pro casu quovis anguli altorius mox demonstrabitur.

THEOREMA II.

Si corpori in puncto *A* binæ vires imprimantur secundum quæcumque rectas *AH*, *AF*, & velocitates inde ortæ sint rectis ipsis proportionales, vim unicam component, quæ proportionalis erit diagonali *AC* parallelogrammi *AHCF*: & vicissim vis, quæ exprimitur diagonali, resolvi poterit in duas alias, quæ duobus parallelogrammi lateribus exprimantur.

Primo enim si angulus *HAF* sit acutus, fig. 2., & sit *ABCD* rectangulum parallelogrammo circumscriptum, demisso ex *F* in *AB* perpendicularo *FG*, per corollarium superius vi uni *AF* substitui poterunt binæ *AG*, *AD*, & binis viribus propositis *AF*, *AH* substitui poterunt tres aliæ vires *AD*, *AG*, *AH*: cumque triangula *FAC*, *CHB*, & latera *AG*, *HB* ad partem eandem posita inter se æquantur, binis iisdem viribus *AF*, *AH* substitui poterunt binæ aliæ *AD*, *AB*, & vis ex ipsis composita exprimetur recta *AC*, quæ parallelogrammi simul, & rectanguli circumscripti diagonalis est.

Deinde vero si angulus *HAF* sit obtusus, fig. 3., & vis *AF* in binas *AD*, *AG* resolvatur, vis *AG* dirigetur ad partem adversam illi, ad quam tendit vis *AH*, & differentia duarum virium *AB* accipienda erit, quæ simul cum vi *AD* componet vim recta *AC* expressam, quæ diagonalis est parallelogrammi propositi, & rectanguli inscripti. Vicissim in casu utroque vis *AC* resolvetur in binas *AB*, *AD*, quibus substitui poterunt tres simul *AD*, *AC*, *AH*, sive etiam binæ *AF*, *AH*.

COROLLARIA.

I. Quia diagonalis est semper minor summa duorum laterum, composita etiam vis, ac velocitas secundum diagonalem minor erit summa duarum virium, ac velocitatum juxta parallelogrammi latera resolutarum. Sed si ex *H*, & *F* in *AC* ducantur perpendiculara *HN*, *FM*, fig. 4., & 5., erit vis *AH* pars *AN*, & vis *AF* pars *AM*, quæ secundum *AC* exercebitur, eritque in casu anguli acuti directionis virium $AC = AN + AM = AN + NC$: & in casu anguli obtusi $AC = AN - AM$. Semper igitur quem effectum duæ vires edunt

secun-

secundum diagonalis directionem, eundem edit in directione eadem vis una æquivalens: & qui in motuum compositione effectum minorem causa haberi censuerunt hallucinati sunt quod effectum juxta directionem datam exercitum comparaverint causæ, quæ juxta directiones alias exercetur.

II. Pariter binæ vires AH , AF resolvi poterunt in quatuor alias HN , AN , FM , AM , quarum binæ HN , FM æquales, & contrariæ in æquilibrio erunt inter se, & binæ aliæ vires secundum diagonalis directionem component vim $AN \pm AM$, superiore signo accepto cum angulus duarum virium est acutus, inferiore cum est obtusus. Perinde autem erit si loco vis AC intelligamus corpus in puncto A secundum AC impelli summa, aut differentia virium $AN \pm AM$, & secundum directionem perpendicularem impelli viribus $+HN$, & $-FM$. Jam vero binæ AN , HN component vim AH : & in casu anguli acuti binæ $+AM$, $-FM$, atque in casu obtusi anguli $-AM$, $-FM$ ad aliam partem component vim AF . Rursus itaque vis, quæ exprimitur diagonali, eundem effectum exerit secundum latera, quem edunt binæ aliæ vires binis lateribus expressæ: & in resolutione virium effectus, & causa ad eandem directionem relatis effectus major causa non obtinetur.

III. Si corpus A , fig. 6., binis viribus AB , AF , AC sollicitatum quiescat, producatque GA in C usque ad concursum laterum BC , FC parallelogrammi $ABCF$, erit $AC = AG$: & cum in triangulo quovis ABC latera sint sinibus angulorum oppositorum proportionalia, erit vis AC , sive AG ut sinus anguli ABC , sive etiam ut sinus anguli FAB , qui prioris anguli complementum est ad duos rectos, & vires AB , AF inter se erunt ut sinus angulorum ACB , CAB , sive etiam FAC , FCA . Data igitur directione, & quantitate duarum virium inveniri poterit vis tertia, quæ binas illas in æquilibrio contineat: & cum binæ quælibet vires ad unicam reduci possint, tres etiam ad casum duarum virium, binis primo compositis, reducentur, & quatuor ad casum trium, atque ita vires quæcumque aliæ simul corpori impressæ ad vim unicam, quæ simul omnibus æquipollet, aut quæcum omnibus ex adversa parte æquilibrio constituat, reduci poterunt. Alias uberrimi theorematum demonstrationes dederunt autho-

res alii, atque eas inter commendari debet quam protulit Daniel Bernoullius To. I. Academiæ Petropolitane, quæque huic tantum axiomati innititur, quod si quæ vires in æquilibrio sint inter se, earum etiam æque multiplices in æquilibrio esse debeat.

THEOREMA III.

Si in puncto A , atque in directione AC , fig. 7., & 8., agat vis aliqua, quæ recta AC exprimatur; absolutæ, ac totales vires, quæ inde orientur secundum binas alias quascumque rectas QA , RA in plano eodem positas inter se erunt ut cosinus angulorum QAC , RAC .

Producantur rectæ propositæ in H , & F ut sint AH , AF duo latera parallelogrammi, quod pro diagonali habeat rectam eandem AC , quæ exprimit quantitatem simul, directionemque vis impressæ in puncto A . Juxta theorema antecedens perinde erit si loco vis AC in puncto A imprimantur binæ vires AH , AF . Jam vero ex ratione ipsa, qua primum, & secundum theorema demonstravimus, manifestum est, quod nisi angulus HAF sit rectus portio aliqua vis AF secundum AH ad unam, vel alteram partem exercebitur, demissisque ex F , & C in RAH perpendicularis FG , CN , si angulus HAF sit acutus, fig. 7., erit AG pars vis AF , quæ ager ex A in H , adjicieturque vi AH : atque ob æqualia triangula FAG , CHN , & æquales rectas AG , HN , erit AN vis omnis, quæ in directione RA oriatur ex vi AC : ac pariter ex C , & H in QA productam demissis perpendicularis HD , CM , erit AM vis omnis, quæ oriatur in directione GA .

Si angulus RAQ sit obtusus, fig. 8., perpendicularum FG cadet inter A , & R , atque ex vi illa AF , quæ A in F dirigitur, oriatur vis AG , quæ dirigitur ex A in R : & si angulus RAC pariter sit obtusus perpendicularum AN cadet in adversam partem, subductaque ex AH vi AG , sive HN , erit AN vis omnis secundum RA residua. Si angulus RAC sit acutus, fig. 9., perpendicularum CN cadet inter R , & A , & vis omnis AN dirigitur ex A in R : demissaque ex C in QA productam perpendicularo CM , erit in casu utroque AM residua vis omnis, quæ dirigitur ex Q in A .

In casibus autem hisce omnibus erit vis tota, quæ ex vi AC se-

cun-

cundum QA orietur, ad vim totam, quæ orietur secundum RA , ut

$$AM : AN = \frac{AM}{AC} : \frac{AN}{AC} = \sin. ACM : \sin. ACN = \cos. CAM :$$

$\cos. CAN$, & quia iidem sunt sinus, & cosinus anguli unius, ac complementi ad duos rectos, fiet etiam ratio virium $\cos. QAC : \cos. RAC$, & si angulus RAC ex obtuso in acutum transeat negativus fiet cosinus, & vis AN dirigetur contrario sensu ex A in R .

COROLLARIA.

I. Si RAQ referat funem aliquem suspensum ex R , & Q , & pondus aliquod P pendeat ex puncto A , erit tota tensionis vis in fune

$$QA = P. \frac{AM}{AC} = P. \cos. QAC, \text{ \& in fune } RA \text{ erit } P. \cos.$$

RAC . Qui duarum funium tensionem ex solis rectis AF , AH metiri voluerunt ingeniosi authores minime adverterunt quod cum proposita vis cujuscvis quantitatem, directionemque data aliqua recta exprimendo æquipollentes sint binæ vires binis lateribus parallelogrammi cujuscvis expressæ, quod rectam illam pro diagonali habeat, nunquam ultima est resolutio nisi cum angulus resolutarum virium est rectus, quodque in casu anguli HAF acuti ex vi AF , quæ funis QA tenditur, semper aliqua habetur portio AG , quæ simul ad tendendum funem RA impenditur, in casu autem anguli obtusi quæ vis ad unum tendendum funem impenditur, ea sui portione aliqua simul impenditur ad funem alium relaxandum.

III. Si angulus RAC sit rectus, fig. 10., evanescente cosinu nulla erit tensio funis RA , atque ex vi ponderis, quæ verticaliter agit, nulla vis horizontalis orietur, ut ex primi etiam theorematism demonstratione manifestum est: nam si ex vi verticali vis aliqua horizontalis ad dexteram oriri posset, vis alia æqualis ad sinistram oriri deberet, qua vis prioris hypothesis destrueretur. Si punctum A fixum esset, eique funis horizontalis ex R suspensus circumduceretur, adjecto inferius pondere alius haberetur casus verticalis totius actionis in horizontalem conversæ. Si angulus acutus RAQ , fig. 11., successive, & per gradus omnes minuat, ac denique rectis RA , QA congruentibus evanescat, æquales demum fient rectæ AC , AM , AN , & qua

qua vi AM , five AC funis QA tendetur ea etiam simul tendetur funis RA , & si funes ex pluribus filiis componantur vis tensionis in filo unoquoque habebitur vim AC per numerum filorum, qui binos simul funes QA , RA componunt, dividendo.

III. Si rectæ RA , QA in unam RAQ recidant, fig. 12., atque ex puncto A suspendatur pondus, quod recta AC exprimat, completo rectangulo $AMCN$ erit AM vis omnis, qua funis tendetur ex parte QA , & ex parte AR relaxabitur, eritque AN vis perpendicularis, qua funis e sua rectitudine deflectetur. Si vis AC in binas alias resolveretur rectis AQ , AR parallelas, ut in corollario primo indicatum est, parallelis rectis nunquam concurrentibus, infinita evaderet vis, qua funis QA tenderetur: quæ absurdi species, cum primum apud nos problemata de funium tensione aliquot ab hinc annis ceperunt agitari, me impulit ut ultimam resolutionem virium inquirerem: resolutionem autem hic attuli ut nobili exemplo viribus inter se comparandis, substituendisque tyrones assuescere incipiant. Viribus autem ultimo resolutis facile alia hujus generis problemata enodari poterunt. Ut si data verticali EAC , fig. 13., datisque punctis R , Q inquiratur quæ longitudo funis RAQ esse debeat, ut pondus aliquod suspensum ex puncto A funem RA tendat ea vi, quæ ad integrum pondus se habeat ut $1 : P$; problemati satisfiet ad verticalem propositam AC ita inclinando rectam RA ut sinus totus ad cosinum anguli RAC se habeat ut $P : 1$. Similis esset solutio problematis, quo data longitudine funis RA quaereretur quam ratione inclinari debeat ut dato pondere verticaliter ex A suspensio data vis tensionis oriatur.

THEOREMA IV.

Si rectæ inflexili BAC , & circa centrum A mobili, fig. 14., binæ vires perpendiculariter imprimantur in B , & C , quarum directio in plano eodem jaceat, quantitates autem BD , CE sint distantis a centro motus BA , CA reciproce proportionales, erunt vires ipsæ in æquilibrio.

Statuamus vim CE imprimi directione obliqua DF in puncto C , productisque BD , CF quousque simul concurrant in puncto H , accipiantur $HM = BD$, & $HN = CE = CF$, complectaturque parallelo-

logrammum MN , & diagonalis LH producta fecerit rectam BC in puncto aliquo A , & sit CO perpendicularum demissum ex C in HA . Vis BD in æquilibrio erit cum vi HM , quæ in eadem recta BH , atque ad partem contrariam imprimatur in puncto H , & vis CF in æquilibrio erit cum vi HN , & binæ HM , HN component vim HL , quæ tendet ex A in H . Juxta Coroll. III. Theor. II. erit vis HM ad vim HN ut sinus anguli HLM , sive AHC ad sinum anguli BHA sive ut $\frac{CO}{HC} : \frac{BA}{HA}$. Statuamus insuper directionem vis CF magis

semper magisque ad perpendicularem CE accedere. Manente semper directione BH , & quantitate virium HM , HN , puncto H longius abeunte ad æqualitatem propius semper accedent rectæ HC , HA , & distantia punctorum A , O fiet minor quacumque data, ac denique punctum O in A recidet, & binæ rectæ HC , HO parallelæ, & æquales fient, & diagonalis HL æqualis fiet summæ laterum HM , HN , eritque $HM : HN = BD : CE = CA : BA$. Quod si igitur recta BC dividatur in ratione reciproca virium in puncto A , & punctum A sustineatur vi, quæ sit æqualis summæ duarum BD , CE , erunt duæ vires in æquilibrio.

COROLLARIA.

I. Si in plano aliquo agant duæ vires BD , CE inter se parallelæ, & distantiam BC dividendo in ratione reciproca virium in puncto A imprimatur in adversam partem vis alia parallela, quæ sit æqualis summæ duarum BD , CD , nullus plani parallelus motus haberi poterit: & cum nunquam ex vi aliqua oriri possit motus in directione ad vim ipsam perpendiculari; nullus omnino esse poterit plani totius motus. Non fatis fundamentale hoc Staticæ principium ea ratione videtur colligi, quam exposuit Newtonus in Coroll. II. Legis III. Lib. I. Princip., quæque huc redit, quod cum recta BD producta in M , fig. 15, acceptaque recta $AH = AC$, vis BD ad plani HBC motum perinde se habeat in quovis demum rectæ BM puncto secundum eandem directionem imprimi intelligatur, sive in B , sive in H , posita $BD = HM$ vis HM in puncto H impressa resolvitur in binas alias, quarum una HO juxta directionem radii AH agendo nihil ad radium ipsum, atque ad planum HBC circa punctum A volvendum con-

conferet: altera HK perpendiculariter radium trahendo idem valebit, ac si perpendiculariter radio AC imprimeretur in puncto C , atque ob similitudinem triangulorum HKM , ABH erit vis HM , seu BD ad vim HK , seu CE ut radius AH , sive AC ad AB . Hisce enim positis superesset vis HO , & si punctum A esset liberum motus aliquis secundum AH haberetur, & adhuc ostendendum superesset, quod motus omnis compositus perpendiculariter ad rectam BC fieri, ac sibi debeat summa duarum virium ex adverso impressa in puncto A .

II. Si virium loco accipiantur duo pondera, atque ex virga inflexili BC pendeat pondus P in B , & pondus p in C , ac sit $P : p = AC : AB$, & $P . AB = p . AC$, erunt duo pondera in æquilibrio, & punctum A deorsum trahetur vi, quæ æqualis erit summæ ponderum P, p . Quod etiam deductione ad absurdum facta manifestum est: nam si turbato utcumque æquilibrio punctum B in b , punctum C in c , fig. 16., & recta BAC in locum bAc transiret, esset Cc velocitas corporis ascendentis, & Bb descendens velocitas, & cum velocitates sint distantis a centro motus directe, massæ autem distantis eisdem reciproce proportionales, æquales utrobique essent quantitates motus: quo dato nulla potior esset ratio, cur quod ad dexteram est corpus descendere potius debeat quam ascendere, atque indifferenter se habendo ad ascensum, descensumque deberet omnino quiescere. Productum $P . AB$ dicitur momentum ponderis suspensi ex B , atque universim quantitas virium circa punctum A agentium æstimari debet ex producto massæ, & distantis a centro motus, sive etiam ex producto massæ, & velocitatis, quæ turbato æquilibrio gigni posset. Ita ex priore illo principio aliud educitur, quod æquilibrio habeatur ex æquatis utrimque productis massæ, ac velocitatis, & principium utrumque ad æquilibrii casus determinandos indifferenter assumi poterit.

III. Cum in casu æquilibrii sit $P : p = AC : AB$, pondus quodcumque exiguum in æquilibrio esse poterit cum alio corpore utcumque magno si ad distantiam tanto majorem removeatur a centro motus quanto massa corporis est minor: & si massarum ratio major, vel minor fuerit quam quæ distantiarum est, turbato æquilibrio, fiet motus ad partem illam, in quam majus momentum

tum tendet: scilicet æquilibrium turbabitur si aut ex parte una majus pondus ad datam distantiam, aut datum pondus ad majorem distantiam collocetur, aut si ex parte altera contrarium accidat. Posita etiam ratione illa fiet $P + p : p = BC : AB$, & distantia AB puncti A a loco prioris ponderis P habebitur distantiam duorum ponderum BC ducendo in pondus alterum p , & productum per summam ponderum dividendo. Punctum A , ex quo ad datam distantiam duo corpora suspendi debent ut componantur in æquilibrio, dicitur centrum gravitatis corporum P, p , atque universim centrum gravitatis dicitur punctum illud, ex quo si suspendantur corpora quæcumque utcumque inter se connexa in neutram partem inclinantur, & quiescunt, seu cujus puncti impedito motu motus etiam quicumque alius impeditur.

THEOREMA V.

Si plura corpora inflexilibus virgis inter se connexa suspendantur ex puncto aliquo, ad motum excitandum circa idem punctum suspensionis momentum idem exercebunt ac si omnia in centro communi gravitatis fuissent posita.

Virga inflexili BC , fig. 17., connectantur simul tria corpora B, M, C , & sit O centrum gravitatis duorum corporum B, M , iisque ex puncto O suspensis nullus motus haberi possit, virga autem omnis suspendatur ex puncto A . Per Coroll. II. Theorematis antecedentis momenta duorum corporum B, M ex puncto A suspensorum erunt $B. BA + M. MA = B. OA + BO + M. OA - MO$. Sed si O sit centrum gravitatis eorundem corporum juxta Coroll. III. Theor. IV. debebit esse $B. BO - M. MO = 0$. Iis ergo quantitatibus se destruentibus erit momentum omne $B. OA + M. OA = B + M. OA$, idem, scilicet, ac si duo simul corpora in centro gravitatis composita ad distantia OA suspenderentur ex puncto A . Hoc autem posito si tertium addatur corpus ad eandem partem, duobus corporibus B , & M , unicum corpus substitui poterit, quod duorum massam exæquet, & in centro gravitatis O collocetur: hoc autem, ac tertium corpus ad motum excitandum circa punctum suspensionis A momentum idem exercebunt ac si utrumque, hoc est si tria simul corpora pro-

Mechanica.

D

posita

posita in centro gravitatis fuissent posita: eademque semper ratione unicum corpus binis substituendo casus corporum quotcumque ad casum duorum, & unius tantum corporis reduci poterit.

COROLLARIA.

I. Si planum $B A a$, fig. 18., horizontaliter positum intelligatur, & corpora b, m, n &c. utcumque jacentia in plano ipso non nisi circa axem datum $A a$ inclinari possint, & commune centrum gravitatis sit O , ducaturque ad $A a$ perpendicularis BOA , & sint bB , oO , mM , nN &c. ad BA perpendiculares; momenta ponderum ad motum aliquem excitandum circa axem $A a$ eadem erunt, ac si pondera collocarentur in B, M, N &c.: eadem est enim in punctis singulis rectæ cujusvis bB , aut mM &c. ab axe $A a$ distantia. Pariter ob parallelas bB , oO &c. momenta eorundem ponderum in B, M, N &c. positorum ad planum omne circa rectam $O o$ inclinandum eadem erunt quæ antea, & adhuc circa centrum commune gravitatis O æquilibrium constituent. Cum igitur momenta ponderum B, M, N &c. eadem sint ac si omnia colligantur in centro O , pondera etiam quæcumque b, m, n &c. in horizontali plano disposita ad planum inclinandum circa axem positione datum perinde se habebunt ac si in centro gravitatis omnia constituerentur.

II. Quia vis, quæ juxta datam rectam exercetur, eundem semper effectum edit in quocumque demum rectæ ejusdem puncto in eadem directione applicari intelligatur, ut supra jam dictum est; si pondera quæcumque ex b, m, n &c. pendeant verticaliter, aut supra idem planum perpendiculariter insistant, ad planum omne circa axem $A a$ rotandum exercebunt momentum idem, ac si omnia in planum orthogonaliter projicerentur, & in b, m, n &c. essent posita: cumque & ponderum b, m, n &c., & B, M, N &c. eadem sit ratio; si proponantur quæcumque, & quotcumque corpora ita inter se connexa ut non nisi omnia simul moveri possint, ad motum circa axem quemlibet excitandum perinde se habebunt omnia ac si in communi gravitatis centro constituerentur. Inde vicissim colligetur motum corporum quorumcumque nullum esse posse circa axem quemlibet, quod per commune centrum gravitatis transeat: corporibus enim omnibus in centrum redactis, & evanescente distantia ab axe momentum

tum omne erit nullum, & singula momenta utrimque circa axem ipsum in adversas partes exercita æqualia erunt, ac simul omnia se destruent.

III. Hoc autem dato si in fig. 20. LH , AB sint binæ corporis diametri se ad angulum rectum secantes in centro gravitatis O , & ex particula quavis Q , aut q in planum duarum diametrorum ducantur perpendiculara QT , qt , & ex T , t in diametrum AB ducantur perpendiculara alia TR , tr , sitque elementum massæ dM , & $TR \cdot dM$ momentum particulæ cujuscvis Q ad corpus inclinandum circa axem AB ; imprimis ne corpore ex O suspenso ullus circa diametrum AB sit motus summa omnium $TR \cdot dM$ ex parte una æquari debeat summæ omnium $tr \cdot dM$ ex parte altera: & ne circa diametrum LH inclinetur corpus utrimque æquari debebunt summæ omnium $RO \cdot dM$, $ro \cdot dM$; ac pariter ne corpus ex LO verticaliter suspensum inclinetur circa diametrum AB , æquari debebunt summæ omnium $QT \cdot dM$, $qt \cdot dM$. Scilicet si fiat $RO = X$, $TR = Y$, $QT = Z$, summæque omnes & supra, & infra planum, quod per gravitatis centrum traducitur, accipiantur in toto corpore; habebuntur æquationes tres, quibus centrum idem corpore ad tres coordinatas orthogonales relato determinabitur, $S \cdot X \cdot dM = 0$, $S \cdot Y \cdot dM = 0$, $S \cdot Z \cdot dM = 0$.

PROBLEMA I.

Iisdem positis, & data æquatione corporis determinare centrum gravitatis.

In primis si proponatur planum bAb , fig. 19., per quod pondus uniformiter distribui intelligatur, & curva bA ad axem BA relata utrimque æqualiter se habeat; centrum gravitatis O manifeste erit in axe ipso. Ut prodeat ad quam a vertice A distantiam sit centrum O , intelligamus planum horizontaliter positum suspendi ex axe Aa semiordinatis Mm , Nn parallelo, & fiat $AN = x$, $Nn = y$, $MN = dx$, $mn = ds$. Erit zds curvæ pondus, & $xydx$ pondus totius plani, quod ad distantiam NA pendebit, & momentum prioris ponderis ad motum aliquem excitandum circa axem Aa erit $zx \cdot ds$, alterius vero $xyxds$: & quia per corollarium secundum theorematum antecedentis summa momentorum omnium est eadem ac si omnia pondera colligerentur in centro O , summis præfixa littera S designatis erit in

D 2

curvæ

curvæ perimetro $OA. 2s = S. 2x.ds$, & $OA = \frac{S.x.ds}{s}$ in plano

autem curvilineo erit $OA. S. ydx = S. yxdx$, & $OA = \frac{S.yxdx}{S.ydx}$

Deinde vero si proponatur solidum rotundum revolutione plani BbA circa axem genitum, & radius ad peripheriam se habeat ut $1:p$ erit $pyds$ elementum superficiæ curvilinæ, & $\frac{1}{2}py^2 dx$ elementum solidi propositi revolutione areæ $NnmM$ circa axem BA genitum, eritque momentum elementi illius quidem $pyxdx$, istius vero $\frac{1}{2}py^2 xdx$: & summam momentorum dividendo per summam ponderum erit distantia centri gravitatis OA ab axe dato Aa in superficie quidem curvilinea $\frac{S.yxdx}{S.yds}$, in solido autem rotundo $\frac{S.y^2 xdx}{S.y^2 dx}$

Quod si denique proponatur corpus aliud quodcumque, coque ad horizontalem axem Aa relato summa momentorum omnium dividatur per summam ponderum, habebitur distantia axis propositi a verticali plano, quod parallela ad Aa per gravitatis centrum O transeat: & si ducta ad aAF perpendiculari quavis FG , quæ pariter sit horizonti parallela, & erecta ex F verticali linea FH , simili modo ex FG , ac deinde ex FH suspendi intelligatur corpus, inquireturque duorum axium distantia a duobus planis, quæ in gravitatis centro se invicem, & prius illud planum fecent ad rectos angulos; trium planorum intersectione centrum gravitatis determinabitur.

COROLLARIA.

I. Si proponatur triangulum isoscele, & sit $BA = a$, $Bb = b$, $Nn = \frac{bx}{a}$, substitutione facta prodibit $OA = \frac{S.bx^2 dx}{a.S.bxdx} = \frac{S.x^2 dx}{S.xdx}$

cum autem juxta elementa integralis calculi summis omnibus acceptis esse debeat $S.x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$, $S.x dx = \frac{1}{2} x^2$, erit
etiam

etiam $OA = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}BA$. Si proponatur conus revolutione

trianguli ejusdem circa axem BA genitus, erit $OA = \frac{S.y^2 dx}{S.y^2 dx}$

$\frac{S.x' dx}{S.x^2 dx} = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}BA$. Si curva AbB sit parabola parametro

c descripta, & sit $y^2 = cx$, erit $\frac{S.y^2 dx}{S.y^2 dx} = \frac{S.x^{\frac{1}{2}} dx}{S.x^{\frac{1}{2}} dx}$, & cum sit

$S.x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, & $S.x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, erit distantia centri gra-

vitatis a vertice $\frac{3}{5}BA$; & si proponatur conois revolutione parabolæ

circa axem genitus, erit $OA = \frac{S.x^2 dx}{S.x dx} = \frac{2}{3}BA$. Exempla alia-

rum æquationum ad calculi exercitium comparare sibi poterunt tyrones, & quæ apud Lucam Valerium, ac veteres alios Geometras difficiliora erant problemata, inventis calculi differentialis symbolis, simili ratione a tyronibus facile resolvî poterunt.

II. In triangulo autem, & cono, & in solido alio quocumque circa diametrum quamlibet ductam per centrum gravitatis æqualia utrimque momenta ponderum disponentur, quod rursus exercitii loco tyrones in plano, aut solido quovis proposito singillatim demonstrare poterunt. At cum distantia centri gravitatis a recta quavis positione data determinetur summam momentorum dividendo per summam ponderum: hæc autem regula exinde colligatur quod pondera omnia ad corpus circa axem aliquam inclinandum perinde agant ac si omnia in gravitatis centro colligerentur: cumque hoc dato momentorum summa circa gravitatis centrum oppositione signorum, & productorum æqualitate in toto corpore destrui debeat, supervacaneum erit in assignato jam gravitatis centro idipsum quærere quo centrum determinatur.

natur. In planis, & solidis regularibus circa diametrum quamcumque per centrum gravitatis ductam non æqualia tantum momenta, verum etiam æqualia utrimque pondera disponentur, ut ex se patet.

III. Si figura quævis plana *bAb* circa axem *Aa* revolvi intelligatur, atque in figura ipsa gravitatis centrum sit *O*, ac posita radii ad peripheriam ratione 1: *p* sit *p*. *OA* peripheria circuli revolutione puncti *O* descripti; erit *p*. *OA*. $\int ydx$ productum peripheriæ ejusdem, & totius areæ *bAb*. Erit pariter *p**x* peripheria circuli, quæ eodem modo describetur a puncto quovis ordinatæ *mn*, atque erit *p**x*. $\int ydx$ annulus cylindricus, qui describetur revolutione elementi areæ propositæ: & cum summa annulorum omnium hujusmodi sit totum solidum revolutione eadem propositæ figuræ genitum, atque ex mox

dictis esse debeat $OA = \frac{S. \int yxdx}{S. \int ydx}$; erit etiam *p*. *OA*. $S. \int ydx$

$= S. \int pyxdx$, nimirum solidum revolutione planæ figuræ genitum æquale erit figuræ genitrici ductæ in viam centri gravitatis. Hoc celebre theorema est, quod cum aliqui a Pappo Alexandrino indicatum fuisse contendunt, revera primum pro annulis revolutione sectionis alicujus circularis, vel ellipticæ genitis traditum est a Keplero, ac deinde a Guldino generaliter propositum, probatumque quadam inductionis specie, ac denique ab Antonio Rocca Placentino ex Cavalieri nostri principis eadem fere ratione demonstratum, quam hoc in loco secuti sumus.

APPENDIX

DE

THEORIA MACHINARUM.

IN Coroll. II., & III. Theor. IV. bina illa explicavimus principia; quorum unum ex alio educitur, & quibus innititur theoria omnis machinarum, quod scilicet æquilibrium habeatur ubi vires sint in ratione reciproca distantiarum ab axe motus, sive etiam in ratione reciproca velocitatum, quæ circa datum axem possent utcumque con-

concipi. Ex principio utroque manifestum est cur in machinis omnibus potentia motrix ad distantiam tanto majorem a centro morus applicetur quanto majus pondus ex parte altera ad minorem distantiam elevari debet, sive quanto major resistentia superanda est. Ex altero autem principio colligitur etiam manifeste data potentie motricis velocitate tanto minore velocitate, & per spatium tanto minus attolli pondus, quanto pondus ipsum est majus, & tanto majorem potentiam requiri quo citius, & ad majorem altitudinem dato tempore pondus attolli debet: atque ita universim patet in machinis omnibus compendium virium cum dispendio temporis, & vice versa compendium temporis cum dispendio virium conjungi, ac machinarum applicatione non augeri quidem potentie quantitatem, ut perperam nonnulli censent, sed tanto majore tempore exerceri, atque ad agendum applicari potentiam quo minor est. Id recte jam Galileus monuit in suo de Mechanica tractatu, explicavitque exemplo situle, qua si e puteo data aque quantitas ad datam altitudinem educatur dato tempore, & data vi, quæ ad simplicem funem ductarium manu applicetur; nullo alio machinarum subsidio effici posse dixit ut major aque quantitas ad majorem altitudinem nisi aut majore tempore, aut majore vi educatur. Monuit etiam summus Mechanicæ restaurator machinarum applicatione illud commodi haberi tantum quod vis minor diuturnius agendo majori vi æquipollere possit, quod dara vis ad effectum datum facilius, & commodius possit applicari, quod hominum actionibus brutorum vires, elastorumque, & aquarum fluentium, & aeris etiam, atque ignis possint substitui.

Ut autem indicato jam opificio machinarum ad singularum recognitionem transeamus, machinæ omnes compositæ, quæ ad societatis commoda adhiberi solent, quæque, cum ab authoribus aliis describantur, singillatim recensere hoc in loco minime vacat, nonnisi quæ vetis, axis in peritrochii, trochleæ, cochleæ, & cunei habeant nomen varias combinationes exhibent quinque simplicium machinarum, ac quatuor hæ posteriores machinæ ad vetem possunt reduci. Vetis nomine generatim intelligitur virga rigida, & inflexilis, fulcro immobili innixa, in qua ad datam a fulcro distantiam pondus, quod elevari debet, & ad distantiam aliam potentia, quæ pondus elevat, applicatur.

tur. Triplex est autem in potentia, pondere, & fulcro combinatio-
num ratio: prima ut fulcrum A , quod centrum motus est, fig. 16,
medium statuatur inter pondus B , & potentiam C : altera ut pon-
dus sit medium potentiam inter, & fulcrum: tertia ut ponderi, &
fulcro potentia sit intermedia. Ad vestem primi generis pertinet ma-
china illa, quæ dicitur Ciconia, quaque rustici utuntur ad aquam
e puteis hauriendam cum trabem aliquam horizontalem BC cir-
ca C convertibilem trabe alia bifurca verticaliter in C sustinent, &
cum situlam ope funis ex B suspendunt, ex C vero majus aliquod pon-
dus, quo descendente situla elevetur. Secundi generis vestis est remus,
in quo aqua, cui palmula innitur, fulcri locum tenet, & pondus
promovendum in scalmio est, ubi navim remus impellit. Vestem ter-
tii generis in brachio habemus, dum pondus aliquod manu attol-
limus, & vestis fulcrum in nodo scapulæ est, ac muscoli elevato-
res potentie vicem referunt. In singulis hisce casibus si vestis gra-
vitate expers intelligatur, & potentia ad pondus majorem rationem ha-
beat quam ponderis distantia ad distantiam potentie a fulcro, poten-
tie momentum majus erit momento ponderis, & pondus potentia
proposita elevari poterit. Quod si etiam vestis pondus considerari
debeat, illud in centro gravitatis collectum juxta Theorema quin-
tum debet intelligi, arque ad potentiam, quæ in veste gravitatis ex-
perts requiri potest, ut pondus propositum elevetur, adjici debet po-
tentia, quæ ad vestis pondus elevandum requiritur.

Ad vestem primi generis pertinent etiam libra, & statera. In
libra aliis, aliisque apposisis æquipondiis, in statera vero unius æqui-
pondii beneficio omnium mercium ex brachio altero suspensorum
pondus exploratur, ut notum est. In libra si lances pondere æquales,
sint & inter se similes, non nisi æqualium utrimque ponderum æquili-
brium haberi poterit: & si axis transversus libræ BC ex superiore ali-
quo puncto O pendeat, fig. 21., libra utrumque mota, & punctis
 A , B , C ordine transeuntibus in a , b , c , momentum ponderis C ,
quod magis a verticali OC distat, erit majus, ac deorsum fe-
retur pondus, neque antea motus desinet, quam brachia in situm
horizontalem se se receperint. Si centrum motus esset A , motis ut-
rumque brachiis æqualibus æqualia pondera æqualem semper distan-
tiam

tiam haberent a verticali linea traducta per centrum *A*, & sub quacumque libræ inclinatione æquilibrium tueri posset. In statera illud commodi habetur quod majora etiam pondera unius æquipondii beneficio explorari possint, si ad tanto majorem a centro motus distantiam æquipondium removeatur quanto majus est pondus, quod ad datam distantiam ex minore brachio suspenditur. Ad id vero summa artificum diligentia in priore majoris brachii divisione opus erit ut æqualia distantiarum incrementa ex una parte æqualibus incrementis ponderum ex parte altera respondeant: neque enim si quis in stateræ divisione artificis error fuerit illico, ut in libra, inversione brachiorum potest detegi. In libra etiam illud habetur commodi quod absolutum mercis pondus *P* inveniri possit mediam proportionalem accipiendo inter pondus *M*, quod ex *C* ad æquilibrium suspenditur merce in *B* posita, & pondus *N*, quod merce in *C* translata suspendi debet ex puncto *B*: esset enim in primo casu $M : P = BA : BC$, & in casu altero $BA : BC = P : N$. Aliud stateræ genus alibi in usu est, in quo non amplius æquipondium, sed quod explorari debet pondus ad varias a centro motus distantias locari solet.

Velis secundi generis est axis in peritrochio, cylindrus scilicet ille, cui fune circumvoluto pondus, potentia vero applicatur ope scytaalæ, aut manubrii longioris, quod aut cylindro eidem, aut perimetro circumpositæ alicujus rotæ infixum sit. Quandoque machinæ hujus axis statuitur horizonti parallelus, ut cum aqua e puteis educitur: quandoque axis statuitur verticalis, ut cum ingentia pondera de uno in alium locum traduci debent: quandoque axi, aut cylindro horizontali rota amplior ad instar timpani conjungitur, intra cujus cavitatem homines deambulando rotam, atque axem vertunt, ut cum naves ex humiliore loco in altiore traducuntur. In priore casu axis in peritrochio appellari etiam solet fucula, ergata in casu altero, & geranium in tertio. Generatim vero cum ponderis distantia ab axe motus sit ipse radius cylindri, ex quo ope funis pondus suspenditur, æquilibrii limes habebitur cum potentia ad pondus se habeat ut radius cylindri ad radium scytaalæ, seu manubrii. Si vis *BD* ad radium *BA* oblique applicetur, fig. 22., ex *A* in *BD* demisso perpendicularo *AH*, erit *AH* distantia a centro motus, & momentum

Mechanica.

E

ejusdem

ejusdem vis erit $BD \cdot AH$: quod universim de obliquis quibusque viribus utcumque ad machinas applicatis debet intelligi. Perinde erit si completo rectangulo OK vis BD in binas alias BO , BK resolvatur, quarum altera BK juxta radii BA longitudinem agendo cum nihil ad radii motum circa centrum A conferat, erit $BO \cdot BA$ momentum totius vis, quæ perpendiculariter ad radium ipsum impenditur, cum-

que ob similitudinem triangulorum sit $BO = \frac{BD \cdot AH}{BA}$, erit mo-

mentum idem $BD \cdot AH$, atque idem radii motus habebitur si aut vis omnis BD oblique, aut vis tantum BO perpendiculariter in B applicari intelligatur.

¶ Ad valem pariter secundi generis rotæ dentatæ, & trochleæ reduci possunt, atque illæ etiam quamdam axis in peritrochio speciem referunt, in quo rota interior cylindri, exterior vero scytalæ, seu mapubrii locum teneat. In singulis igitur dentatis rotis, quæ æcem eundem habeant, ad limitem æquilibrii potentia erit ad pondus ut radius rotæ interioris ad radium exterioris : & si plures simul hujusmodi rotæ jungantur ut prioris rotæ exterioris dentes interioris alterius rotæ dentibus respondeant, & successive, eos quidem qui se invicem excipiunt dentes inter se æquari, eademque ferri celeritate necesse erit, a secunda autem rota interiore ad exteriorem aliam, & concentricam transseundo velocitas rursus augebitur in ratione simplici radiorum : atque in machinis omnibus hujus generis, quas passim apud artifices videmus, æquilibrii limes habebitur cum potentia, quæ ultimæ excipit rotæ applicetur, erit ad pondus, quod ex priore rota interiore pendeat, in ratione composita radiorum omnium interiorum ad exteriores. Ut, vero quæ circa diversos axes feruntur rotæ, & se altere concavæ, convexisque perimetri partibus excipiunt, ad motus translationem quidem non vero ad augmentum conferunt ; ita quæ circa centrum immobile volvuntur rotæ per totam peripheriam excavatæ, cum circumducto fune non nisi eadem velocitate potentiam, & pondus ad utrumque funis extremum moveri sinant, momentum potentie non augebunt, efficientque dumtaxat trochleæ omnes hujusmodi ut directio potentie pro opportunitate operis variari possit, eligatur.

z. 1. 1. tur-

turquæ illa quæ sit commodior. Ut si pondus ad insignem altitudinem elevari debeat, duarum trochlearum ope, ut in fig. 23., verticalis potentie directio in horizontalem BF converti poterit, prospicieturque trahentium securitati, & animantia etiam adhiberi ad trahendum poterunt.

Si trochleæ BLA , fig. 24., centrum C , ex quo pondus P pendet, sit mobile, & motu circa aliquod peripheriæ punctum A concepto; ope funis ductarii $TABR$ sursum trahi possit, potentia vero in R ultra trochleam aliam R , quæ centrum habeat immobile, applicetur; subtenfa BA in O bisecta, atque in RB productam demisso perpendicularo AE , habebitur vectis secundi generis, in quo pondus ad distantiam OA , potentia vero ad distantiam EA a centro A applicari intelligatur. Cum enim trochleæ R non nisi ad variationem directionis conferat, perinde se habebit potentia ac si juxta directionem BR ageret; atque ita semper disponetur machina, ut ponderis directio COD sit chordæ AB perpendicularis: secus enim si obliqua esset directio, resolutis viribus, motus aliquis fieret ex A in B , atque alta fieret trochleæ, & funis dispositio. Sunt autem similia triangula CAO , BAE ; atque est $OA : EA = CA : BA$. Itaque æquilibrii limes habebitur eum potentia erit ad pondus ut trochleæ mobilis radius ad subtenfam. Si plures simul hujusmodi trochleæ connectantur, ut fig. 25.; ita semper disponentur omnes, ut directiones TE , RA &c. sint perpendiculares subtenfis GI , EK &c. & potentia erit ad pondus in ratione composita radiorum omnium ad subtenfas: & si chordæ parallelæ sint inter se, & subtenfa quævis sit diameter, in singulis trochleis mobilibus potentie ejusdem momentum duplo augebitur, & si trochlearum numerus sit 1, 2, 3, 4 &c., potentie ejusdem momenta fiant ordine 2, 4, 8, 16 &c.

Ex simplici etiam velocitatum consideratione id ipsum colligetur, quod ex priore illo consequitur principio virium, distantiarumque a centro motus inter se reciproce proportionalium. Ut enim dato aliquo spatio pondus P elevetur, in hypothese funium parallelorum, tantundem spatii in A , & B superesse debet, atque ut funes omnes sint tensi, duplo magis puncta A , & D promoveri debent, & duplum utrimque spatium relinqui in E , & K , velocitatemque in H

F 2

esse

esse quadruplam, octuplam vero in *O*, & *F*. In iis pariter trochlearum combinationibus, quæ polyplastii habent nomen, & in quibus trochleæ inferiores mobiles sunt, superiores autem non nisi circa proprium centrum singulæ revolvi possunt, manifestum est, quod si funis ex centro superioris trochleæ ductus inferiori, & mobili trochleæ primum circumvolvatur, ut in fig. 26., elevato pondere dupla erit velocitas in *L*, & *E*, quadrupla in *D*, & *G*, ac deinde sextupla, atque ita posito quod trochlearum mobilium numerus sit 1, 2, 3, 4, 5 &c. erunt potentiae ejusdem momenta, & velocitates 2, 4, 6, 8, 10 &c. Quod si vero funis ex centro trochleæ inferioris ductus superiori primum circumvolvatur, ut in fig. 27., tripla erit velocitas in *R*, & *M*, quintupla in *I*, & *F*, eoque dato trochlearum mobilium numero momenta, & velocitates erunt ordine 3, 5, 7, 9 &c. In binis hisce trochlearum combinationibus verum est, quod generatim assumunt alii Mechanicæ scriptores, quodque in priore illa, fig. 25., combinatione falsum deprehenditur, ponderis momenta esse inverse ut numerus funium parallelorum, qui trochleis mobilibus circumvolvuntur, & quibus æqualiter partiri pondus intelligunt authores ipsi. Aliæ trochlearum combinationes, quæ passim apud artifices notæ sunt, quasque hoc in loco non vacat singulas recensere, manifeste ad tres illas polyplastii species reducuntur.

Veſtem alium secundi generis exhibet scytala, seu manubrium, quo cochlea interior circa exteriorem, & quiescentem cochleam revolvitur ut corpus aliquod comprimitur, aut eleveetur pondus quod ex prioris axe suspenſum ſit: & cum una cochleæ revolutione tantundem eleveetur, aut comprimitur corpus quantum est duarum helicum intervallum, potentia vero, quæ manubrio applicatur, peripheriam integram deferibat, æquilibrii limes habebitur cum potentia erit ad pondus ut duarum spirarum distantia ad peripheriam circuli, qui manubrium pro radio habeat. Quædam cochleæ species est quam perpetuam, ſive infinitam vocant, in qua ſcilicet quæ interior ad modum ſpiræ fulcata est cochlea rotam ſtellatam circumagit, quæ vicem gerit axis in peritrochio. Cochleam veluti cuneum a veſte impulſum conſideravit Newtonus in Coroll. II. Leg. III. In cuneo autem *ABC*, fig. 28., manifestum est quod ut latus findendi corporis

BC

BC spatio *BO* compressum transeat in *bc*, spatio *Bb* cuneus omnis promoveri debet, atque ob angulum *BOb* rectum erit ratio velocitatum *FC* : *BC*, & pro casu æquilibrii potentia ad resistantiam se habebit ut dimidia cunei basis ad latus, sive ut sinus dimidii anguli *ABC* ad sinum totum. Ad cuneum pertinent ascie, novaculae, secures, omne scalprorum genus, cultri, enses, clavi, pugiones &c. Cunei potissimum, & cochleæ adminiculo majores resistantiæ superari possent nisi in machinis hujusmodi major etiam frictio superanda esset, quæ scilicet resistantiæ species in asperis corporibus se contingentibus ex eo oritur quod cum cavitates unius corporis excipiant alterius eminentias, corpus unum supra alterum progredi non potest nisi eminentiis singulis abrasis, aut saltem depressis, ad id vero aliqua semper potentia totius portio requiritur.

Leibnitius, qui in Miscellaneis Berolinensibus frictionis, atque attritus leges considerare cœpit, duplicem casum distinxit superincessus radentis, ac volventis, quorum primus habetur cum eadem semper corporis facies superficiei, in qua incedit, objicitur, alter cum puncta contactus in moto corpore continue mutantur. Prior est casus parallelepipedo, alter rotæ supra planum aliquod incedentis: in priore autem resistantia, & frictionis vis multo major, paribus aliis circumstantiis, esse debet quam in secundo, cum superincessus radens haberi nequeat nisi quæ se invicem excipiunt asperitates in alterutro, aut in utroque etiam corpore frangantur, vel saltem incurvantur, nec rotationis motu elatiores corporis unius partes ex cavitatibus alterius possint emergere ut in volvente superincesso. Idcirco præstat cylindrorum axes rotis mobilibus potius quam orbi concavo imponere. Idcirco etiam in rotarum delectu, atque in curruum structura ampliores rotæ præstant minoribus, quod inæqualis soli cavitates minus profunde subeant, & minore vi trahi inde possint, quodque revolutionibus singulis, data eadem velocitate angulari, eademque circa axem frictione, rotæ ampliores per majorem perimetri longitudinem curru trahendo exteriorem frictionem, interioremque, quæ dato spatio respondet, minorem exhibeant. Alia etiam de causa Desaguliers, & Camus præstare jam admonuerant ut priores binæ curruum rotæ statuerentur posterioribus æquales, quod ita scilicet animantium vis

om-

omnis in horizontalem ponderis tractionem impenderetur, neque, ut in curribus nostris evenit, obliqua vi in binas alias resoluta, quæ verticalis pars est in elevandis rotis disperdi deberet.

Cunci, & cochleæ attritus, eum ad radentem superincessum spectet, major etiam sit ad se invicem fortius adactis binis superficiebus, eamque ob causam accidit quod quæ machinarum omnium maxime potentiarum momenta augeret cochlea multo minores plerumque effectus præster quam qui præfinito jam æquilibrîi limiti responderet. Ad id etiam accedit lævigationis in spiris, sulcisque difficultas: quæ eadem ratione in trochleis, ac rotis dentatis accidit ut in superincessu volente major quandoque attritus habeatur. In trochleis aliam resistentiæ speciem exhibet funium rigiditas, præcipue si rotarum minorum canaliculis exiipi, ac circumplicari debeant funes, & contracta humiditate turgescant. In rotis autem dentatis etiam si leves, ac teretes habeantur dentium superficies ut convexitatibus conoavitates accurate respondeant, humiditate, ac siccitate si rotæ lignæ sint, frigoris vero, ac caloris vi si sint ferreæ, efficietur ut diametro aucta, vel imminuta non amplius accurate sibi invicem respondere possint. Axis in peritrochio exigua frictio est si scytalæ longiores sint, & cylindrus non ita magnus, neque adeo crassi sint funes, quo in casu, major pars vis morticis ad funes crassiores circumplicandos impenderetur. In veste exiguæ superficiei, qua fulcrum tangitur, & circulari circa fulcrum motui exigua pariter respondet frictio: quæ eadem est libræ ratio. Ut vero minimæ poderum suspensorum differentię in libra perspicui possint summa diligentia curandum est ut axiculus, quo brachia, & lancee ex fulcro pendent, exterius, & annuli, quibus axiculus inseritur, interius sint lævigatissimi, & cautelis aliis est opus, quas antea memoravimus.

Qui abstractis quibusdam conjecturis ex natura corporum rigidorum, atque ex ratione, qua filamenta corporum distrahi, ac flecti possunt, de promptis generales frictionis leges colligere voluerunt Philosophi, Amontons, Parent, Bulfinger, alique leges quasdam exhibuerunt, quas institutis experimentis Mulschenbroeckius, alique copiose refutarunt: ut quod frictionis vis pro qualibet contactuum amplitudine sit proportionalis ponderibus comprimentibus tanquam si data pressio per

per ampliorem superficiem diffusa efficiat ut partes singulæ corporum se contingentium minus arcte se invicem excipiant, quam si pauciores partes eandem pressionem sustinerent: quod absoluta frictionis vis sit fere subtripla totius vis, qua superficies una perpendiculariter ad alteram adigitur, quodque idcirco scabrum corpus in scabro plano descendere amplius non possit: ubi planum ad horizontem inclinetur gradibus circiter novendecim, quo in casu pars ponderis, quæ juxta plani longitudinem exercetur, fere subtripla est totius ponderis: quod paribus aliis circumstantiis resistentia sit velocitati duorum corporum supra se invicem incedentium proportionalis, aut in minore potius ratione quam sit ratio velocitatum, tanquam si brevior tempore quæ in uno corpore magis elatæ sunt partes corporis alterius cavitates minus profunde possent pervadere. Eulerus etiam in appendice de motu corporum a frictione perturbato, quæ ad calcem eximii operis de Theoria motus corporum rigidorum legitur, Phænomeni cujusdam, atque hypotheseos loco assumpsit, frictionem neque a celeritate, neque a figura corporis, neque a magnitudine basis, qua corpus superficiem aliquam scabram, atque asperam contingit, pendere, sed esse pressionem tantum, qua corpus ad superficiem apprimitur, proportionalem: & posterius hujusmodi principium frictionis pressionem, & ponderi comprimenti proportionalis earum omnium formularum fundamentum est, quas D. Bossut in Sect. I. Cap. IV. Mechanicæ pro quantitate frictionis in machinis singulis supputanda exhibuit.

Verum quæ To. I. Physicæ experimentalis experimenta retulit Muschenbroeckius aliam frictionis, & ponderum comprimentium rationem esse indicant, & quæ nuper experimenta instituit D. Ximenes adeo ab illa ratione dissident ut in trochleis communibus frictionis vis quandoque quintam, & quandoque octavam tantum ponderum susceptorum partem exæquaverit. Nec satis etiam cum experimentis congruit ea regula, qua ad æstimandam vim resistentiæ ortam ex funium rigiditate utuntur authores illi, & qua rigiditatem statuunt ponderibus funes tendentibus, & funium diametris directæ, diametris autem trochlearum, quibus funes circumvolvuntur, reciproce proportionalem. Ut enim experimentum aliquod proferamus, cum trochleam diametri trium pollicum, & circa centrum mobilem adhibuisset Defa-

gu-

gulierius, eique funem circumplicasset diametri unius pollicis cum duabus tertiis, suspendissetque utrumque libras 800, deprehendit non nisi libris $436 \frac{2}{3}$ additis ex parte alterutra moveri funem cum ponderibus appensis, ut in nota tertia ad Lectionem tertiam Physicæ experimentalis videre est: cum vero trochleam diametri pollicum 24 adhibuisset deprehendit additis dumtaxat libris 45 æquilibrium turbari: unde erat ratio diametrorum trochleæ $1:8$; & $436 \frac{2}{3} : 45$, seu proxime $10 : 1$ ratio totius resistentiæ, quæ ob parem frictionis vim ex sola rigiditate funium oriri poterat. Qui etiam attente observet qua varietate minima filamenta, & partes singulæ funium, lignorum, ferri, aliorumque corporum disponantur, ex quibus machinæ parari possunt, facile intelliget nullam assumi posse generalem rationem aliquam, qua resistentiæ ex rigiditate funium, & asperitate corporum aliorum ortæ satis proxime definiantur. Idcirco physicis hinc resistentiæ notionibus analyticis formulas minime adjicimus, quibus assumpta hypothese aliqua resistentiæ singulares casus in machinis singulis determinentur, nec nisi instituto experimento in casu quovis proposito determinandum censemus quæ vis, ac potentiæ totius portio ad superandas resistentias impendi debeat antequam portionis residuæ momentum ad superandum momentum ponderis juxta alias antecedentes regulas impendatur.

CAPUT SECUNDUM.

DE RESISTENTIA

CORPORUM SOLIDORUM.

THEOREMA VI.

Momenta, quibus trabes uniformiter crassæ, & utcumque inclinatæ ad horizontem inflecti, & frangi possunt, sunt in ratione composita longitudinis trabium, & latitudinis, quam in horizontali linea intercipiunt: momenta vero, quæ ad everisionem fulcrorum exercentur, sunt ut productum latitudinis ejusdem, atque altitudinis, ad quam trabes eriguntur, multiplicatum per altitudinem fulcrorum, & per longitudinem trabium divisum.

Sit

Sit longitudo trabis BC , fig. 29., eaque angulo BCA inclinetur ad horizontem, & sit AC latitudo, quæ horizontali linea interceptitur, & AB altitudo, qua erigitur ad horizontem. Si pondus partis cujusvis D exprimatur verticali aliqua recta DE , & ex E in BC ducatur perpendicularum EF , vi ponderis DE , juxta corollarium primi Theorematis, binæ vires substitui poterunt, quarum una DF juxta longitudinem trabis tendet ex D in C , altera EF erit trabi perpendicularis: atque ob similitudinem triangulorum rectangulorum EDF , CBA tres vires DE , DF , EF proportionales erunt lateribus BC , BA , AC . Quod si igitur vis DE exprimatur unitate, erit in puncto quocumque D vis perpendicularis $\frac{AC}{BC}$, & summa virium per

trabis longitudinem erit AC . Patet autem vires omnes hujusmodi eodem modo ad trabem inflectendam agere, ac si trabe horizontaliter posita partis cujusvis pondus esset tantum EF , hoc est si pondera omnia EF juxta Theor. V. in centro gravitatis colligerentur: quod cum extremis punctis B , C trabis uniformiter crassæ ex æquo debeat interjacere, erit momentum ad fracturam trabis exercitum $\frac{1}{2} BC \cdot AC$.

Posita etiam $DE = 1$, erit $\frac{AB}{BC}$ vis quæ in puncto quocumque D tendet ex D in C , & summa omnium virium hujusmodi erit AB . Quod si igitur trabs in C verticali fulcro CH insistat, productaque BC in G , & ex G in CH demittatur perpendicularum GK ; vis AB juxta CG agendo resolvetur in binas alias, quarum una verticaliter dirigetur, altera horizontaliter, eritque vis verticalis $AB \cdot \frac{CK}{CG} = \frac{AB^2}{BC}$, horizontalis $AB \cdot \frac{GK}{CG} = \frac{AB \cdot AC}{BC}$, & momentum totius vis, quod ad fulcrum CH circa punctum H inclinandum exercebitur, erit $\frac{AB \cdot AC \cdot CH}{BC}$.

DE RESISTENTIA
COROLLARIA:

I. Data igitur longitudine trabis momentum ad fracturam exercitum augebitur in ratione simplicis cosinus anguli ad horizontem subtenſi, eademque teſti ejuſvis erit ratio, quod ex trabibus parallelis coaleſcat, & cum in teſtis etiam huiusmodi gravitatis centrum ad dimidiam longitudinem conſiſtat, ibi præcipue munimenta, quæ fracturam impediunt, ſupponenda erunt. Data vero latitudine trabis ad horizontem intercepta eadem urique manebit ſumma preſſionum, & virium trabi perpendicularium, quod jam monuerat Coupletus in Aſſis Pariſienſis Academiæ anni 1731, momentum autem virium proportionale erit trabis longitudini, atque ita teſtum altius erit debilius. Data etiam longitudine trabis ſumma omnium virium horizontaliter in fulcrum agentium erit in ratione compoſita ſinus, & cosinus anguli ad horizontem intercepti, & ſub angulo ſemirecto fiet maxima: & data latitudine virium ſumma erit ſinui ejuſdem anguli proportionalis, falſumque erit quod addidit citato in loco idem auctor altiora teſta minorem habere impulſionem horizontalem.

II. Si ſit KG , ſive HL latitudo fulcri, & teſtum omne puncto C incumbat, erit, $\frac{AB \cdot AC \cdot HL}{BC}$, momentum, quod ex viribus perpendicu-

laribus oriatur, quodque ex momento $\frac{AB \cdot AC \cdot CH}{BC}$ ſubducendum erit

ut habeatur reſiduum momentum, quo ex teſti impulſione fulcrum circa punctum L rotari, & everſi poſſet. Momentum aurem, quo fulcrum conſiſtet in loco ſuo, erit ut fulcri pondus ductum in dimidium latus HL , ſi duo alia latera HC , LT inter ſe parallela fuerint, & verticalia: univerſim autem erit momentum idem ut fulcri pondus ductum in diſtantiã dati exterioris puncti a reſta illa, quæ ex gravitatis centro perpendiculariter ad horizontem ducitur. Semper enim pondus omne in gravitatis centro O , fig. 30., collectum poteſt intelligi, ductaque verticali OP , & horizontali LP , viſ omnis quæ ex O in P tendet ad corpus circa L rotandum, inclinandumque perinde ſe habebit ac ſi ad brachium LP vectis circa punctum L mobilis perpendiculariter imprimeretur in puncto P .

III:

III. Universim etiam si pondus totius corporis vocetur M , & partes omnes inter se firmiter connexæ intelligantur, erit momentum ponderis $M.LP$, eoque corpus inferiori plano adhærebit si recta OP , quæ a gravitatis centro perpendiculariter ad horizontem ducitur, intra basim HL cadat, fiet autem momentum negativum, & subvertetur corpus si perpendiculum cadat extra basim, ut in fig. 31. Hac ratione intelliget tyro cur Bononiensis, & Pisana turris consistat, quod scilicet perpendiculum ex gravitatis centro demissum utrobique intra basim cadat, licet quod ex superiore angulo demittitur in Bononiensi turri, quæ altitudinis 130 pedum est, pedibus 9 a basi distet, pedibus vero 15 in Pisana turri, quæ est altitudinis pedum 138. Et illa quidem, cum ex stratis horizontalibus consistat, videtur arte, ut modo est, extructa anno 1110, hæc vero ab anno 1173 inchoata, cum ex stratis diversimode inclinatis confurgat, magis quidem ad basim, & minus ex superiore parte, videtur ob inæqualitatem soli confedisæ sæpius, & cum adhuc construeretur. Eandem centri gravitatis considerationem in motibus animantium habere locum singulari opere explicavit Borellus, quod adhuc meretur Physicis, ac Medicis commendari.

THEOREMA VII.

Vis, qua circularis annulus uniformiter crassus, & homogeneous dilatari usque ad fracturam potest, ad vim quam verticaliter sustinere possit si in rectam lineam extenderetur, se habet ut peripheria circuli ad radium.

Statuamus virgam ejusdem ubique diametri, atque ex eadem materia constitam disrumpi cum in sectione aliqua transversa spatio m partes singulæ a reliquis distrahuntur, atque in eadem virga ad circularis annuli formam curvata sit radius r , peripheria autem p . Erit

autem annuli sic dilatati radius $\frac{r}{p} \cdot \overline{p + m} = r + \frac{rm}{p}$, erit-

que $\frac{rm}{p}$ spatium, quod juxta directionem radii, & perpendiculariter ad annuli perimetrum vis ad fracturam exercita absolveret. In binis igitur casibus virgæ in lineam rectam extensæ, atque in annuli for-

nam curvatæ, erunt m , & $\frac{rm}{p}$, spatia percurſa a binis viribus, quæ ad

fracturam impendi poſſent, eritque velocitatum ratio $m : \frac{rm}{p} = p : r$;

& cum in utroque caſu æquales ſectiões a ſe invicem æqualiter ſejungi debeant, & momenta virium æqualiter diſtrahentium eſſe debeant inter ſe æqualia, exæquatis autem momentis velocitates debeant eſſe abſolutis viribus reciproce proportionales, viſ, quam eadem virga per totam peripheriam ſuſtinere poſſet ſi in circularis annuli formam incurvaretur, erit ad vim quam ſuſtinere poſſet ſi in lineam rectam extenſa eſſet, in ratione ſimplici peripheriæ ad radium.

COROLLARIA.

I. Habito igitur experimento ponderis, quod virga directe ſuſtinet, illico innotefcet cui vi par eſſe poſſit ſi ad fornices, aut tellurines quavis cingendas ad catenæ formam adhibearur. Hoc primum theoremate uſus eſt Parent in Actis Pariſienſis Academiæ anni 1707, cum preſſiones fluidorum in tubi alicujus cylindrici latera exercitas, & firmitatem laterum, ac craſſitiem ſupputare docuit. Eodem etiam theoremate ad catenarum Divi Petri tholum Romæ cingentium vim, ac firmitatem ſupputandam uſi ſunt tres celebres Mathematici, qui anno 1742 de eodem tholo muniendo ingeniōſe ediſſerunt. Ex ea, quam hic protulimus, demonſtrandi ratione ſimiliter poſſet colligi quod ſi catena polygōni alicujus regularis formam habeat, viſ quam perpendiculariter ad latus quodvis ſuſtinere poſſet, erit ad vim, qua directe juxta longitudinem radii traendo poſſet diſrumpi, ut perimenter polygōni ad radium.

II. Quia vires, quæ ad directam fracturam impendi debent, in corporibus homogeneis debent eſſe numero partium diſtrahendarum proportionales, atque in ſectiōnibus ſimilibus augeri debent in duplicata ratione diametrorum, ſi experimento innotefcat qua vi filum datæ craſſitiei diſrumpi poſſit, innotefcet etiam cui vi par eſſe poſſit filum aliud rotundum ex eadem materia uniformiter conſtatū, vim ſcilicet priorem augendo in ratione diametri duplicata, ac deinde in ratione ſimplici peripheriæ ad radium. Ita cum Muſſchenbroeckii experi-

perimento constet filum ferreum rotundum diametri $\frac{1}{16}$ pedis Rhena-
ni abrumpi verticaliter suspenso pondere 450 librarum Batavicarum,
quæ 600 circiter libras Romanas exæquant, vim catenæ inferioris in
D. Petri tholo laudati Mathematici librarum 2116571 supputarunt,
superioris 1763809. Ex eodem principio colligeretur unamquamque
ex tribus catenis Ecclesiæ majoris tholum Mediolani eiuentibus vim
cohæsis habere æqualem ponderi librarum Mediolanensium 164278,
& cum octagoni formam habeant non nisi libris 1131250 disrumpi posse.

III. Quod si autem consideremus ob aliquam inæqualitatem, obli-
quitatemque filamentorum, ex quibus corpora componuntur, quæque
non eadem directione singula, nec æqualiter resistunt divisioni, resi-
stentiam corporum in minore potius quam duplicata diametrorum rati-
one debere augeri, hic limes potius vis omnis, quæ ad fracturam
requiritur, quam mensura censeferi poterit. Ita cum apud Musschen-
broeckium essent ferreorum filorum sectiones 1, 2, 3, 4, pondera,
quæ ad directam fracturam adhibebantur, ordine erant libra-
rum 130, 230, 310, 450. At vero qui apud nos potissimum hu-
jusmodi catenis majorum ædificiorum firmitatem committunt Archi-
tecti, ii plane considerare debent sola etiam frigoris vi disrumpi ca-
tenas aliquando, ut mihi Augustæ Taurinorum anno 1750 videre
contigit, summosque Architectos ad firmitatem ædificiorum extrancis
hiscæ subsidiis uti noluisse.

THEOREMA VIII.

Momenta virium, quas in corporibus homogeneis cohæsis ad in-
flexionem lateralem objicit, sunt ut areæ sectionum, quæ a se invi-
cem disjungi debent, ductæ in distantiam centri gravitatis sectionum
a centro motus.

Proponatur corpus *CL*, fig. 32., cujus particulæ singulæ homo-
genæ sint, & uniformiter cohæreant inter se, & in quo vi aliqua late-
raliter impressa, & motu circa punctum aliquod *G* concepto sectiones
binæ in *GMKN* a contactu removeri debeant. Quia vis, qua particu-
læ singulæ cohærent inter se, æquatur ponderi, quo libere appenso
æqualis crassiusculi filum disrumpi posset, perinde cohærebit corpus, ac
si ab omni vi cohæsis soluto, & verticaliter erecto corpore pars
quævis sectionis *GMKN* pondere illo superimposito ad inferiorem fe-
ctio-

tionem adigeretur, aut si naturalis gravitas cujuscvis partis augeri intelligeretur in ea ratione, quam vis cohæſionis habet ad naturalem vim gravitatis. Hoc autem in casu ad motum circa punctum *G* excirandum perinde erit ac si gravitas aucta omnis, aut pondus omne superimpositum intelligeretur in centro gravitatis colligi, centrum vero in hypothesi gravitatis uniformiter auctæ idem erit, ac in hypothesi naturalis gravitatis. Itaque momentum virium erit ut summa ponderum, quæ vi cohæſionis æquiparantur, ducta in distantiam centri gravitatis sectionis a centro motus: & cum in corporibus homogeneis ponderum illorum summa sit numero partium cohærentium inter se, sive aræ *GMKN* proportionalis; in laterali quavis flexura cohæſionis momentum proportionale erit aræ sectionum, quæ a se invicem disjungi debent, ductæ in distantiam centri motus a centro gravitatis partium per totam amplitudinem sectionum uniformiter dispositarum.

COROLLARIA.

I. Primo igitur data sectionis aræ, & dato numero partium cohærentium inter se, si utcumque excavato corpore sectionis perimeter fiat amplior, augebitur distantia centri gravitatis a centro motus, & in flexione quavis laterali cohæſionis momentum fiet majus. Hoc est quod in Dial. II. de Mechanica, jam observaverat Galilæus, interiore cavitate in pennis avium, ossibus animantium, & plurium arborum ramis naturam majori firmitati, quæ data quantitate materiæ, & data cohæſionis vi haberi poterat, prospexisse. Alia Galilæi Theoremata ex principiis antecedentibus facile colliguntur, quod cum in corporibus similibus, & homogeneis directe frangendis resistentiæ, juxta Coroll. II. Theor. VII., sint in ratione diametrorum duplicata, massæ vero, ac pondera in ratione triplicata, aucta diametro pondus in majore ratione augebitur quam resistentia, & magnitudinis erit aliquis limes, ultra quem corpora pondere proprio dissolverentur. Idcirco fieri monuit Galilæus quod ponderosiora animantia aliquam ponderis sui partem in aqua amittendo securius moveantur, quod nullius generis corpora immense magna esse possint, quod exigua animantia ex maximis altitudinibus ruant innocue &c., atque hanc etiam rationem esse dixit, qua qui in exiguis archetypis effectus prodeunt ii non sint auctæ machinarum moli proportionales. II.

II. Resistentiæ, quas corpora homogenea, & similia, ut tabulæ, ac trabes parallelepipedæ ad flexuram lateralem objicient, erunt in triplicata ratione dianietrorum, eademque erit ratio ponderum, quibus ad æquales distantias ab inflexionis loco suspensis tabulæ, ac trabes horizontaliter positæ disrumpentur: quod aliud theorema jam primum a Galilæo traditum experimentis ab illustri Comite de Buffon institutis maxime conforme est: pondera enim, quibus tabulæ ligneæ longitudinis pedum 10. Parisiensium disrumpebantur, aliquando majora, & aliquando minora prodierunt, quam ferret triplicata laterum ratio, & differentiæ semper exiguæ erant. Erant scilicet quadratarum

Sectionum	Pondera ad fracturam adhibita	Pondera supputata
Latera pollicum	librarum Paris. 3612.	Ex cubo laterum.
4.	7125.	7055.
5.	11250.	11191.
6.	19475.	19358.
7.	27750.	28896.

Erant pariter in tabulis longitudinis pedum 12

Latera pollicum	Pondera media	Pondera supputata.
4.	2987½.	5835.
5.	6075.	10083.
6.	9100.	16011.
7.	16176.	23900.
8.	23450.	

III. Generatim vero pondera, quibus e medio suspensis tabulæ; aut trabes horizontaliter utrimque infixæ dirumpi possunt, erunt directe ut cubus lateris, & reciproce ut tabulæ, vel trabis longitudo. Experimenta vero a celeberrimo eodem Philosopho instituta minorem resistentiam exhibent, quam quæ dato sectionis transversæ latere longitudini inverse sumptæ responderet. Ita in tabulis ligneis sex pollicum crassitie erant

Longitudines pedum	Pondera lib.	Pondera supputata.
8.	15525.	16581.
9.	13150.	14739.
10.	11250.	13265.
11.	9100.	11054.
14.	7475.	9475.
16.	6362½.	8290½.

Defectum autem, qui in longioribus tabulis comparative major deprehenditur, inde oriri censeo, quod tremore aliquo excitato, qui

in

in longioribus tabulis sit major, filamenta aliqua dirumpi incipiant; atque ita quod ad fracturam primo impar erat pondus, continuata actione fiat par. Comes clarissimus de Buffon cum instituto calculo binas simul regulas composuisset, quas hic placuit sejungere, & quæ directam cubi laterum, & quæ reciprocam longitudinem rationem respicit, Galileæanum theorema experimentis satis conforme judicaverat.

IV. Si instituto semel experimento innoteſcat quo pondere appenso frangatur regulus ligneus uniformiter crassus binis fulcris utrumque impositus, qui a loco appensi ponderis ex æquo distant; supputari poterit cui ponderi ferendo pares sint trabes ejusdem formæ, & materiei, pondus scilicet, quod ex medio suspendi potest, augendo in ratione diametri triplicata, minuendoque in ratione simplici longitudinis. Patet autem ex Theor. V., & VI. pondus illud, quod per totam longitudinem trabis horizontalis uniformiter distribui potest, duplum esse, quam quod ex medio ad fracturam potest suspendi. Nam si trabe *BC* in *O* bisecta, fig. 33., pondus *OB* in *B*, & pondus *OC* in *C* ad fracturam impendi intelligatur, pondus utrumque perinde aget ac si in centro gravitatis collectum ad dimidiam distantiam *OB*, aut *OC* suspenderetur, & duplo majus debet esse, quam quod ex *O* debet suspendi. Ita igitur universim poterit supputari quæ trabium, tabularum, & tabulati cujuslibet sit vis ad suslinenda pondera uniformiter per totam amplitudinem distributa: seu potius ita eruetur limes ad quem usque minime pertinger pondus ad tabulati fracturam sufficiens: vere enim pondera, quæ ad fracturam sufficiunt, cæteris paribus, augentur in minore ratione quam sit ratio reciproca longitudinis, ut in corollario antecedente notatum est. Hæc Architectis usui esse poterunt. Tyronibus Geometris celebria quædam theoremata commemoranda hoc in loco, ac breviter recensenda sunt.

THEOREMA IX.

Si parabola exterior *LIB*, fig. 34., ad tangentem *BL* in vertice *L* relata parallele ad se ipsam feratur, gignetur cuneus, cujus basi *LB* *BDH* horizontaliter posita in singulis sectionibus verticalibus idem habeatur resistentiæ momentum relate ad momentum ponderis inde usque ad apicem *LH* suspensi: & si parabola eadem circa tangentem *LB* revolvatur, gignetur solidum rotundum, quod pariter resistentiam ubique eandem præferet axe horizontaliter constituto. Si

Si cunei parabolici rectangulo LD insistentis latitudo sit LH , & parabolæ IL parameter sit unitas, ac posita $ML = y$, $MN = x$ sit $x = y^2$; juxta Theor. VIII., in sectione quavis verticali $MNGK$ erit resistentiæ momentum $\frac{1}{2}x \cdot LH$. Distantia vero centri gravitatis a vertex L juxta Probl. I. habebitur summam momentorum omnium $Sxydy = Sy^2 dy = \frac{1}{2}y^2$ dividendo per summam ponderum areæ parabolice LNM respondentium: quæ area cum sit $\frac{1}{2}xy$, sive $\frac{1}{2}y^3$, ut ex elementari Geometria notum est, erit distantia centri gravitatis a vertex $\frac{1}{2}y$, & distantia a sectione $MNGK$ erit $\frac{1}{2}y$. Cum igitur solidum omne $LMGH$ sit $\frac{1}{2}xy \cdot LH$, erit momentum ponderis totius ad sectionem eandem relati $\frac{1}{2}xy^2 \cdot LH = \frac{1}{2}x^2 \cdot LH$: cujus cum ad momentum resistentiæ constans sit ratio, cuneus hujusmodi parabolicus, sectione BC verticaliter, & basi LD horizontaliter posita, in sectionibus aliis parallelis ubique eandem resistentiam præferet.

Quod si proponatur solidum rotundum revolutione parabolæ ejusdem circa tangentem, veluti circa axem genitum, axe LB horizontaliter posito, fig. 35., in sectione quavis NMa resistentiæ momentum erit ut area circuli in M secti ducta in distantiam centri gravitatis circuli a motus centro n , seu posito radio ad peripheriam ut $1 : p$, & manentibus aliis denominationibus præcedentibus, erit resistentiæ momentum $\frac{1}{2}px^2$. Est autem solidum omne $S \frac{1}{2}px^2 dy = S \frac{1}{2}py^2 dy = \frac{1}{10}py^2$: momentum solidi ad verticem L relati $S \frac{1}{2}py^2 dy = \frac{1}{10}py^2$: distantia centri gravitatis a vertex $\frac{1}{2}y$, distantia vero a sectione Nn est $\frac{1}{2}y$, adeoque momentum ponderis ad sectionem ipsam relati est $\frac{1}{2}py^2 = \frac{1}{2}px^2$. Adhuc igitur in hoc solido data, & constans erit momenti utriusque ratio, & solidum ubique æqualiter proprio ponderi resistet.

COROLLARIUM.

Si proponatur parabola LNT ad axem LB relata, fig. 36., resistentiæ momentum in BT , & MN erit in duplicata semiordinatarum earundem ratione, sive in ratione simplici abscissarum LB , LM : quæ pariter erit ratio momenti datæ cujuslibet potentie, quæ in L applicetur, referaturque ad centrum motus B , vel M . Erit etiam area parabolæ $LNM = \frac{1}{2}ML \cdot MN$, & juxta Coroll. I. Probl. I.

Mechanica.

G

di-

distancia centri gravitatis parabolæ a semiordinata MN debet esse $\frac{1}{2} ML$, & momentum areæ ad MN relatæ erit $\frac{1}{2} ML \cdot MN$, adeoque non erit resistentiæ momento $\frac{1}{2} MN^2$ proportionale. Quod si igitur parabola parallele ad se ipsam mota cuneus alius parabolicus $LBCH$ gignatur, basi LD horizontaliter constituta, in sectionibus singulis verticalibus idem resistentiæ momentum non quidem relate ad momentum ponderis habebitur, sed relate ad momentum vis, quæ in apice LH applicari intelligatur. Postremum hoc dumtaxat asseruit Galilæus ad calcem dialogi secundi: & nescio cur Blondellus; & Marchettus Galilæi theorema ad priorem sensum traducendo erroris infimularint. Vivianus, & Grandus, cum neque ipsi expressum theorematism sensum assecuti essent, solida alia proposuerunt, quorum bases aut parabolicæ essent, aut hyperbolicæ, aut logarithmicæ, & quæ ubique resistentiam eandem ponderi objicerent. Cunei parabolici, & solidi rotundi æque resistentis speciem, quam in hoc theoremate explicavimus, proposuit primum Leibnitiuss in adis Lipsiensibus anni 1684. Ibi etiam animadvertit, quod cum solidum omne NmL , fig. 37., revolutione Logarithmicæ NL circa axem Mm genitum, proportionale sit areæ circuli in M secti, ut etiam in Coroll. II. Probl. LXIII., & in Coroll. V. Probl. CXVIII. Algebræ dictum est, axe verticaliter erecto ubique æqualiter resister directæ divisioni. Ab his ad alia Architecturæ problemata redeamus.

PROBLEMA II

Iisdem positis, quæ antea, trabeationum eandem semper firmitatem, & consistentiam servantium altitudines, latitudines, & longitudo inter se comparare.

Sit trabeationis unius altitudo A , latitudo B , longitudo C , atque in trabeatione altera dimensiones hujusmodi sint ordine a, b, c , & sit materiæ quantitas in priore quidem ABC , atque in hac altera abc . Si trabeationem utramque horizontaliter dispositam ab extremis sectionibus verticalibus proprio pondere disjungi, atque in medio inspecti posse intelligamus, erunt momenta ponderum ad sectiones ipsas relata $\frac{1}{2} ABC$, $\frac{1}{2} abc$, & momenta resistentiarum erunt $\frac{1}{2} A^2 B$, $\frac{1}{2} a^2 b$, ut ex Theor. VIII. manifestum est. Ut igitur momenta ponderum, & resistentiarum rationem eandem inter se utrobique habeant debe-

debebit esse $ABC : AB = abc : a'b'$, adeoque etiam $C : c = A : a$, hoc est altitudines trabeationum debebunt esse intercolumniorum quadratis proportionales. At vero trabeationum latitudines B, b sunt ipsæ diametri columnarum, quibus insunt, atque ad eandem semper servandam operis firmitatem manifestum est quod pondera superimposita augeri possunt in ratione simplici basium, sive in ratione duplicata diametrorum. Quod si igitur columnarum diametri sint D, d , ut eadem in binis trabeationibus firmitas obtineatur debebit esse $ABC : abc = ADC : adc = D^3 : d^3$, adeoque etiam $D : d = AC : ac = C : c = A \cdot \sqrt{A} : a \cdot \sqrt{a}$, & $C : c = D^{\frac{2}{3}} : d^{\frac{2}{3}}$, ac pariter $A : a = D^{\frac{2}{3}} : d^{\frac{2}{3}}$, hoc est intercolumnia debebunt esse radicibus cubicis diametrorum proportionalia, atque altitudines trabeationum proportionales radicibus cubicis quadratorum, quæ ex columnarum diametris habentur.

COROLLARIA.

I. Si proponantur trabeationes, & columnæ diversi Ordinis, Dorici, Jonici, Corinthii, & differentię epistylī, zophori, & coronæ in singulis trabeationibus cum sint exigue ad ornatum potius pertinere intelligantur, atque ubique assumantur pondera productis altitudinis, longitudinis, & latitudinis, sectiones autem verticales productis latitudinis, atque altitudinis proportionales, & data trabeationis unius firmitate inquiretur quibus dimensionibus æqualis firmitas in trabeatione altera haberi possit, intercolumnia assumenda erunt in ratione subtriplicata diametri columnarum cujusque ordinis, & altitudines trabeationum in diametrorum ratione duplicata simul, & subtriplicata, sive ut vocant subsequeuplicata, quod primo a Comite Jacobo Riccato propositum theorema est: & non ad firmitatum æqualitatem, sed ad quandam elegantię, atque curiſum ratiōem pertinere debet intelligi, quod in unoquoque ordine præscripserat Vignola, ut columnarum diametri, & trabeationum altitudines proportionaliter augeantur, & altitudo trabeationis cujusvis sit quarta pars altitudinis totius columnæ, ex basi, scapo, & capitulo compositæ.

II. Si altitudines columnarum æqualis diametri in ordine Tuscano, Dorico, Jonico, & Corinthio, ac Composito respective assuman-

tur diametrorum 7, 8, 9, 10, quæ communis apud Architectos est ordinis cujusque ratio, ad æqualem cujusque ordinis firmitatem latitudines intercolumnii juxta primum antecedens theorema debebunt esse. In Ordine Tuscano, Dorico, Ionico, Corinthio, ac Composito.

$$\frac{1}{7^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{1}{8^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}}.$$

proxime

$$\frac{1}{2 - \frac{1}{12}}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{12}}, \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{10}}.$$

seu potius

$$\frac{1}{23}, \quad \frac{1}{24}, \quad \frac{1}{25}, \quad \frac{1}{26}.$$

Quare si in ordine intercolumnii latitudo assumatur semidiametrorum $4\frac{1}{2}$, in ordine Corinthio, ac Composito sufficere quod latitudo sit semidiametrorum $4\frac{1}{2}$, atque in ordine Dorico debet esse $4\frac{1}{2}$, & fere 5 in Tuscano. Intercolumnii latitudinem ordinis Corinthio majorem quam Dorico tribui ea tantum ratione dixit Vignola ut coronæ Corinthiæ moduli ex æquo distributi columnarum axi respondeant: majorem autem tribui Dorico ordini quam Tuscano ad multo majorem postremi hujus ordinis firmitatem.

III. In unoquoque etiam ordine ad æqualem firmitatem altitudo trabecationis juxta theorema alterum debet esse

In Ordine Tuscano, Dorico, Ionico, Corinthio, ac Composito.

$$\frac{1}{49^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{1}{64^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{1}{81^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{1}{100^{\frac{1}{2}}}.$$

proxime

$$\frac{1}{4 - \frac{1}{4}}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4 + \frac{1}{4}}, \quad \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}.$$

sive etiam

$$\frac{2}{7}, \quad \frac{2}{8}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{2}{10}.$$

Itaque si in ordine Dorico altitudo trabecationis statuatur pars quarta altitudinis columnæ, ex basi, scapo, & capitulo compositæ, ut dictum est, in ordine Corinthio ad habendam æqualem firmitatem quinta pars circiter statuenda erit: atque ad æqualis firmitatis, & consistentiæ casum propius accedet, qui duos diametros columnæ in quovis ordine trabecationis altitudini assignare volet. Ita igitur si dimensiones

mentiones cujusque ordinis ob oculos ponantur, quas ex nobilioribus ædificiis collegerat Vignola, & qua communiter uti solent nostri Architecti, juxta regulas antecedentes facile dignoscetur quid ad æqualis firmitatis casum, & quid ad venustatem tantum, atque, ut vocant, eurhythmiam pertineat.

APPENDIX.

DE ARCHITECTURÆ
RATIONIBUS, ET ORDINIBUS.

SI columnæ semidiameter in unoquoque ordine accipiatur pro unitate, dimensiones majorum partium, membrorumque, quas Author idem diversimode exhibuit, ita in unicam tabulam possunt conjici.

Altitudines Ordinis.		Tuscani.	Dorici.	Jonici.	Corinthii,	& Compositi.
Stylobata.	Basis, bassamento.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{5}{6}$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{2}{3}$.	$\frac{2}{3}$.
	Truncus, fusto.	$3\frac{1}{2}$.	4.	5.	$5\frac{1}{2}$.	$5\frac{1}{2}$.
Piedestallo.	Cymatium, cimasa.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{7}{8}$.	$\frac{7}{8}$.
		$\frac{2}{3}$.	$\frac{2}{3}$.	$\frac{2}{3}$.	$\frac{2}{3}$.	$\frac{2}{3}$.
Columna.	Altitudo omnis.	$4\frac{3}{4}$.	$5\frac{1}{4}$.	6.	7.	7.
	Latitudo trunci.	$2\frac{1}{4}$.	$2\frac{1}{4}$.	$2\frac{1}{4}$.	$2\frac{1}{4}$.	$2\frac{1}{4}$.
	Basis, base.	1.	1.	1.	1.	1.
	Scapus, fusto.	12.	14.	$16\frac{1}{2}$.	$16\frac{1}{2}$.	$16\frac{1}{2}$.
	Capitulum, capitello.	1.	1.	$\frac{3}{4}$.	$2\frac{1}{4}$.	$2\frac{1}{4}$.
	Altitudo omnis.	14.	16.	18.	20.	20.
Trabeatio.	Diameter superior.	$1\frac{3}{4}$.	$1\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$.
	Epistylum, architrave.	1.	1.	$1\frac{1}{4}$.	$1\frac{1}{4}$.	$1\frac{1}{4}$.
Cornicione.	Zophorus, fregio.	$1\frac{1}{4}$.	$1\frac{1}{4}$.	$1\frac{1}{4}$.	$1\frac{1}{4}$.	$1\frac{1}{4}$.
	Corona, Cornice.	$1\frac{1}{4}$.	$1\frac{1}{4}$.	$1\frac{1}{4}$.	2.	2.
Stylobata arcubus supposita.	Altitudo omnis.	$3\frac{1}{4}$.	4.	$4\frac{1}{2}$.	5.	5.
		$4\frac{1}{4}$.	$5\frac{1}{4}$.	$4\frac{1}{4}$.	$4\frac{1}{4}$.	$4\frac{1}{4}$.
Latitudo intercolumnii sine stylobata.		13.	14.	17.	18.	18.
Altitudo arcuum sine stylobata.		$17\frac{1}{4}$.	20.	22.	25.	25.
Latitudo autem arcuum in utroque casu assumitur altitudinis totius dimidia.						

Vitruvius Cap. I. Lib. II., & Cap. I. Lib. IV. de Architectura distincte exposuit quibus gradibus, & quo ordine a silvestri vita homines ad hanc ædificandi formam, ad hunc omnem ædium splendorem, ad hanc partium distributionem, rationem, & symmetriam pervenerint. Animadvertit enim silvestribus etiam hominibus obvia, & facilia admodum fuisse priora illa ad imbres, æstusque arcendos, parandamque socialem vitam adminicula: ut scilicet sibi primum ex frondibus tecta compararent, mox luto, ac luteis glebis arefactis regerent, fastisque fastigiis, & proclinatoris tectis stillicidia deducerent, subinde vero parietes etiam erectis furcis, & interpositis virgultis, aut cæsis, & intextis arboribus, & luto undique inducto struerent. Sic vetus Romuli casa in capitolio stramentis tecta erat, & ad antiquitatis memoriam Areopagus Athenis adhuc Vitruvii temporibus luto obtegebatur, & apud barbaras, incultasque nationes similis ædificandi erat ratio: sic apud Colchos in Ponto propter silvarum abundantiam adhuc tunc temporis arboribus perpetuis, & transversis trabibus parietes structæ erant schidiis, ac luto interposito, & tecta pariter luto, & frondibus ad testudinis formam obtegebantur. Cum autem quotidie faciendo tritiores manus ad ædificandum perfecissent veteres homines, & qui acriore erant ingenio paulatim ad artes pervenissent, non casas, sed domos etiam fundatas, ac solidiore laterum, & lapidum materia, ac regulis tectas perficere cœperunt, ac longa studiorum observatione certas statuerunt partium omnium rationes, ac symmetrias.

At vero in lapideis, ac marmoreis ædificationibus artifices non omnino ab ædium priorum forma, atque ab arborum, virgultorumque similitudine recesserunt. Ut enim monuit Vitruvius Cap. II. Lib. IV., metopæ, ac triglyphi exhibent tignorum, & asserum præcisiones: mutuli sub coronis exhibent projecturas trabium, & cantheriorum: trabeatio omnis non nisi trabes transversas refert: quæ vero aut per totam longitudinem, aut per duas tertias partes superius diametro imminui solent columnæ, hac ipsa imminutione ad formam arborum videntur propius accedere; & diversæ trabium, atque arborum dimensiones, quæ ad plura tabulata ordine sustinenda adhiberi possunt, excogitandis diversis Architecturæ

or-

ordinibus; ac rationibus occasionem videntur suppeditasse. Huc etiam pertinet quod Vitruvius monuerat initio prioris libri, post Caryæ populos a Græcis devictos Architectos Græcos in publicis ædificiis Caryatum imagines ad onera ferenda designasse: & Persis Platæo prælio devictis Lacones Porticum erexisse ad trophæi speciem, & statuas Persicas ad sustinenda epistylia, & tecta collocavisse. Cum igitur arboribus, ac trabibus primum Caryatides, ac Persicæ, atque his deinde in Architecturæ progressu columnæ substitui cœperunt, videtur arbores primum, ac deinde ipsum humanum corpus imagines, ac formas, quæ ab Architectis imitarentur, suppeditasse.

Capite autem primo libri quarti Vitruvius expresse tradidit quod cum certam ædium formam, ac varios ordines Græci in Europa, atque in Asia statuere cœpissent, præcipuas rationes ordinum ex humano corpore desumpserunt. Nam primo quidem templum illud quod Dorus Achajæ Rex Junoni Argis ædificavit, fortuito ejus generis, ac formæ proditisse dixit, quam idcirco Doricam appellantur, quæque ignotis adhuc symmetriarum rationibus aliorum templorum norma in aliis Achajæ civitatibus facta est: ac cum deinde colonis in Joniam ductis Græci templum Apollini ædificassent, & in nova æde voluissent columnas collocare, subdidit author idem quod non habentes symmetrias earum, quærentes quibus rationibus efficere possent, uti & ad onus ferendum essent idoneæ, & in aspectu probatam haberent venustatem, dimensi sunt virilis pedis vestigium, & cum invenissent pedem sextam partem esse altitudinis in homine, ita in columnam transtulerunt, atque ita Dorica columna virilis corporis proportionem, & firmitatem, & venustatem in ædificiis præstare cœpit. Adjecit etiam quod postea Dianæ constituere ædem quærentes, novi generis speciem, isdem vestigiis, ad muliebrem transtulerunt gracilitatem, & fecerunt primum columnæ crassitudinem altitudinis octava parte, & basi spiram supposuerunt pro calceo, capitulo volutas uti capillamento concrispatos cincinnos dextera, & sinistra collocaverunt: quod genus ædificandi Ionicum est nominatum. Ac denique monuit Vitruvius tertium genus, quod Corinthium dicitur, virginis habere gracilitatis imitationem, memoravitque quo casu Callimachus capitulum Corinthium excogitaverit, duplici foliorum ordine, ac cauliculis,

lis, & volutis ad extremos angulos procurentibus ornatum; atque altitudine diametro columnæ æquale.

Priorem Dorici ordinis rationem Etrusci veteres retinuerunt. Posteriores vero Architecti, ut ait Vitruvius, elegancia, subtilitateque judiciorum progressi, gracilioribus modulis delectati septem crassitudinis diametros in altitudinem columnæ Doricæ, Ionicæ octo semis constituerunt. Romani etiam Architecti aliam Corinthio ordini formam capituli addiderunt, quæ quod & Jonici ordinis evolutas, & Corinthii folia, ac cauliculos simul jungeret, composita dicta est. Hinc quinque ordines prodierunt Tuscanus, Doricus, Ionicus, Corinthius, Compositus. Compositi vero, & Corinthii non nisi in capituli forma, & baseos projectura discrimen est. Tuscanus quod trabeationis, stylobatæ, columnæ altitudinem præ diametro minorem habeat, veluti robustior quædam Dorici ordinis species a quibusdam spectari solet. Singularis illa ædificandi ratio quam primo Gothi Ravennæ, & Saraceni Granatæ Hispali, & Toleti secuti sunt, & cui Germani potissimum Architecti acutos arcus decimo tertio sæculo addiderunt, cum adeo visui sit inelegans, atque a regulari forma intercolumnii, columnæ, baseos, & capituli penitus recedat, aliis architecturæ ordinibus minime meretur adjici. Ordinum vero aliorum formam patet ex consideratione humani corporis fuisse primitus derivatam, quod cum præcipue ob oculos verferetur, & ad quod alia omnia cum passim referri soleant, tanquam præcipuum omnium objectum in Architectura moduli loco acceptum fuit: cumque in hujusmodi consideratione tria potissimum occurrerent, hominis firmitas, mulieris dignitas, & virginis elegancia, tres ordines analogi ab Architectis excogitati, Doricus, Ionicus, Corinthius, ac selectis semper speciebus excelsioribus, quæ maxime ex edito loco, atque e longinquo spectari possent, altitudini totius columnæ Doricæ ex basi, trunco, & capitulo compositæ octo diametri, novem Ionicæ, Corinthiæ decem assignatæ sunt. Albertus rationem illam columnæ Doricæ inde erutam fuisse censuit quod altitudo humani corporis sexies circiter sit major latitudine, quæ ad renes est, ac decies major diametro altera quæ per umbilicum traduci potest, & semisumma accepta sit altitudo latitudinis mediocris fere octupla.

Hiscæ

Hæc igitur omnibus rationibus ab humano corpore ad compagem ædificiorum, quæ columnis præcipue efficitur, translatis patet cur altitudo totius columnæ præ diametro nec decupla major, nec octupla aut septupla minor citra deformitatem assumi possit, cur ultra decuplam quædam gracilitatis species se se offerat, atque infra septimam crassior, & invenustior habeatur forma ædificii, cur veluti extremæ formæ statutz sint quæ hominem, & virginem referunt, media quæ mulierem: & cum quæ a veteribus excogitata fuerunt capitula maxime videantur iis dimensionibus accomodata, simplicius quod ad Doricam, nobilius quod ad Ionicam, elegantius quod ad Corinthiam columnam pertinet; intelligitur cur triplex tantum rectæ ædificandi sit ratio, non nisi tres Architecturæ ordines statui possint, Doricus, Jonicus, & Corinthius, quorum prior si aucta columnæ diametro, aut imminuta altitudine adhuc firmior, & dempro aliquo baseos, & capituli membro simplicior evadat, in Tuscanum ordinem degenerat. Quod vero ex generalibus hæc principii colligitur analogiæ, aut etiam consuetudinis objectorum omnium cum humano corpore comparandorum, non satis videretur ex Staticis aliis, Acusticis, aut Arithmeticis principii colligi, cur scilicet intra hos limites Architectura omnis consistat. Qui enim considerationes alias in medium proferunt, quod adeo simplex sit ratio numerorum 8, 9, 10, quod harmonice proportionales sint numeri $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, quod consonent inter se chordæ musicæ, quarum longitudines sint inter se ut numeri 8, 9, 10; ii nunquam explicabunt cur nulla alia simplicior, ut dupla, & subdupla ratio, nulli alii termini harmonicæ seriei 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ &c, nullæ aliæ analogiæ chordarum jocunde consonantium, ut quæ octavam, aut alium aliquem tonum referunt, aliis columnarum rationibus, atque Architecturæ ordinibus exhiberi possint. Quod igitur in Mechanicæ Dialogis primum monuerat Galilæus rationes simpliciores auditui simul, ac visui magis jocundas esse, quod Comes Riccatus addidit de trium Ordinum ad tonos, ac modos musicos relatione, quod generatim differuit Perrault de harmonia earundem ordinum, alia hujus generis quamplura, cum recte, & acute etiam sint dicta, nihil ad solutionem problematis illius faciunt, quo inquiritur cur altitudinis columnæ ad diametrum ratio nec decupla major, nec minor octupla, aut septupla citra deformitatem constitui possit.

Mechanica.

H

Ad

Ad Staticam autem quod pertinet, cum diu inquisissem quæ ad Architectorum normam subsidia inde depromi possent, & singillatim etiam in hoc capite exposuissem quæ circa resistantiam, ac firmitatem trabium, & catenarum, fulcrorumque, ac rectorum præcipua videbatur theoremata; nihil ad varias illas rationes ordinum pertinsens ex Staticis principis collegi hæcenus quam quod in posteriore problemate notatum est de altitudine trabeationis, & latitudine intercolumnii in diversis ordinibus, & æque firmis. Neque etiam hujusmodi quæstio magis illustrari posset iis formulis, quibus Eulerus in Actis Berolinensibus anni 1657, atque in posterioribus Academiæ Petropolitane voluminibus determinavit qua ratione, & qua vi columnæ verticales inflecti possint, & cui ponderi ferendo sint pares: quod argumentum ingeniose excolendo D. la Grange To. V. Academiæ Taurinensis ostendit in columnis cylindricis firmitatem omnium maximam haberi. Manifeste vero ad majorem operis firmitatem spectare videtur ut materies omnis supposita ad ponderis sustentationem conferat, quod non nisi in prismatis rectis locum habet: & cum circulus figurarum omnium isoperimetricarum sit maxima, manifestum etiam videtur in columnis cylindricis venustati prospici, & majori simul firmitati, quæ sub data diametro, & perimetro haberi potest. Notum est insuper marmora, quæ ex diversis stratis confurgunt non admodum, neque æqualiter inter se invicem coherentibus, si nimium gravata sint, ob inæqualitatem ipsam cohæsionis quandoque scindi, & in frustula, ac schidia disjici, ut in nostra majori Ecclesia, non raro evenit. Ad fracturæ autem casum quod pertinet vix aliquando evenisse novimus quod excessu ponderis verticaliter superimpositi fulcra ædificii incurvata, & contrafacta sint, sæpius vero, & in ædificiis etiam nobilioribus observari solet, quod horizontali vi, atque impulsu ponderum ad formam arcus, fornicis, tholi dispositorum columnæ, & fulcra a suis basibus recedere incipiant, & tholi, ac fornices undique rimas agant, atque ita ædificium omne infirmetur. Hæc igitur problemata impulsus, ac firmitatis fornicum, quæ Architectis præcipue utilia esse possunt, & præcipuam Staticæ ad Architecturam applicatæ partem constituunt, in subsequente capite distincte evolvi, & apposisis exemplis celebrioribus illustrari debent.

CA-

CAPUT TERTIUM.

DE VI, ET FIRMITATE FORNICUM.

PROBLEMA III.

Dato arcu quovis $ADCba$, fig. 38., atque ad DC in E excitato perpendicularo EF , invenire vim, quæ ex superiore omni pondere perpendiculariter ad EF oriri potest.

Sint puncta æque alta E, e , atque arcu ECe bifariam in C diviso, & arcu Ff in B , intelligamus pondus omne $BCEF$ in centro gravitatis O colligi, nexuque arcus propofiti supra inclinatum planum EF oblique cadere. Ex O in EF ducatur perpendicularis OG , & fit horizontalis recta GH , verticales OM, CHL , atque ex M in OG ducatur perpendicularis alia Mm . Si tota vis ponderis exprimitur recta OM , vi eidem binæ aliæ Mm, Om substitui poterunt in puncto O , quarum Mm parallele ad EF agendo efficit quidem ut arcus omnis superior nitatur gliscere ex F in L , sed nihil ad planum EF , & inferiorem arcum $AFED$ e loco suo dimovendum conferet; altera OM perpendiculariter ad planum EF agendo tota in plani eversionem impenditur: atque ob similitudinem triangulorum erit tota vis ponderis, quod plano EF ex parte una, aut plano ef ex parte altera incumbit, ad vim plano utrique perpendicularem ut $GL : GH$. Perinde erit si completo parallelogrammo $GMNO$ intelligamus verticali vi OM vim OG perpendicularem plano EF , & vim horizontalem ON substitui, quæ perpendiculariter ad juncturam BC agendo cum vi alia consimili ex adversa parte æquilibrium constituat. Cum enim directio vis ON ad OG obliqua sit, vis OM in OG , & ON non ultima erit resolutio: ductaque ex N in OG productam perpendiculari Nn , vi ON binæ adhuc vires substitui poterunt, quarum una On a vi OG dempta relinquat vim Om , altera Nn , cum sit plano EF parallela, & rectæ Gn perpendicularis in puncto O , juxta Theor. I.; nihil amplius agere poterit juxta directionem eandem OG .

COROLLARIA.

I. Ex posteriore hac virium resolutione manifestum est vi absolute ponderis OM binas alias vires ON, OG substitui non posse,

quarum OC tota perpendiculariter ad EF exerceatur: qua virium substitutione de la Hire in Actis Parisiensibus anni 1712., Couplet in Actis anni 1730, Belidor Lib. II. Architecturæ, alique apud nos authores pro supputanda vi fornicum usi sunt. Primo enim absurdum est ex vi ponderis OM vim OG perpendiculariter ad EF , & oblique ad OM exurgere, quæ tota vi propofita sit major in ratione $CL:GH$, & planum EF perpendiculariter impelli fortius quam si ex loco horizontali pondus omne $BCEF$ verticaliter erectum sustineret. Absurdum est etiam ex vi verticali ponderis vim aliquam horizontalem exurgere, quæ semiarculus binos simul constringat in vertice BC , ut etiam ex demonstratione primi Theorematis colligitur, & pondus omne supra planum EF cadere intelligendum est, nec nisi flexione aliqua circa punctum F suborta, ac primo divisus arcubus potest intelligi vi aliqua juncturam BC premi. Denique viribus OM , OG ultimo resolutis non alia vis perpendiculariter ad EF superest quam Om .

II. Patet etiam ex eadem virium resolvendarum methodo, ac ratione, quod si ad EF , ef excitatis perpendiculis GS , gS , fig. 39., iisque concurrentibus in puncto S pondus omne binis planis superimpositum exprimatur recta SR , compleaturque parallelogrammum $SPRQ$, nisi angulus ad S sit rectus, non erit SP vis omnis, quæ juxta directionem SG exercebitur, neque SQ vis, quæ perpendiculariter ad ef ager in puncto g : quæ altera resolutio virium a priori illa omnino differens pro angulo quovis S generatim assumpta est in Dissertatione de vi Fornicum, quæ in Actis Parisiensis Academiæ anni 1774 legitur. Hanc alteram methodum sequendo, si angulus PSR vocetur m , & sit $2m$ angulus GPR , ac pondus quodcumque P adjiciatur in loco C , esset

$\frac{P \cdot \sin. m}{\sin. 2m}$ vis omnis inde orta perpendicu-

lariter ad EF , atque id etiam absurdi occurreret, quod si sectio EF prope verticem BC accipiatur, & directio vis SP ad horizontalem propius accedat, & angulus PSR sit rectus, ac fiat $\sin. m = 1$, $\sin. 2m = 0$; vis horizontalis ex verticali actione dati ponderis orta contra planum EF infinita esset. Juxta methodum nostram viribus ultimo resolutis esset pars ponderis, quæ perpendiculariter ad sectionem quamlibet EF ageret $P \cdot \cos. m$.

III.

III. Ex iisdem insuper principiis potest colligi neque alteri resolutioni, ac substitutioni virium esse locum, qua Jacobus Bernoullius Arr. XXIX. Operis Posthumi videtur usus ad definiendam structuram, ac formam fornicum, in qua partes omnes in æquilibrio se invicem sustinerent. Cum enim inquisisset qua vi F juxta GO tangentem arcus AG agente, fig. 48., pondus omne $2P$ arcus CBg e loco suo dimoveri, & circa fulcrum g elevari possit, demisso ex g in GO perpendicularo gO animadvertit Mathematicus celeberrimus momentum vis F . Og exæquari momento $2P \div Gg$, quod pondus $2P$ in centro gravitatis B collectum perpendiculariter ad Gg exerceretur, adeoque assumpsit $F = P \cdot \frac{Gg}{Og} = P \cdot \frac{GO}{OM}$, eandemque statuit esse vim

omnem, quæ in G contra inferiorem arcum dirigitur juxta tangentem GO . Sic vero rursus vis major ex minore exurgeret, & si dimidii arcus superioris pondus recta OM exprimeretur, esset vis tangentialis GO , eaque in binas alias GM , OM resolvi posset, quarum altera GM vi ponderis adjecta motum aliquem horizontalem fornici totius gigneret ex G in g , & nihil jam in Bernoulliana virium resolutione haberetur, quod ponderis actionem assimilaret.

PROBLEMA IV.

Iisdem positis invenire momentum omne, quod ad medietatem circularis arcus ad inferiorem partem cum fulcro simul evertendam impenditur.

Sint circulares, ac concentrici arcus AB , DC , fig. 41., iisque in EF bisectionis intelligamus superiorem partem $ECBF$ in unum corpus consolidari, quod plano inclinato EF incumbat, obnitaturque inferiorem partem $DEFA$, & fulcrum $AQPR$ ad formam pariter unius corporis compositum circa punctum P dimovere, atque evertere. Duobus ut antea GL , GH , GO , OM , Mm , si pondus superius

$BCEF$ vocetur P , erit $\frac{P \cdot GH}{GL}$ vis omnis, quæ inde oriatur perpen-

diculariter ad EF , productaque OG in S , atque in rectam GS ex puncto P demissa perpendiculari PS , perinde agat ea vis, ac si in puncto S ad distantiam PS a centro motus imprimeretur. Jam vero productis GH , QP in N , ob æquales angulos KGL , HGL , & re-

ctum

Etiam angulum LGS , semirecti erunt anguli NGn , SnP , eritque $GL : GH = Pn : PS$, & si fiat altitudo fulcri $PQ = a$, latitudo $PR = y$, $GL = r$, $HL = GH = q$, erit $Nn = NG = r + y - q$, $PN = a + q$, & $Pn = a + 2q - r - y$.

Itaque erit momentum vis perpendicularis $\frac{P \cdot GH \cdot PS}{GL} = \frac{P \cdot GH \cdot Pn}{GL}$

$= \frac{1}{2} P \cdot (a + 2q - r - y)$: & si T sit centrum gravitatis in inferiore arcu $ADEF$, & pondus omne sit Q , ductaque verticali TV sit $VR = f$, $PV = y - f$, erit $Q \cdot y - f$ momentum quod ex inferiore pondere contra actionem superioris orietur: cumque momentum fulcri ut antea sit $\frac{1}{2} ay^2$, erit $\frac{1}{2} ay^2 + Q \cdot y - f$ momentum omne, quod superiori eidem vi obfistet, exaequatque momentis pro casu æquilibriumi debebit esse $\frac{1}{2} ay^2 + Q \cdot y - f = \frac{1}{2} P (a + 2q - r - y)$.

COROLLARIA.

I. Si vis, quæ ex pondere P perpendiculariter ad sectionem EF oritur, juxta alias authorum aliorum resolutiones, assumi possit

$P \cdot \frac{GO}{OM} = \frac{P \cdot GL}{GH}$, esset ipsius momentum $P \cdot \frac{GL}{GH} \cdot PS =$

$P \cdot (a + 2q - r - y)$, & pro casu æquilibriumi esse deberet $ay^2 + 2Q \cdot y - f = 2P \cdot (a + 2q - r - y)$: quam eandem æquationem ex iis virium resolutionibus derivatam proposuit primum de la Hire citato in loco, quamque nitidius expositam a Belidoro sæpius apud nos Architecti pro supputanda majorum fornium vi, ac firmitate secuti sunt. Idcirco placuit æquationis principia distincte exponere, ut pateat in quo recepta hæcenus methodus deficiat, antequam generalem resolvendi problematis rationem ex aliis principijs erutam tradamus, atque exemplis celebrioribus apposis ostendamus, qui generalium formularum usus in maximis Architecturæ operibus esse possit.

II. Si fiat $P = Q$, pro eodem casu circularis arcus, & fulcri rectanguli ubique ejusdem crassitie, correctæ problematis æquatio illico

in hanc aliam vertetur $y^2 + \frac{3Py}{a} = P \left(1 + \frac{2q + 2f - r}{a} \right)$, ea-

que

que resoluta, & neglecta radice negativa, quæ ad analysim potius, quam ad physicos problematis casus pertinet, erit latitudo fulcri, quæ ad momentorum æquilibrium requiritur

$$y = P^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{2q + 2f - r}{a} + \frac{9P}{4a^3} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{3P}{2a}.$$

Quod si etiam proposito fornice hemisphærico, eoque in totidem æquales partes diviso, quæ fulcris singulis ad æquales distantias suppositis respondeant, sit P , & Q pondus omne, quod in unaquaque parte supra, & infra medietatem quadrantis generatoris disponitur; in hypothesi fulcri parallelepipedî datæ crassitie pro latitudine determinanda adhuc similis quadratica æquatio resolvenda erit. Si cylindricum sit fulcrum & diameter baseos sit y , ac posito radio ad peripheriam ut $1 : \pi$ sit cylindri soliditas $\frac{1}{3} \pi a y^3$, sitque f fulcri distantia a verticali linea, quæ per gravitatis centrum inferioris ponderis Q ducitur, pro eodem casu æquilibrii resolvenda erit cubica æquatio $\frac{1}{3} \pi a y^3 + Q \cdot \sqrt{y^2 - f^2} = \frac{1}{3} P (a + 2q - r - y)$.

III. Ita igitur haberetur momentum omne, quod ad medietatem fornicis hemisphærici ex superiore pondere oritur, ac posito quod non allus esse possit motus, quam inferiore parte cum fulcro simul circa exteriorem apicem basis nutante, supputari posset latitudo fulcri cylindrici, quæ necessaria est ut pondere subsistat fornix, & seclusa cæmenti vi, ac cohæsiōe partium, quæ in majoribus ædificiis ad maiorem firmitatem securitatemque, superaddi debet. De la Hire, Couplet, & Belidor principii loco assumpserunt circulares arcus ad medietatem semper disrumpi. At præterquamquod puncta alia citra medium in circulari arcu impellantur fortius, ut mox videbimus, accedit eo principio posito, atque ad exteriorem partem E disrupto arcu scissuram horizontalem undique per circuitum fornicis haberi oportere: qui tamen non semper in fornicibus dehiscenribus casus obtinet. Exempli loco D. Petri tholus Romæ indicari potest, qui cum undique rimas egerit nullas habet rimas horizontales, quæ allatæ hypothesi respondeant, ut idcirco qui de tholo illo muniendo ægerunt Mathematici aliam hypothesim proposuerint, quod fulcro PQV in Pqv moto, fig. 42., tholus omnis $VDCBAR$ in $Vdcbar$ abierit. Ego in-

fi.

finitos potius casus deprehenderem, quibus fornix potest dehiscere; quod scilicet excessu ponderis superimpositi cæmentum findi, & strata marmorea, ac lateritia a se invicem dividi incipiant, & minor semper divisis partibus momento ponderis resistentia objiciatur. Idcirco momentum idem ad quamlibet arcus partem supputare, & cum resistentiæ momento generaliter comparare necesse est.

PROBLEMA V.

Invenire momentum ponderis, quod in circulari fornice ubilibet ad scissuram fornix, atque everfionem fulcri cylindrici, vel parallelepipedo exercetur.

Proponantur puncta quævis æque alta G , g , fig. 43., duâisque radiis GL , gL pondus omne superius ope arcus inflexilis GBg intelligatur planis GL , gL , angulo GLA ad horizontem inclinatis, hinc inde insistere. Si dimidium pondus sit P , quod scilicet plano in-

clinato GL insistit, erit ut antea $\frac{P \cdot KL}{GL}$ vis omnis, quæ perpendi-

culariter ad GL , & secundum tangentem arcus GS exsurget, quaque pars inferior AG a superiore nitetur dividi. Vis autem juxta tangentem GS exercita in binas alias dividi poterit, quarum una secundum horiz-

ntalem GN dirigatur in puncto G , & sit $\frac{P \cdot KL}{GL} \cdot \frac{NG}{SG} = \frac{P \cdot KL \cdot KG}{GL^2}$

altera verticaliter dirigatur, & sit $\frac{P \cdot KL}{GL} \cdot \frac{NS}{SG} = \frac{P \cdot KL^2}{GL^3}$; & priore

vi in Rn ducta habebitur ipsius momentum ad arcum GA cum fulcro simul impellendum ex G in N , altera autem vi in QK ducta habebitur momentum, quo motus contrario sensu inducetur ex n in R . Quod si igitur fiat $GL = r$, $KL = q$, $KG = p$, $RA = a$, $QA = y$,

erit momentum vis horizontalis $\frac{P \cdot pq \cdot a + p^2}{r}$, & momentum vis

verticalis $\frac{P \cdot q^2 \cdot r + y - q}{r}$, cumque sit $r^2 = q^2 + p^2$, erit differentia

momentorum, seu momentum omne, quod ad everfionem fulcri im-

pen-

pendetur $P \cdot q \left(1 + \frac{ap - q \cdot r + y}{r} \right)$. Denique cum arcubus qui-

buslibet concentricis GBg superadditis eadem omnium sit ratio, si planis verticalibus per apicem B ductis fornix circularis dividatur in totidem æquales partes, quæ fulcris singulis respondeant, & sit pondus superius P , inferius autem Q , & sit $y \mp f$ distantia centri gravitatis in inferiore fornici parte a centro motus, prout scilicet linea directionis intra, aut extra fuleri cylindrici basim cadet, fiet generalis æquatio problematis

$$\frac{1}{2} \pi ay + Q \cdot y \mp f = P \cdot q \left(1 + \frac{ap - q \cdot r + y}{r} \right).$$

COROLLARIA.

I. Primo igitur si posito $a = 0$, & $y = 0$, & pondere quovis P ad columnen fornici superaddito, inquiratur quod inde momentum impulsiois in puncto quocumque G contra inferiorem arcum AG

oriri possit, erit momentum quæsitum $P \cdot q \left(1 - \frac{q}{r} \right) = P \cdot q \cdot \frac{r - q}{r}$

$= \frac{P \cdot AK \cdot KL}{GL}$, & juxta analysecos isoperimetricæ principia mo-

mentum idem fiet maximum cum KL cosinus arcus AG æqualis erit sinui verso AK , & KL , seu GH æqualis erit dimidio radio, adeoque erit GH dimidium latus hexagoni circulo inscripti, & arcus GB erit 30 graduum, atque AG graduum 60. Posito autem $AK = KL = \frac{1}{2} GL$, & $GL = 1$, fiet momentum maximum $\frac{1}{2} P$, quartæ scilicet ponderis parti æqualis. Hinc patet quam arduo operi se accinxerit Brunellescus, qui initio decimiquinti sæculi Florentiæ, Germani, atque Insabres Architecti, qui eodem sæculo exeunte Mediolani, Bramantius¹, & Bonarrotius, qui deinde Romæ, alique alibi tholis majoribus ingentes moles, ut vocant *cupolini*, superimponere ausi sunt. Qui ante illud tempus Pisæ, Patavii, Venetiis, Constantinopoli majores tholi extructi sunt non nisi ornatibus levioribus, Vitruvii autem temporibus flore, & pyramide superius terminabantur, ut Cap. VIII. Lib. IV. Architecturæ a Vitruvio indicatum est.

Mechanica.

I

II,

II. Si diametro Aa semicircularis, five, ut vocant, Romanus arcus ABa insistat, fig. 44., centrisque A, a , & radio Aa describantur alii circulares arcus ab, Ab , qui simul arcum, ut vocant, Gothicum Aba constituent; erit æquilaterum triangulum Aab , & arcus Ab erit graduum 60: adeoque in culmine ipso arcus Gothicus maximum impulsione momentum ex pondere superimposito ad everfionem patietur. Posito autem quod radius AL semicirculi ABa ut antea accipiat loco unitatis, & P sit pondus in culmine arcus Gothici superimpositum, quod plano inclinato ab insistere intelligatur; erit momentum

$$\text{ponderis ad punctum } A \text{ veluti centrum motus relati } \frac{P \cdot AL \cdot La}{Aa} = \frac{1}{2} P,$$

duplum videlicet momenti maximi, quod ex eodem pondere P in Romano arcu AB gigni potest. Pariter si in arcu Gothico sit AT graduum 30, erit TK dimidium latus hexagoni inscripti circulo radii Aa ,

$$\text{eritque } Ka = \sqrt{(Aa^2 - TK^2)} = \sqrt{3}, \quad \& \quad \frac{P \cdot AK \cdot Ka}{Aa}$$

$$= P \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{2}: \text{ in arcu autem Romano si sit } AG \text{ graduum } 30 \text{ erit}$$

$$GK = \frac{1}{2}, \quad \& \quad KL = \sqrt{\frac{1}{3}}, \text{ eritque momentum } \frac{P \cdot AK \cdot KL}{AL}$$

$$= P \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{4}, \text{ adhuc scilicet momenti illius dimidium.}$$

III. Ita igitur locis analogis in utroque arcuum genere ad se invicem relatis, atque instituta momentorum comparatione manifestum erit circulares arcus binis centris descriptos, & acutum angulum superius comprehendentes ad lateralem impulsione momentum superimpositorum ponderum sustinendam debiliores esse quam qui unico centro sunt præditi: quod primum a Cæsare Cæsariano nostro adnotatum reperi in notis ad Cap. II. Lib. I. Vitruvii, atque a Belidoro etiam §. XXXIV. Lib. II. Architecturæ observatione confirmatum est. Arcus illos visu adeo inelegantes in Galliæ, atque Insubiæ ædificia Germani potissimum Architecti decimo tertio, & decimo quarto sæculo invexerant, & Gothici appellantur quod licet Ravennæ, atque in aliis Gothorum ædificiis nullum arcuum hujusmodi vestigium sit, quod primo tamen in Italia Gothi, & Saraceni in Hispania Hispali, & Toleti continuatis arcubus

bus epistylli, & trabeationis loco in majoribus ædificiis nisi sint, atque a recepta intercolumnii, columnæ, basis, & capituli ratione, atque ordine recesserint, quidquid recte ædificandi rationi minime conforme erat Gothicum appellatum est. Apud nos debilioribus arcubus, ac basibus angustioribus majora pondera cœperunt superimponi, ut majoris Ecclesiæ, & tholi exemplo ostendemus.

PROBLEMA VI.

Generales formulas numeris substitutis ad tholi ejusdem casum traducere.

Numerici calculi elementa assumi possunt hujusmodi. Columnæ quatuor marmoreæ, quibus in majore Ecclesia omnis tholi moles insitit, cum sint singulæ brachiorum 53 altitudinis, & 5 circiter diametri, soliditatis vero brachiorum cubicorum 1040, cumque brachio uni cubico tribui debeant libræ 800. ponderis, erunt ponderis librarum nostrarum 832000: singulæ vero trajectis arcubus a capitulo usque ad tholi basim tantundem ponderis censentur sustinere.

Parastatæ octo marmoreæ, quibus tholi octagoni latera, & anguli fulciuntur, cum habeant singulæ brachia 23 altitudinis, latitudinis vero, ac mediæ crassitie brachia circiter 3, simul omnia censerî poterunt ponderis librarum 1324800: & si unumquodque ex his fulcris *DN* laterali impulsione, ac vi circa punctum exterius *Q* nutare intelligatur, posito $\div QD = 1\frac{1}{2}$, & dimidio ad pondus superius addito, resistentiarum momenta omnia infra bis mille librarum millia consistent.

Octo marmorei arcus *DAb*, ut vocant *costoloni*, ad verticem *b*, atque altitudinem brachiorum 28 supra tholi basim in annulum rotundum convenientes, & fornices lateritii ab uno ad alium arcum undique in gyrum traducti, & quod in tholo omni intra annulum illum, & fulcra circumposita est reliquum, censentur simul millionum 3: moles alia superior, ut vocant *cupolino*, brachiorum 14 altitudinis, fere omnis annulo illi marmoreo insitens, librarum 337000: & quæ ad obelisci, & pyramidis formam plusquam brachiorum 50 altitudinis ultimo addita est moles, librarum 223000: omnis simul moles superimposita librarum 560000.

Quod si igitur, partitione facta, statuamus in culmine *b* millio-

nem unum ad impellendum, inferius ad DA usque $1 \frac{1}{2}$ ad resistendum impendi, pondus autem inferius consideremus ad formam pyramidis obliquæ, quæ in DA incipiat, & in b desinat, distribui, cum pyramis obliqua æqualis sit rectæ, quæ altitudinem, sectionesque omnes a basi æquidistantes habeat æquales, in recta autem pyramide, ut in cono, juxta Coroll. I. Probl. I., gravitatis centrum quarta altitudinis parte a basi distet, si gravitatis centrum in toto pondere resistente sit T ; assumi poterit $TK = \frac{1}{4} Lb$, & arcus AT minor erit gradibus 15 , ac sinus versus, AK minor erit quatuor partibus centesimis radii.

Statuamus quod sinus versus sit 0.04 . Cum sit latitudo tholi Aa , quæ est radius arcus Ab , brachiorum $31 \frac{1}{4}$, erit AK brachiorum $1 \frac{1}{4}$, & cum arcuum crassities ad basim sit circiter unius brachii, arcus vero non nisi ad basim fulcris DN jungantur, nec nisi circa punctum exterius D integri videantur nutare posse, erit resistentiæ momentum $1 \frac{1}{4} \cdot 2 \frac{1}{4} = 5 \frac{1}{4}$, & tympani octagoni momento addito erit omne resistentiæ momentum millionum circiter $7 \frac{1}{4}$.

Quod si denique in formula $P \cdot \left(q - \frac{q \cdot r}{r + y} \right)$ assumatur

P unius millionis, ac fiat $r = 31 \frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{4} r = 15 \frac{1}{4}$, $y = DA = 1$, erit impulsiois momentum $15 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot 31 \frac{1}{4} = 7 \frac{1}{16}$, fere scilicet resistentiæ momentum æquale.

COROLLARIUM.

Cum igitur in iis calculi hypothesibus momenta resistentiæ, atque impulsiois proxime inter se æquantur, cumque hypotheses ex pyramidum curvilinearum, & centri gravitatis quarta dumtaxat parte altitudinis distet a base potius vero majus exhibeant resistentiæ totius momentum, ut facile intelliget qui in tholo irregularis formæ consideret bis mille, & quingenta illa librarum millia circa basim maxima ex parte cadere; manifestum est tantæ molis, quæ a fulmine sæpius jam icta est, quæque e lateribus rimas agere jam diu cœpit, firmitatem, ac consistentiam catenis ferreis maxima ex parte commendari. Catenæ cujusque vim plusquam mille librarum millium in Coroll. II, Theor. VII, jam æstimavimus. Patet etiam

cx

ex ipsis calculi numerici elementis, quæ ex peritorum nostrorum æstimatione accepimus, pondus millionum plusquam undecim cum dimidio supra quatuor columnarum bases diametri brachiorum quinque insistere: quæ licet columnæ aliis columnis, ac parastatis e larere fulcianur, excessus tamen ponderis superimpositi ratio, & causa esse potest cur singulari ædium maximarum casu strata marmorea, & lateritia findi, & aliquando dilabi in frustula contingat.

PROBLEMA VII.

Si fulcimentum omne reſtangi verticalis, fornix vero plani alijus curvilinei revolutione circa axem totius tholi facta designentur, momenta impulsione lateralis, ac resistentiæ ad quamlibet forniceis partem inter se comparare.

Sit ut antea radius $LA = r$, fulcri latitudo $AQ = y$, $AD = x$; $DO = dx$, atque in fig. 45 angulus QLq vocetur π , & circularis annulus $DdoO$ sit $\pi \cdot r + x \cdot dx$, & momentum annuli ad exteriorum arcum Qq relati sit $\pi \cdot r + x \cdot y - x \cdot dx$. Habita y pro constante erit integrale $S. \pi dx (ry - r - y \cdot x - x^2) = \pi (ryx - \frac{1}{2} \cdot r \cdot y \cdot x^2 - \frac{1}{2} x^3)$, & posito $y = x$, erit $\frac{1}{2} \pi \cdot r + \frac{1}{2} y \cdot y^2$ momentum strati horizontalis $AaQq$. Quod si igitur ex stratis toridem hujusmodi verticale fulcrum RQ , fig. 46., ad altitudinem usque RA assurgat, quod scilicet circularibus arcibus, concentricis, ac similibus angulum π ad centrum subtendentibus in R , & P terminetur, & sint arcuum radii r , & $r + y$, ac fiat $RA = a$; erit momentum fulcri ad punctum exterius P , veluti ad centrum motus relati $\frac{1}{2} a \pi \cdot r + \frac{1}{2} y \cdot y^2$: & si superficies cylindrica exterius usque ad Na assurgat, & portione forniceis An inclusa sit $QN = b$, erit $\frac{1}{2} \pi \cdot a + b \cdot r + \frac{1}{2} y \cdot y^2$ momentum fulcri totius cylindrici altitudinis PN , latitudinis RP , sive y , radii interioris r , & anguli ad centrum subtensi π .

Ut vero æstimemus etiam momentum omne, quod in fornice curvilineo ultra communem fulcri partem Dn a basi AD ad sectionem usque FE est reliquum, supra eandem basim AD erigatur reſtangulum Ac , & ducta NgG ad QA parallela sit altitudo $AJ = KF$. Momentum reſtangi ne præ momento areæ $FEgG$ fiet minus quod centrum gravitatis reſtangi centro motus P sit propior, fiet autem

majus

majus quod ob crassitiem fornicum superius semper decrefcentem rectanguli area fit major: eademque erit ratio solidorum, quæ revolutione utriusque plani circa eundem axem BL gigni possunt. Quod si igitur consideretur & fornicum crassitiem præ tota fulcrorum latitudine multo minorem statui, & portionem fulcri AN , ut vocant Attici, supra fornicis basim AD altius non assurgere, & spatium AnG exiguum esse, compensantibus se se omnibus assumi poterit quod reliquum momentum requirebatur æquale esse momento solidi revolutione rectanguli en circa axem eundem geniti, & si fiat $AD = c$, $FK = p$, $af = p - b$, atque in priore integrali statuatur c loco x , erit momentum reliquum $\pi \cdot p - b \cdot (cxy - \frac{1}{2} \cdot r - y \cdot c - \frac{1}{2} c')$.

His positis sit πS solidum, quod revolutione superioris plani $FECB$ circa axem gignitur, & si in culmine C cylindrus alius accedat altitudinis e , & radii baseos f , sit solidum angulo π , & arcui πf respondens $\frac{1}{2} \pi e f^2$, pondus omne superius $\pi (S + \frac{1}{2} e f^2)$. Fiat etiam ut antea $KL = q$, demissoque ex K in EF productam perpendicularo Kk angulus FKk vocetur m . Resolutione facta ut in Probl. III. erit $\pi \cdot \cos. m (S + \frac{1}{2} e f^2)$ vis omnis perpendicularis sectioni EF , & juxta Probl. V. quæ inde oriatur vis horizontalis in puncto F erit $\pi \cdot \sin. m \cdot \cos. m \cdot (S + \frac{1}{2} e f^2)$, & momentum ad punctum P relatum debebit esse $\pi \cdot \sin. m \cdot \cos. m \cdot a + p \cdot (S + \frac{1}{2} e f^2)$. Pariter erit vis verticalis $\pi \cdot \cos. m^2 (S + \frac{1}{2} e f^2)$, eaque in QK ducta erit momentum $\pi \cdot \cos. m^2 \cdot r + y - q \cdot (S + \frac{1}{2} e f^2)$, & differentia momentorum, seu momentum omne impulsione erit $\pi \cdot \cos. m \cdot (S + \frac{1}{2} e f^2) (\sin. m \cdot a + p - \cos. m \cdot r + y - q)$, illudque pro casu æquilibrii exæquando momentis omnibus resistentiarum $\frac{1}{2} \pi a + b \cdot r + \frac{1}{2} y^2 + \pi \cdot p - b \cdot (cxy - \frac{1}{2} \cdot r - y \cdot c - \frac{1}{2} c')$, ordinatis terminis prodibit cubica æquatio

$$y^3 + 3ry^2 + 6S + 3ef^2 \cdot \cos. m^2 \cdot \frac{a+b}{a+b} - \frac{6S + 3ef^2 \cdot (\sin. m \cdot \cos. m \cdot a + p - \cos. m \cdot r - q)}{a+b} \\ + \frac{p - b \cdot 6cr + 3c^2}{a+b} y - \frac{(p - b)(3rc^2 + 2c')}{a+b} = 2.$$

COROLLARIUM.

Qui æquationem hujusmodi cum alia comparet, quam D. Bos-
sut in Actis Parisiensis Academiæ anni 1774., in dissertatione de for-
ni-

nicum structura, & forma, tradiderat, collatis inter se invicem speciebus, ac denominationibus analogis diversum tertii termini coefficientem, & quantum omnem diversum pariter terminum esse intelligit. Duplex autem totius discriminis est ratio, quod scilicet Author clarissimus cum resistentiæ momentum in Attico simul, & fornice ad sectionem usque EF supputare vellet, momento annuli cylindrici, qui revolutione rectanguli AN gigni posset, adjiciendum esse censuit momentum annuli, qui revolutione totius rectanguli Ae supra basim AD ad altitudinem KF erecti similiter gigneretur, quo jam portio communis Dn bis in calculum veniret, cum ad prius simul ac posterius rectangulum pertineat. Deinde vero cum ungulam cylindricam dato circa axem angulo respondentem vocasset ipse πS , m vero angulum FSH , qui est idem angulus FKk , vim sectioni EF perpen-

dicularem statuit $\frac{\pi S \cdot \sin. m}{\sin. 2m}$: vim horizontalem $\frac{\pi S \cdot \sin. m^2}{\sin. 2m} =$

$\frac{\pi S \cdot \sin. m^2}{2 \sin. m \cdot \cos. m} = \frac{1}{2} \pi S \cdot \text{tang. } m$: vim verticalem $\frac{\pi S \cdot \sin. m \cdot \cos. m}{\sin. 2m}$

$= \frac{1}{2} \pi S$: in quo etiam incongruum videri posset vim verticalem, quæ, horizontali seposita, ex dato pondere superius addito πS oritur, ubique eandem, constantemque esse a culmine C , ubi directio gravitatis perpendicularis est fornici, usque ad A descendendo, ubi est parallella. Eadem resolutione virium quæ antea, & æquatione substituta, corrigenda esset omnis ad tholum D . Genevensis Parisiis facta applicatio ut in sequente Problemate præstabimus.

PROBLEMA VIII.

Æquationem eandem substitutis numeris ad casum tholi indicati applicare.

Numeris, ac datis omnibus problematis ex memorata dissertatione, atque ex Authore eodem acceptis, cum triangulum ABa tholo inscriptum sit æquilaterum, & latus quodvis Aa sit pedum Parisiensium 64 , erit radius baseos $AL = r = 32$, & altitudo interioris fornici $LB = R = 32 \cdot \sqrt{3} = 55.424$. Est etiam in eodem tholo fornici latitudo ad basim $AD = c = 3$, crassities in culmine $BC = 1 \frac{1}{4}$, altitudo fulcri suppositi $RA = a = 44$, alti-

ti-

titudo Attici $QN = b = 10$, atque ita est altitudo omnis $PN = a + b = 64 = Aa$. Moles, quæ in C superaddita est, *cupolino* ut vocant, reducitur ad cylindrum solidum altitudinis pedum 10 $= c$, & radii baseos $f = 7 \frac{1}{2}$, adeoque est $\frac{1}{2} cf^2 = 281.25$.

Cum vero tholus omnis interius, atque exterius binis arcibus parabolicis AB , DC terminetur, assumpsit author ipse ob excessum ponderis superimpositi scissuram fornici haberi posse circa intersectionem EF diagonalis IL rectanguli parabolæ ABL circumscripti, fig. 47.:

& cum parabolæ latus rectum principale esse debeat $\frac{r^2}{R}$, & sit

$LB : Bl = LH : FH$, posita $BH = 7$, & resoluta analogia $R : r = R - 7 : \sqrt{\left(\frac{r^2}{R}\right)}$, atque æquatione $\overline{R - 7} = R_1$, debet

esse $7 = \frac{1}{2} R (3 - \sqrt{5}) = 21.172$, $LH = FK = p = 55.424 - 21.172 = 34.252$, eritque $p - b = 14.252$,

$q = \sqrt{\left(\frac{r^2}{R}\right)} = r \sqrt{\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)} = 32 \times 0.618 = 19.776$,

& $r - q = 12.224$. Hoc etiam posito cum subtangens parabolæ

sit 27, erit tangens anguli $FSH = \text{tang. } m = \frac{1}{27} \cdot \sqrt{\left(\frac{r^2}{R}\right)}$

$= \frac{r}{27 \sqrt{R_1}} = 0.467$, eritque m angulus $25^\circ 2'$ circiter, ac

siet $\sin. m = 0.4231455$, $\cos. m = 0.9060617$.

At insuper si $1 : \pi$ sit ratio semidiametri ad peripheriam, juxta ætionum conicarum doctrinam, solidum revolutione parabolæ FBH

circa axem BH genitum debet esse $\frac{\pi r^2 f^2}{4R}$, & si punctatis litteris

r' , R' , f' quantitates analogæ in exteriori parabola ECH designentur, erit solidum inde genitum $\frac{\pi \cdot r' \cdot f'^2}{4R'}$, & differentia solidorum

erit

erit $\div \pi \left(\frac{r' r' \cdot \frac{1}{2} r'}{R'} - \frac{\pi \cdot \frac{1}{2} r'}{R} \right)$, solidum scilicet πS , quod revo-

lutione areæ $hCBF$, aut, neglecto triangulo AEF , areæ $ECBF$ circa axem eundem gigni potest. Cumque in exteriori parabola sit $r' = 35$, $R' = 56.924$, $\frac{1}{2} r' = 17.5 = 22.672$, numeris omnibus substitutis prodibit $S = 695$. His autem, ac præcedentibus numeris substitutis fiet æquatio problematis $y' + 96z' + 209 \cdot 42 \cdot y = 1031.76 = 0$.

COROLLARIA.

I. *Æquatio hujusmodi, si abstracte consideretur, ob duplicem signorum successione, atque unam alternationem, radices binas negativas, & positivam unam exhibebit. Neglectis autem radicibus negativis, quæ nihil ad physicum casum faciunt, atque ad positivam radicem proxime supputandam posita $y = 3\frac{1}{2} + \varphi$, $109.42y = 732.97 + 209.42y$, $96y' = 1176 + 672\varphi$, $y' = 42 \cdot 875 + 36 \cdot 75 \cdot \varphi$, proxime eruetur $\varphi = 0.087$, & quæ ad momentorum æqualitatem necessaria erit fulcri crassities y prodibit proxime pedum Parisiensium 3.587 . Cl. Bossut in actis 1775, correctis numeris S , & $\div ef$, qui in præcedente Academiæ volumine duplo majores accepti fuerant, ex ea, quam in superiore corollario indicavimus, resistentiæ supputandæ & resolvendarum virium ratione numerum eundem eruit 3.58 : quod scilicet cum bis supputato momento annuli, qui revolutione rectanguli Da gignitur, fig. 46, resistentiarum omnium momentum majus vero assumpsisset, vim etiam perpendicularis impulsione majorem statuit, & differentię hujusmodi, quæ non adeo magnæ sunt, proxime se invicem compensaverint. Si enim π peripheriam integram designet, & sit πS pondus omne superimpositum, vis omnis sectionibus EF , ef perpendicularis, fig. 39., juxta authorem ipsum deberet esse $\pi S \cdot \frac{2SP}{RS} = \frac{2\pi S \cdot \sin. m}{\sin. 2m}$ juxta methodum autem nostram*

esset $\div \pi S$ pondus, quod ad unam partem dumtaxat caderet, & vis perpendicularis sectioni uni $\div \pi S \cdot \cos. m$, & in toto fornice $\pi S \cdot \cos. m$. Celebris Soufflot, templi D. Genevese Architectus, parietum tholo adjacentium crassitiem statuit pedum $5\frac{1}{2}$, ad quatuor autem latera, quæ columnis inferioribus respondent, pedum 16: quo satis jam tholi, atque ædificii totius firmitati provisum est.

Mechanica.

K

II.

II. Eadem etiam æquatio, & formula ad celeberrimum tholi Romani casum applicari posset, qui summorum Mathematicorum le Seur, Jaquier, Boscovich, Poleni studia, atque ingenium quadraginta ab hinc annis exercuerat. Et quidem priores tres, cum tholo omni spectato exteriores plures parastatas, fig. 42., initio subsedisse, atque a timpano interiore divisas esse observassent, totius fornici, & tholi minoris pondere relato ad punctum V , ut in Coroll. III. Probl. IV. indicatum est, impulsione momentum plusquam tribus librarum Romanarum millionibus momento resistentiæ Attici simul, & timpani, quod adhuc integrum superest, & baseos, ac catenarum majus esse invenerunt: quo jam videri posset tantæ molis a fulmine sæpius ictæ, & celeri confectiōe mensium 21 exædificatæ constitutionem deterio-rem fortasse esse oportuisse quam vere sit. At eum omnem calculi seriem iidem Mathematici non exposuerint, nec vacet modo calculi elementa, & problematis data inquirere, tholus autem Romanus curva parabolica exterius, & circularibus arcibus interius terminetur, expositis jam singillatim majoris Ecclesiæ nostræ, ac D. Genevese casibus, satis hic erit Architectis Romanis generalem formulam exhibuisse, qua nullis assumptis motuum hypothesibus, impulsione, & resistentiæ momentum ad datam fornici partem comparare possint inter se, ac dispicere, quid fortuito operis, ac materiei defectui tribui debeat, & quid ob excessum ponderis pro diuturna integræ molis firmitate timendum sit.

III. Architectis autem qui hætenus ad majorum fornicum extru-
ctionem non alia praxeos norma usi sunt, quam ut septimam circiter partem diametri tribuerent fulcrorum circumjacentium crassitie, maxime commendari debent hæ formulæ, quibus resistentiæ momentum ea proportionem in ponderibus inferioribus distribui, & superiori ponderi opponi potest, ut aliis additis resistentiarum generibus non amplius toto operi ea ratione timendum sit quam ad calcem Coroll. III. Probl. IV. indicavimus. Generatim etiam monendum est audaci, ac minus tuto summorum Architectorum consilio accidisse, ut in culmine ipso fornici, qua parte ædes omnis debilior est, tantæ moles superimponerentur: non solum D. Petri tholum, sed insigniores alios Romæ tholos, & tholos alios maximos Mediolani, & Florentiæ
ri-

rimas egisse: falsum esse Brunelleschii principium; quo tholi minoris; superiorisque extruccionem ad tholi maximi firmitatem testamento Florentiæ commendavit. Reassumpta enim formula $P. q. r \rightarrow q$, &

radio assumpto pro unitate, ex Coroll. I. Probl. V. manifestum est ad altitudinem graduum 60 quartam ponderis P partem in momentum impulsiois, eversionemque inferioris arcus impendi. Quod si pondus P fornici hemisphærico in ipso culmine superimpositum exprimitur numero 10000, & sinus versus $r \rightarrow q$, ac cosinus q inferiorum arcuum multiplicentur inter se, erunt momenta impulsiois ut in tabula sequente

Grados.	Momenta	Grados.	Momenta	Grados	Momenta.
5.	38. 8479.	35.	1481. 7519.	65.	2440. 0924.
10.	149. 6896.	40.	1792. 4400.	70.	2250. 3600.
15.	319. 3719.	45.	2071. 0959.	75.	1918. 2256.
20.	567. 5184.	50.	2296. 3671.	80.	1434. 6304.
25.	849. 2031.	55.	2445. 9775.	85.	795. 1359.
30.	1160. 4400.	60.	2500. 0000.	89.	170. 9724.

SCHOLION.

Cum superioribus formulis indicatum sit qua ratione in iis potissimum fornicibus, qui circularis, aut parabolici arcus revolutione describi possunt, resistentiæ momenta, & fulcrorum magnitudo, ac crassities comparari debeant, ac similis jam in fornicibus parabolicis, atque ellipticis sit calculi totius ratio, supervacaneum erit inquirere qua forma fornices sint firmiores, formamque illam, quæ venustior videtur, circularem, ellipticam, & parabolicam seligendo & venustati simul, & firmitati prospici poterit. Jacobus Bernoullius primum deprehendisse sibi visus est curvam ABa , fig. 48., 49., quam catenæ ex utroque extremo A , a libere suspensæ referunt, quæque idcirco dicitur catenaria, & funicularia, sursum contrario sensu obversam proprietate illa esse præditam ut vis, quæ juxta tangentem curvæ ex superincumbentis ponderis pressione oritur in partibus singulis cum vi alia, quæ ex partium pondere oritur perpendiculariter ad tangentem, æquilibrium constituat Bernoullii analysim suo loco examinabimus. Eam in Architectura magni usus esse posse censuerunt Gregory, Couplet,

Polheim, & Belidor, qui tamen in Propof. IV. Lib. II. de Architecturæ scientia animadvertit quod nisi altitudo catenariæ fit nimia, acutos angulos ad bafim efficit, quodque cum aut ad nimiam altitudinem affurgentes fornices, aut fornices jultæ altitudinis, & acuto angulo ad bafim, feu poplite, ut vocant, affurgentes inveniuntur, non omnino ad catenariæ formam folidiores fornices debent conſtrui. At inſuper conſiderandum eſt quod cum in venuſtiore etiam fornice juxta methodum ſuperius traditam determinari poſſit quæ momentorum ponderis impellentis, ac reſiſtentię ratio ad ſoliditatem operis ſufficiat, inutilis erit omnis de ſolidiore curvæ forma inquiſitio, & Architec- ti in primis erit rationem illam ſoliditatis, & venuſtatem fornicum curare, Analyſtæ autem cætera, quæ ad catenariam pertinent conſiderare.

CAPUT QUARTUM.

DE RECTILINEO MOTU CORPORUM.

THEOREMA X.

SI plura corpora uniformi, & æquabili motu ſingula moveri pergant, ſpatia a ſingulis percurſa erunt in ratione compoſita velocitatum, & temporum, quibus percurruntur.

Primo enim ex ipſa motus æquabilis notione manifeſtum eſt data velocitate duplum ſpatium duplo tempore, triplo triplum abſolvi, atque ita in qualibet multiplicium, & ſubmultiplicium ſerie ſpatium S tempore T abſolutum eſſe ad ſpatium S' eadem ſemper cum velocitate abſolutum tempore t in ſimplici ratione temporum, ſive eſſe $S:S' = T:t$. Deinde cum velocitas ſit ea corporis moti affectio, qua ſit ut majus, vel minus ſpatium dato tempore abſolvatur; ſpatium S' velocitate V , & tempore t abſolutum erit ad ſpatium s abſolutum eodem tempore, & velocitate alia v in ratione ſimplici velocitatum, ſive erit $S':s = V:v$. Quare compoſitis rationibus, erit $S.S':S'.s = S:s = TV:tv$, ſive erunt ſpatia in ratione compoſita temporum, & velocitatum.

COROLLARIUM.

Extremis, ac mediis analogiæ terminis in ſe ductis, ac reſolutis binæ aliæ eruentur analogiæ $V:v = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$, & $T:t = \frac{S}{V} : \frac{s}{v}$, ſcili-

cet

eet in motu æquabili velocitates erunt in ratione directâ spatiorum ; & reciproca temporum , tempora vero in ratione directâ spatiorum , & reciproca velocitatum . Hæc formulæ habentur sex priora theoremata a Galilæo tradita in dialogo tertio de Mechanica . Si massæ duorum corporum sint M , m , & quantitates motus Q , q , cum sit $Q : q = MV : mv$, ut initio libri hujus dictum est , fiet $V : v = Q : q$, eritque $mQ = qmV$: unde aliæ eruentur analogiæ , quas

$$\frac{M}{m}$$

alii authores singillatim exposuerunt .

THEOREMA XI.

Si corpus aliquod data vi continue ad motum sollicitetur , velocitates erunt proportionales temporibus , & spatia a motus initio supputata erunt in duplicata ratione temporum , sive etiam velocitatum .

Si vi aliqua corpus acceleretur , & vis continue , & æqualiter semper agere intelligatur , æqualibus temporibus æqualia accedent celeritatis incrementa : & si tempus omne exprimaturs recta aliqua AF , fig. 50. , dividaturque in æquales partes AB , BC , CD , DE &c. , velocitas vero , quæ imprimitur temporis portione AB , exprimaturs recta BC ; ducta , & producta AGO , & positis CT , DK , EN ad BG , & CH , TL , KM ad AF parallelis , erit velocitas æqualibus aliis temporis portionibus addita $HT = LK = MN = BG$, & temporibus integris AC , AD , AE tota velocitas fiet successive CT , DK , EN &c. Jam vero iis temporis portionibus DE ultra quemcumque limitem imminuitur , velocitas EN ad velocitatem DK , & motus corporis tempore DE ad æquabilem , & rectangulum DM ad trapezium DN propius accedit quam pro qualibet differentia assignabili : quæ autem quantitates ad æqualitatem accedunt propius quam pro qualibet differentia , ex ultimo inter se æquales censeferi possunt , ut veterum Geometrarum axioma est . Cum igitur in motu æquabili spatia sint ut producta temporum , & velocitatum , spatium , quod minimo tempore DE absolvetur , exprimi poterit trapezium DN , summisque acceptis spatium tempore AE absolutum exprimeturs area trianguli ANE , & tempore AF velocitas exprimeturs recta FO , & spatium percursum area AOF , atque ob manifestam triangulorum similitudinem erunt velocitates totæ temporibus , & spatia quadratis temporum , sive etiam velocitatum proportionalia .

CO-

I. In hypothesi vis alicujus acceleratricis uniformiter, & continue agentis motus corporis erit uniformiter acceleratus, & si temporum ratio exprimitur basibus triangulorum similium, ratio velocitatum altitudinibus exprimitur, & ratio spatiorum omnium a motus initio percurforum exprimitur arcibus eorundem triangulorum: & quia expressionibus iisdem positis spatium tempore AF , & data velocitate FO æquabiliter absolutum exprimi debet rectangulo $AF \cdot FO$, quod trianguli AOF duplum est; si motus uniformiter acceleratus aliquando in æquabilem defineret, corpus velocitate ultimo acquisita, æquali tempore, duplum spatium æquabiliter abfolveret, quam quod accelerato motu absolutum est. Si vis acceleratrix vocetur G , tempus T , velocitas V , & spatium accelerato motu percursum S , Geometrica constructio ad formulas analyticas deducetur, eritque primo $GT = V$, sive $T = \frac{V}{G}$; deinde $S = \frac{1}{2} VT = \frac{V^2}{2G}$; ac denique $V = \sqrt{2GS}$.

II. Si gravitatis vis, continua cum sit, æqualiter semper in corporibus libere decidentibus agere intelligatur, & cum primo incipit, & cum continuatur motus, hæ leges erunt corporum libere descendentium: & si tempora descensus sint 1, 2, 3, 4, 5 &c., velocitates totæ in hac eadem ratione augebuntur, & spatia percurfa, atque a descensus initio supputata erunt ut numeri 1, 4, 9, 16, 25 &c., & antecedens spatium a posteriore quolibet subducendo, spatia æqualibus temporis partibus sibi proxime succedentibus libero lapsu absoluta inter se erunt ut numeri impares 1, 3, 5, 7, 9 &c.: quæ sunt priora Galilæi theoremata de motu uniformiter accelerato. Id experientiæ adeo cum sit conforme, ut non nisi exiguæ aeris differentię quæ exigua deprehenditur differentia spatiorum tribui possit, naturæ consentanea hypothesi illa censenda erit gravitatis æqualiter semper agentis, & incipientie, & continuato motu. Demissis enim ex Parisiensi Observatorio corporibus diversi generis compertum est uno minuto secundo temporis absolvi pedes Parisenses 15. poll. 1. lin. $2\frac{1}{4}$: ac deinde secundo altero ped. 45. poll. 3. lin. $6\frac{1}{2}$: ac secundo altero subsequente ped. 75. poll. 5. lin. $10\frac{1}{4}$.

III. Si corpus supra inclinatum planum BC collocetur in loco D ,
fig.

fig. 29. , & sit altitudo plani AB , resolutione facta ut in Theor. VI.; ac posito quod tota vis gravitatis vocetur G , erit $\frac{G \cdot AC}{BC}$ vis qua perpendiculariter premetur planum, & $\frac{G \cdot AB}{BC}$ vis, qua juxta longi-

tudinem plani corpus ad motum sollicitabitur, eaque tota vi gravitatis minor erit in constanti ratione altitudinis plani ad longitudinem, adeoque in dato plano data, & constans erit, & motus corporis erit uniformiter acceleratus, eruntque spatia ab initio motus supputata ut numeri illi quadrati, & spatia aequalibus temporis partibus percurfa ut numeri impares. Galilæus ex æquali velocitate corporum liberæ decidentium collegit vim acceleratricem gravitatis in corporibus omnibus æqualem esse. Cum vero alias descensus leges inquireret, initio Dialogi tertii hypothesim simpliciolem assumpsit gravitatis agentis in simplici ratione temporis, exploraturus deinde an hypotheseos corollaria phaenomenis essent conformia, atque ea vere naturæ lex censenda esset. Non autem inventa hæcenus brevioris temporis mensura non nisi in planis inclinatis conformitatem hujusmodi potuit deprehendere. Cum enim in canaliculo tereti, & inclinato ad horizontem eburneo globulum demississet, deprehendit longitudinem trium brachiorum, ac deinde brachiorum novem paribus temporis partibus sibi succedentibus absolvi.

PROBLEMA XI.

Iisdem positis motus corporum in verticali recta, atque in plano inclinato libere decidentium inter se comparare.

Quia velocitates æqualibus temporibus acquisitæ esse debent viribus acceleratricibus proportionales, vis autem acceleratrix in verticali BA , fig. 51., ad vim acceleratricem in plano inclinato BC , juxta superius corollarium debet esse in constanti ratione longitudinis plani ad altitudinem; si utrobique descendere incipiant duo corpora, & tempus descensus dividatur in quaslibet æquales partes, velocitates prima, secunda, & subsequenter iis temporis partibus utrobique acquisitæ inter se erunt in constanti eadem ratione, æqualesque rationes conjungendo tota velocitas verticaliter acquisita erit ad velocitatem eodem tempore in inclinato plano acquisitam ut $BC : BA$. Quia vero temporis partibus ultra quemcumque limitem imminutis motus uniformiter acceleratus tanquam æquabilis spectari potest, in motu

motu autem æquabili spatia eodem tempore percurfa sunt proportionalia velocitatibus; spatia etiam minimis, & æqualibus iis temporis partibus sibi invicem succedentibus utrobique absoluta inter se erunt ut longitudo plani ad altitudinem. Rursus igitur summas omnium accipiendo spatium verticali lapsu absolutum erit ad spatium, quod eodem tempore in plano inclinato absolvi potest ut $BC : BA$, ductoque ex A in BC perpendicularo AD corpus ex B in D eo tempore descendet, quo verticaliter dilabi potest ex B in A .

COROLLARIA.

I. Si per idem punctum B traducantur quotcumque plana BC, Bc , portiones eorundem BD, Bd , quæ semicirculo $BDaA$ definientur, & tota diameter BA describi poterunt eodem tempore: rectæ enim AD, Ad , quæ ex A ducuntur, sunt chordis BD, Bd perpendiculares. Rursus si agatur Da parallela, & æqualis diametro BA , parallelae erunt rectæ BD, Da , & anguli BDA, DAa simul recti erunt, & corpus, quod ex D descendere incipiat per DA , in A perveniet eodem tempore, quo verticaliter dilabi posset ex D in a , sive etiam ex B in A . Quod cum de alia quavis chorda Ad valeat, chordæ etiam omnes in circulo ex superiore, vel inferiore diametri puncto ductæ eodem tempore describi poterunt, quo diameter verticali lapsu describitur: quod est celebre aliud theorema Galilæi.

II. Quia velocitas acquisita cadendo ex B in A est ad velocitatem acquisitam cadendo ex B in D ut $BC : BA$, velocitas autem lapsus ex B in C , juxta corollarium postremum antecedentis propositionis, esse debet ad velocitatem lapsus ex B in D in ratione subduplicata $BC : BD$, sive in ratione simplici $BC : BA$; velocitates in A , & C eandem rationem habebunt ad velocitatem acquisitam cadendo ex B in D , adeoque erunt inter se æquales. Id axiomatis loco assumpsit Galilæus in priore Dialogorum suorum editione: demonstratione autem indigere monuit Vivianus, quæ illico exhibita a Galilæo est. Hinc facile collegit ipse quod si duo inter plana horizontalia traducantur quotcumque rectæ, corpora in singulis a superiore plano decidendo eadem velocitate ad planum inferius pervenient.

III. Cum tempus descensus ex B in C sit ad tempus descensus
ex

ex *B* in *D*, quod idem est tempus descensus per *BA*, & *Bd* in subduplicata ratione *BC* : *BD*, five in ratione simplici *BC* : *BA*, tempus autem descensus ex *B* in *d* ad tempus descensus usque in *c* similiter se habeat ut *BA* : *Bc*; tempora descensuum per inclinata plana *BC*, *Bc* ejusdem altitudinis *BA* inter se erunt in ratione simplici longitudinum *BC*, *Bc*. Quod si denique proponantur duo plana *BC*, *Bb*, fig. 52., diversæ simul & longitudinis, & inclinationis ad horizontem, cum tempus descensus per *BC* sit ad tempus descensus per *BA* ut *BC* : *BA*, & tempus descensus per *BA* sit ad tempus descensus per *Ba* ut $\sqrt{BA} : \sqrt{Ba}$, ad denique tempus descensus per *Ba* sit ad tempus descensus per *Bb* ut *Ba* : *Bb*, compositis antecedentibus, & consequentibus tempus descensus per *BC* ad tempus descensus per *Bb* se habebit ut $BC \cdot \sqrt{BA} : BA \cdot \sqrt{Ba}$. $Bb = \frac{BC : Bb, \text{ si-}}{\sqrt{BA} : \sqrt{Ba}}$

ve descensuum tempora inter se erunt directe ut longitudines planorum, & reciproce ut radices altitudinum, & æqualia fient tempora cum altitudines planorum erunt quadratis longitudinum proportionales.

THEOREMA XI.

Si corpus ex plano *BC*, fig. 53., in planum aliud *CE* transeat, & ex *B* in *CE* productam ducatur perpendicularum *BF*, & sint *FD*, *DA* perpendicula alia ex *F* in *BC*, & ex *D* in horizontalem lineam *AE* ducta, erit tota velocitas descensus in puncto *C* ad velocitatem, quæ in planum *CE* transibit corpus ut *BC* ad *FC*: tota autem velocitas in puncto *E* ea erit, quæ acquiri posset cadendo per altitudinem *DA*.

Primum ex sola resolutione motuum manifestum est, nam si velocitas lapsus in puncto *C* resolvatur in binas alias, unam plano *CE* perpendicularem, quæ occurfu plani exstinguetur, & alteram, quæ in plano *CE* residua erit, ac tendet ex *C* in *E*; tota velocitas ad portionem residuam se habebit ut *BC* : *FC*. Hoc autem dato cum descensuum velocitates in eodem plano inclinato sint in ratione subduplicata spatiorum percurforum, & ratio *BC* : *FC* sit subduplicata rationis *BC* : *DC*, velocitas descensus ex *B* in *C* ad velocitatem descensus ex *D* in *C* se habebit in ratione eadem *BC* : *FC*, eritque *D* altitudo, ex qua si corpus descendat usque ad *C*, acquirat velo-

citatem æqualem illi, quæ post descensum ex B in C residua est in plano CE . Paret autem ex corollario secundo problematis antecedentis velocitatem hujusmodi eandem esse, quæ ex D ad horizontalem usque KC verticaliter descendendo acquiri posset: ac paret insuper incrementa velocitatis in plano CE , atque in verticali linea KA vi gravitatis acquisita esse æqualia. Corpus igitur ex B decedens in duobus planis BC , CE ea cum velocitate ad horizontalem lineam AE perveniet, quæ verticali lapsu per altitudinem DA acquiri posset.

COROLLARIA.

I. Tempus descensus per BC ad tempus descensus per DC erit pariter in ratione subduplicata spatiorum BC , DC , sive in ratione simplici $BC : FC$. Quia vero juxta Coroll. I. & III. Theor. XI., tempore descensus per DC , & velocitate in C acquisita duplum spatium DC æquabiliter absolvi potest; si planum CE horizontale sit, fig. 54., & in ipso corpus æquabiliter moveri pergat, erit tempus descensus per DC ad tempus uniformis motus per CE ut $2DC : CE$. Compositis igitur rationibus tempus descensus per BC ad tempus uniformis motus per CE se habebit ut $BC . 2DC : FC . CE$, atque ob $FC = BC . DC$ erit temporum ratio $2FC : CE$. Si corpus aliquod in planum CE velocitate illa incurreret, quæ directione, & quantitate sua exprimeretur recta BC , esset FC velocitas in plano CE residua, & BF velocitas, quæ occurso plani extingueretur, quæque si ob vim elasticam reficiatur in adversam partem, corpus per rectam CD abducat, & reflexionis angulum ECd efficiet æqualem angulo incidentiæ FCB .

II. Si FD in fig. 53. sit arcus centro C , & radio CF descriptus, & velocitas in priore plano exprimatur recta BC , erit BD velocitas quæ in planum alterum transeundo juxta longitudinem plani deficiet: & cum in circulo descripto sit $BD = \frac{BF}{2BC}$, si angulus BCB

minuatur, & recta BF accipiat minor quacumque data, sive, ut vocant, infinite parva primi ordinis, velocitas amissa erit quantitas infinite parva secundi ordinis. Quod cum in planis quibuscumque sibi invicem succedentibus similiter fieri debeat, si plana infinita numero, & longitudine infinite parva in curvam continuam desinant, corpus

pus ex uno in aliud latas transeundo non nisi velocitatem infinite parvam secundi ordinis amittet, & per omnia simul transeundo velocitatem amittet adhuc infinite parvam, & nullam assignabilem velocitatis imminutionem ob semitæ curvaturam subire poterit.

III. Quod si igitur corpus in curva quavis continua BDC , fig. 55, descendat ex B in C , ducanturque quotcumque plana inter se proxima, & horizonti parallela, cum ab uno ad aliud planum transeundo, sive per interceptum curvæ latus, sive per interceptas alias plani BF , aut BK partes, æqualia velocitatis incrementa ob vim gravitatis haberi debeant, tota autem velocitas ex transitu ex uno in aliud curvæ latus non immutetur; corpus per curvam BDC , & per quæcumque plana inclinata BF , BK ex puncto B ad horizontalem lineam FC eadem semper labetur velocitate. Atque ita corpus per circulearem arcum BDC , fig. 56., labendo ad infimum punctum C , quod corpore ex O suspenso fili OC , aut OB ope obtineri posset, acquireret eandem velocitatem, ac si per sinum versum FC caderet, eaque ad velocitatem lapsus per totam diametrum AC se habebit in subduplicata ratione $FC : AC$, sive in ratione simplici $BC : AC$, scilicet velocitates in eodem circulo erunt chordis proportionales: & quia circulo aucto velocitas descensus per diametrum augetur in ratione diametri subduplicata, velocitates, quæ lapsu integro per circuleares arcus acquiri possunt, universim erunt in ratione directa simplici chordarum, & subduplicata reciproca diametrorum.

PROBLEMA X.

In motu quovis variabili rationem elementorum temporis, velocitatis, & spatii percurri determinare.

Cum ex effectibus causæ omnes, & vis omnis acceleratrix ex illa velocitate metiri debeat, quam generat dato tempore, si vis, quæ ad motum corporis in directione data accelerandum, vel retardandum impenditur, vocetur G , differentia exigua, sive elementum, quod inde gignitur, velocitatis crescentis, vel decrescantis sit dV , & sit dT elementum temporis, quo gignitur, erunt G , & $\frac{dV}{dT}$ quanti-

tates sibi invicem proportionales, & unitatis loco assumendo quantitatem tertiam, quæ per alterutram ex iis binis multiplicata proportionem

tionem in æqualitatem vertat, erit in motu quidem accelerato $G \cdot dT = dV$, in retardato autem $G \cdot dT = -dV$. Jam vero immينو ultra quemcumque limitem tempore motus acceleratus, vel retardatus ad æquabilem propius accedit quam pro data qualibet differentia assignabili, & ultimo tanquam æquabilis assumi potest: in motu autem æquabili tempora sunt directe ut spatia iisdem temporibus percurfa, & reciproce ut velocitates, quibus feruntur corpora. Quod si igitur spatium tempore dT percursum vocetur dS , & tota motus velocitas sit V , erit $dT = \frac{dS}{V}$, $V = \frac{dS}{dT}$, & differentiis

aliis acceptis erit $dV = \frac{ddS}{dT} - \frac{dS \cdot dT}{dT^2}$, aut si elementum temporis censeatur constans posteriore termino omisso erit $dV = \frac{ddS}{dT}$.

Igitur factis hisce omnibus substitutionibus ex prior formula binæ alie formulæ eruentur, eritque in motus quovis variabili

I. $G \cdot dT = \pm dV$. II. $G \cdot dS = \pm V dV$. III. $G \cdot dT^2 = \pm dS$.

COROLLARIA.

I. Ex hisce formulis analytice colliguntur theoremata, quæ Geometrica constructione antea exhibuimus. Scilicet si quantitas G sit constans, summis acceptis erit primo $GT = \pm V$, deinde $G \cdot S = \pm V^2 + C$, aut si motus a quiete incipiat, erit $G \cdot S = \pm V^2$, & $V = \sqrt{\pm G \cdot S}$, ac denique erit $\pm G \cdot S = V^2 = G T^2$, & $G = \pm S$. Ita igitur patet quod ambigua scriptorum locutione tot jam erroribus, ac disputationibus a Grandii, & Varignonii temporibus ad hæc usque occasionem præbuit, vires acceleratrices æstimandas non esse ex simplici spatio, quod dato tempore ob easdem vires absolvitur, sed ex spatio bis accepto: quod etiam ex Coroll. I. Theor. XI. satis colligebatur, cum inde pateat velocitate ultimo acquisita dato tempore duplum spatium absolvi posse quam quod motu uniformiter accelerato a quiete incipiendo absolutum est. Qui igitur vim aliquam continue agentem comparare velit cum vi alia, qua semel impressa æquabilis motus gignitur, is spatia accipiet æquali tempore ob utramque vim absoluta, eritque vis prior ad alteram ut duplum spatium; quod ob vim priorem absolvitur ad simplex spatium, quod absolvitur ob vim aliam posteriorem.

II.

II. Si sit A datum aliquod spatium, quod dato tempore B absolvatur, manentibus aliis denominationibus antecedentibus debet esse $A : S = B : T$, & $S = \frac{A \cdot T}{B}$; unde si elementum

temporis dT assumatur constans, ordine eruetur $dS = \frac{A \cdot T \cdot dT}{B}$;

& $ddS = \frac{A \cdot dT}{B}$; ac denique si in formula corollarii antecessen-

tis $2G \cdot S = G \cdot T$ scribamus A loco S , & B loco T , fiet $G = \frac{A}{B}$, & adhuc eadem eruetur problematis superioris formula

$ddS = G \cdot dT$, & $G = \frac{ddS}{dT}$. Non itaque statui poterit $G = \frac{ddS}{dT}$;

aut $G = \frac{ddT}{dT}$, quæ apud authores aliquos occurrunt formulæ. Si

nullum assumatur constans elementum temporis, universim erit $dV = G \cdot dT = \frac{ddS}{dT} = \frac{dS \cdot dT}{dT}$, five etiam $G = \frac{ddS}{dT} = \frac{dS \cdot dT}{dT}$;

quæ Alembertii, Euleri, aliorumque authorum est formula.

III. Cum sit dS incrementum spatii, quod etiam in motu æquali haberi posset elemento temporis dT , si quis consideret differentiale aliud ddS ob vim acceleratricem continue agentem motu uniformiter accelerato absolvi, atque ideo assumat analogiam $ddS : S = dT : T$, atque inde eruat $\frac{ddS}{T} = \frac{S}{T^2} G$; is etiam con-

siderare debet spatium tempore infinitesimo dT ob vim continuam percursum esse dimidium secundi differentialis finiti spatii ab initio motus supputati, five esse dumtaxat $\frac{1}{2} ddS$. Nam si tempora T abscissis, spatia S semiordinatis alicujus curvæ exprimantur, & sit dS incrementum semiordinatæ, quod tangente intercipitur, erit $\frac{1}{2} ddS$ incrementum aliud tangente, & curva interceptum, ut in Coroll. II. Probl. CXXIII. Algebrae notatum est. Itaque erit hujus problematis analogia $\frac{1}{2} ddS : S = dT : T$, quod alia etiam ratione ostendere voluit Alembertius in secunda Mechanicæ editione.

THEOREMA XIII.

Si corpus libere decidat ex loco A , fig. 57., & gravitas accele-

ratrix minuat in simplici ratione distantiae BC a centro C , radioque AC describatur circularis arcus AD ; velocitas in loco quocumque B erit semiordinatae circuli BM , tempus vero totius descensus per AB erit angulo ACM proportionalis.

Si centrum virium sit C , & gravitas acceleratrix in loco B sit proportionalis distantiae BC , in distantia autem illa, quae unitate exprimitur, gravitas vocetur G , ac fiat $BC = X$, $Bb = -dX$; erit gravitas in loco $B = G \cdot X$. Quod si igitur in secunda formula problematis antecedentis scribamus GX loco G , & $-dX$ loco dS , fiet $VdV = -GX \cdot dX$, summasque omnes accipiendo erit $\frac{1}{2} V^2$ aequalis quantitati $-\frac{1}{2} G \cdot X^2$ addita constante quantitate C ; & quia descensus e quiete incipit in loco A , ibique evadit $C - \frac{1}{2} G \cdot X^2 = C - \frac{1}{2} G \cdot AC^2 = 0$, fiet $C = \frac{1}{2} G \cdot AC^2$, $V = G \cdot \sqrt{\frac{AC^2 - BC^2}{AC^2}} = G \cdot \frac{BM}{AC}$, atque ita velocitas descensus ex A in B proportionalis erit semiordinatae circuli BM . Est autem elementum circularis arcus $Mm = \frac{AC \cdot Bb}{BM}$.

atque est $Bb = \frac{BM \cdot Mm}{AC}$. Cum igitur temporis partibus ultra

quemcumque limitem assignabilem imminutis motus per exiguum spatium Bb tanquam uniformis spectari possit; tempus descensus ex B in b erit directe ut spatium Bb , & reciproce ut velocitas BM , adeoque erit ut quantitas $\frac{Mm}{AC}$, sive ut angulus MCm , & totum tempus de-

scensus ex A in B proportionale erit angulo ACM .

COROLLARIA.

I. Quia in eodem circulo arcus AM proportionales sunt angulis ACM , descripto ut antea quadrante AD , & continuato corporis descensu, cum spatia descripta sint ipsae abscissae AB , erunt tempora, & velocitates ut arcus AM , & semiordinatae BM ; quae duo breviter demonstravit primum Newtonus in Propof. XXXVIII. Lib. I. Princip. Mathem., fusc autem explicavit Saccherius in Propof. II., & VI. Lib. IV. Neostaticae anno 1708 apud nos editae. In diversis autem circulis, atque ex diversis altitudinibus decidendo erunt descensum tempora directae ut arcus, & reciproce ut radii, qui sint ipsae altitudines, atque

que in quadrante integro exæquatis rationibus, in assumpta gravitatis hypothesi æqualia erunt descensuum tempora undecumque incipiat descensus: exæquatis autem temporibus, & angulis quibuscumque *ACM*, *HCN* similia erunt segmenta *ABM*, *HLN*, adeoque spatia *AB*, *HL* ab initio motus percurſa ex *A*, & *H* proportionalia erunt velocitatibus *BM*, *LN*.

II. Quia semiordinatæ arcuum nascentium proportionales sunt ipsis arcibus, in hypothesi gravitatis proportionalis distantie a centro, motus corporis decidentis initio erit uniformiter acceleratus, & proxime ad centrum accedendo, radio, & semiordinatis circuli ad æqualitatem propius accedentibus, motus desinet in æquabilem, atque ultra centrum delato corpore, ac continuato motu ex adversa parte exprimentur velocitates semiordinatis alterius quadrantis, & corpus usque ad alterum diametri verticem perveniet. Si gravitas acceleratrix constanter esset *G*. *AC*, & motus descensus esset uniformiter acceleratus, velocitas descensus ex *A* in *B* juxta alias formulas antecedentes deberet exprimi quantitate $V \propto \sqrt{G \cdot AC \cdot AB}$. Velocitas igitur descensus in hypothesi gravitatis constantis erit ad velocitatem in hypothesi gravitatis proportionalis distantie a centro $V \propto \sqrt{AC \cdot AB} : BM :: AM : BM$, & ultimæ velocitates usque ad centrum cadendo acquisitæ inter se erunt in subduplicata ratione binarii ad unitatem.

THEOREMA XIV.

Si gravitas acceleratrix sit reciproce in duplicata ratione distantie a centro, corporis libere decidentis ex loco *A* velocitas in *B* erit directe in ratione subduplicata spatii percurſi *AB*, & reciproce in ratione subduplicata spatii residui *BC*.

Si gravitas acceleratrix in loco quocumque *B* exprimatur quantitate $\frac{G}{X}$, juxta secundam variabilis motus formulam debet esse

$$VdV = - \frac{G \cdot dX}{X^2}, \text{ summisque acceptis } \frac{1}{2} V^2 \text{ æquabitur quantitati}$$

variabili $\frac{G}{X}$ adjecta constante quantitate *C*. Cum autem velocitas

descensus sit nulla in loco *A*, posito $X = AC$ fiet $C + \frac{C}{AC} = 0$,

&

& $C = -\frac{G}{AC}$. Itaque generatim erit $\div V^* = \frac{C}{X} - \frac{G}{AC} = \frac{C \cdot AB}{AC \cdot BC}$;

& si in fig. 58 supra rectam AC describatur semicirculus ANC , & sit BN semiordinata circuli in puncto B , junganturque chordæ AN , CN , ob similitudinem triangulorum ANC , ABN , atque ob $AB = \frac{AN^2}{AC}$, $BC = \frac{CN^2}{AC}$, erit etiam in loco B quadratum velocitatis descensus $V^* = \frac{2G \cdot AN^2}{AC \cdot CN^2} = \frac{2G \cdot AB}{AC \cdot BC}$. Data autem quantitate G ,

& distantia a centro AC , unde descensus incipit, velocitas in loco quocumque B proportionalis erit quantitati $V \left(\frac{AB}{BC} \right)$, quæ subduplicatam rationem exprimit spatii pereursi ad residuum.

COROLLARIA.

I. Quia gravitas acceleratrix in loco A iis positis denominationibus sit G , si ubique gravitas maneret eadem, quadratum velocitatis libero descensu acquisitæ in loco B fieret $\frac{2G \cdot AB}{AC}$; adeoque veloci-

tas in hypothesi gravitatis constantis esset ad velocitatem pari descensu acquisitam in hypothesi gravitatis reciproce proportionalis quadrato distantie a centro in ratione subduplicata $BC : AC$, sive in ratione simplici $CN : AC$. In posteriore etiam hac hypothesi velocitas descensus in centro C , ubi evanescit BC , fiet major quacumque data, & corpore ultra centrum juxta eandem lineam delato imminuetur contrariis gradibus velocitas, exprimereturque analogis subtensis semicirculi alterius juxta positi inverse sumptis. Et cum quantitas G sit semper positiva eum

etiam negative X accipitur, atque in hypothesi gravitatis reciproce proportionalis quadratis distantiarum contrarie ipsius directiones citra, & ultra centrum unica formula nequeant exprimi, pro exprimenda etiam descensus, & ascensus velocitate similiter geminanda utrobique erit constructio.

II. Si fiat $AC = 1$, & gravitas etiam acceleratrix G ad distantiam AC accipiat pro unitate, erit velocitas descensus ex A in $B = \frac{AN}{CN} \cdot V_2$, & tempus descensus per exiguum spatium Bb

$Bb = \frac{CN \cdot Bb}{AN \cdot V_1}$. Quod si igitur ducatur chorda Cn , & ex n in CN

ducatur perpendicularum no , ut sint similia triangula Non , ANC , adeoque sit $Nn = \frac{AC \cdot on}{CN}$, & $Bb = \frac{1BN \cdot Nn}{AC} = \frac{1BN \cdot on}{CN}$, tem-

pus idem descensus per Bb æquale erit quantitati $\frac{BN \cdot on \cdot V_1}{AN}$

$= \frac{CN \cdot on \cdot V_1}{AC}$: totum autem tempus descensus ex A in C æqua-

le erit summæ triangulorum omnium NCn ductæ in $\frac{1V_1}{AC}$, videlicet

femicirculo $ANnC$ in $\frac{1V_1}{AC}$ ducto, vel semiperipheriæ $ANnC$ divisæ

per V_1 , vel quadrantis AMD per V_1 pariter divisæ. Tempus etiam descensus ex A in B proportionale erit arcæ ACN : & cum sector AFN æquetur dimidio radio in arcum AN ducto, triangulum vero FNC dimidio radio ducto in semiordinatam BN ; tempus idem descensus proportionale erit summæ arcus, & semiordinatæ, quæ æquantur simul semiordinatæ cycloidis vertice A , & altitudine AC descriptæ, ut recte jam a Guidone Grando adnotatum fuerat in Coroll. VI. Propos. IV. de motu accelerato.

III. Si gravitas in distantia 1 a centro ut antea vocetur G , & sit velocitas descensus ex A in $B = V \left(\frac{1G \cdot AB}{AC \cdot BC} \right)$, posito quod corpus ex infi-

nita distantia AC per infinitum spatium AB descendat, exæquatis quantitatibus AC , AB , erit velocitas ad distantiam BC a centro $V \left(\frac{1G}{BC} \right)$: & si

BC sit radius Terræ, & gravitas in superficie terrestri vocetur g , adeoque sit $G:g = BC:1$; corpus ex distantia infinita directe in terram nostram labendo vi gravitatis, cum ad terrestrem superficiem pervenerit, acquireret velocitatem $\sqrt{2g \cdot BC}$. Eulerus in Coroll. IV. Propos. XXXIII. Mechanicæ ostendit primum in hypothesi gravitatis reciproce proportionalis quadratis distantie a centro, lapsu ex infinita distantia incepto, & per infinitum spatium continuato non nisi datam, ac finitam velocitatem acquiri posse. Clariss. Gregorius Fontana quarta suarum

Mechanica.

M

dis.

disquisitionum Physico-Mathematicarum, problemate ad formulas alias optime deducto, posito quod radius mediocriis Terræ sit Parisiensium 19741200, cum spatium velocitati illi debitum, quæ libere decedendo uno secundo temporis acquiri posset, sit pedum 30.2, deprehendit velocitatem vi terrestris gravitatis ex distantia infinita usque ad terrestrem superficiem decedendo acquisitam eam esse, qua 34531 pedes Parisienses uno secundo temporis absolvi possint.

PROBLEMA XI.

Si gravitas sit potentie cuilibet distantie a centro proportionalis corporis libere descendentes velocitates, & tempora descensuum determinare.

Si sit ut antea tempus descensus t , velocitas descensu acquisita v , distantia a centro x , & gravitas in distantia r a centro vocetur g , in distantia vero alia qualibet sit $\frac{gr^m}{x^m}$, & sit potentie m distantie ejusdem reciproce proportionalis; erit primo $v dv = - \frac{gr^m dx}{x^m}$,

atque integrando erit $\frac{1}{2} v^2 = \frac{gr^m}{(m-1)x^{m-1}} + C$; & si motus ex distantia a incipiat, & sit $C = \frac{gr^m}{(m-1)a^{m-1}}$, erit in loco alio quolibet $v^2 = \frac{2gr^m}{m-1} \left(\frac{1}{x^{m-1}} - \frac{1}{a^{m-1}} \right)$. Inde autem eruetur $v = V \left(\frac{2gr^m}{m-1} \right) \sqrt{\left(\frac{1}{x^{m-1}} - \frac{1}{a^{m-1}} \right)}$

$$-\frac{dx}{v} = dt = \frac{-dx}{V \left(\frac{2gr^m}{m-1} \cdot \frac{1}{x^{m-1}} - \frac{1}{a^{m-1}} \right)}$$

quæ nisi absolute integralis sit formula, pro quolibet valore exponentis m infinitarum serierum ope sic integrari poterit, ut data altitudine tempus lapsus vero proximum supputetur.

COROLLARIA.

I. Formulæ hæc analyticis manifesta sit primo Geometrica constructio problematis, quam Newtonus exhibuit in Propos. XXXIX. Lib. I.

Lib. I. Princip. Mathem. Scilicet si corpus in centrum C descendere incipiat ex loco A , fig. 59., & in loco quocumque E erigatur semper EN ad AC perpendicularis, & proportionalis vi centripetæ agentis in loco E , ac sit BND curva, quam punctum N , perpetuo tangit; erit velocitas in loco E proportionalis radici quadratæ totius areæ $ABNE$: & si in recta eadem EN accipiat EM velocitati huiusmodi reciproce proportionalis, & sit MF curva, quam punctum M perpetuo tangit, & curvæ asymptotus sit AT , erit tempus, quo corpus decedit ex A in E , proportionalis areæ $ATFME$. Newtonus tres casus distincte evolvit, qui in natura habent locum, gravitatis constantis, ut est in corporibus prope terrestrem superficiem decidentibus, gravitatis decrescantis in simplici ratione imminutæ distantie a centro, quæ lex a superficie terrestri ad centrum accedendo, ut suo loco videbimus, deprehenderetur, & gravitatis distantiarum quadratis reciproce proportionalis, qua lege totum Planetarium systema moderatur. Abstractos alios casus generali constructione tantum a Newtono indicatos singillatim ad formulas analiticas revocavit, atque evoluit Eulerus Cap. III. Mechanicæ.

II. Si sit $m = 1$, & gravitas acceleratrix sit reciproce ut quadratum distantie, positis antecedentibus denominationibus erit $v = V \left(2gr^2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) = V \left(2gr^2 \cdot \frac{a - x}{ax} \right)$, & si motu ultra centrum continuato distantia x accipiat negative, imaginaria erit velocitatis expressio $r V \left(2g \cdot \frac{a + x}{-x} \right)$. Id generatim etiam

continget si m sit numerus quicumque par, & positivus, atque ob imparem exponentem $m - 1$, distantia x negative accepta, quantitas x^{m-1} fiat negativa: tunc enim quadrata radix quantitatis negativæ, qua exprimitur velocitas, evadet imaginaria. Hæc, & similia paradoxa, quas formulæ huiusmodi involvunt, Geometrarum ingenium aliquando exercuerunt, & cum de iis ageret Eulerus §. 271. Mechanicæ censuit hic calculo potius quam nostro iudicio fidendum esse. Vere tamen paradoxi species nulla est: cum enim secunda, quarta, & pares aliæ potestates cujuslibet quantitatis positivæ sint, physica lex gravitatis, quæ citra, & ultra centrum in partes adversas tendit,

analitice nequit exprimi, nec quempiam morari debent absurda absurde hypotheseos corollaria. Quod idem valet de absurdis omnibus hypothesibus, ut ea est, quam proposuit Eulerus §. 335., & qua tempora descensuum exprimerentur semiordinata BM circuli circa centrum C ad distantiam AC descripti, fig. 18., & in qua propterea tempus continuato ultra centrum motu decreveret.

III. Qui in hujusmodi formulis evolvendis se exercere volet observare poterit quod si sit $m = 1$ integratio ad logarithmos deducet, ac fiet $\frac{1}{v} v = gr. (\log. a - \log. x) = gr. \log. \frac{a}{x}$: quæ

quantitas ad infinitum radicale pertineret posito $x = 0$, & distantis negative acceptis imaginaria visa est Eulero §. 271. Mechanicæ: cum tamen juxta ea, quæ in Probl. LXII. Algebræ monuimus, esse debeat ipse logarithmus quantitatis $\frac{a}{x}$ ad basim, atque unitatem negati-

ve acceptam, & ad hyperbolam ex adverso positam relatus. Si sit m numerus positivus unitate major quantitas $\frac{1}{x^{m-1}}$ fiet semper infinita

cum erit $x = 0$, & infinita erit velocitas, quæ decidendo ad centrum usque acquiri poterit. Universim si requiratur altitudo z , ex qua corpus decidendo constanti vi gravitatis g velocitatem eandem v posset acquirere, posito $v dv = g dz$, fiet $dz = \frac{v^2 dx}{x^2}$, & inte-

grando erit $z = \frac{r^2}{m-1} \left(\frac{1}{x^{m-1}} - \frac{1}{a^{m-1}} \right)$: unde si sit m

numerus par unitate major, & distantia x negativa, absurdum aliud colligeretur altitudinis z negativæ. Generalis vero aliorum casuum, formularumque, quæ velocitatem corporum descendendum, & tempus descensus exprimunt, evolutio ad calculi exercitium potius quam ad legum naturæ, & ad phaenomenorum motus explicationem, atque ad Algebram potius quam ad Mechanicam videntur pertinere.

SCHOLION.

Generales formulas temporis, & velocitatis corporum libere decidentium in hypothesi qualibet vis centripetæ agentis in ratione aliqua multiplicata distantie a centro fusius evolvit Eulerus Capite

tertio Mechanicæ; & singulares formulas alias exhibuit, maxime pro-
iis casibus, in quibus vis esset reciproce ut potentia illa distantie quæ
exponentem haberet $\frac{2m+1}{2m-1}$, vel $\frac{m-1}{m}$, denotante m numerum

quemcumque integrum affirmativum. Qui hoc sibi argumentum ad
calculi exercitium deligeret plures alios singulares casus, ac formulas iis
facile posset adjicere. Hoc autem in loco cum potissimum inquiramus
quæ aut societatis commodis, aut naturæ phænomenis aliquo modo ap-
plicari possunt, generales formulas tantum attigimus, & singillatim il-
las tantum hypotheses liberi, ac rectilinei descensus corporum expli-
cavimus, quæ in natura habent locum, gravitatis constantis, & gra-
vitatís crescens in simplici ratione distantie a centro, aut decrescens
in ratione distantie reciproca duplicata. In subsequente capite
acturi de curvilineo motu corporum non nisi priorem illam gravita-
tis constantis, quæ in corporibus terrestribus locum habet, hypothe-
sim, & casus hypotheseos præcipuos evolvemus, & binas alias hypo-
theses, quæ ad physicam cœlestem pertinent, alteri Cosmographiæ
Volumini reservabimus.

CAPUT QUINTUM.

DE PROJECTIONE, ET OSCILLATIONE CORPORUM:

THEOREMA XV.

SI corpus libere projiciatur ex loco A , & secundum directionem
 ABC , fig. 60., & 61., & gravitas constans semper, & se-
cundum parallelas lineas agere intelligatur in punctis singulis;
corpus motu composito parabolam ATP describet, ad verticalem dia-
metrum AN , relatum, & diametri ipsius parameter quadrupla erit
altitudinis, ex qua decidendo corpus velocitatem primæ projectionis
acquireret.

Si corpus libere decideret ex puncto A spatia AD , AE descri-
beret quadratis temporum proportionalia: & si tota vis projectionis
exprimatur recta AB resolvaturque in binas alias, horizontalem
unam AF , & verticalem alteram FB , vi priore corpus spatia AF , AL
horizontaliter, & vi altera verticaliter spatia FB , LC describere

tem:

temporibus proportionalia. Vis autem horizontalis velocitatem corporis libere decidentis, aut verticaliter projecti minime afficiet: & vis *FB*, cum gravitati opponatur in fig. 60., addatur vero in fig. 61., efficiet ut parallelis ductis corpus in *R*, & *T* reperiat quibus temporibus ob solam vim horizontalem æqualiter ferri posset in *F*, & *L*. Erit igitur

$AD : AE = BR : CT = AF : AL = AB : AC = DR : ET$, nimirum puncta *A*, *R*, *T* ad parabolam pertinebunt verticali diametro *AN* descriptam. At vero corpus ob solam vim gravitatis in puncto quocumque *C* a tangente *AC* per spatium *CT* deviando velocitatem illam acquireret, qua duplum spatium *CT* æquali tempore absolvi posset, ut Coroll. I. Theor. XI. notatum est. Itaque velocitas projectionis ad velocitatem sola vi gravitatis conceptam in puncto *T* se habebit ut $AC : 2CT$, & si diametri *AN* parameter vocetur *P*, atque in parabola *ART* universim sit $P \cdot AD = DR^2$, & $P \cdot AE = ET^2$, & ex *A* in *E* decedendo corpus velocitatem acquirat æqualem illi, qua primum projiciebatur, statuaturque $ET = AC = 2CT = 2AE$, erit $P \cdot AE = 4AE^2$, & $P = 4AE$, nimirum diametri *AN* parameter *P* quadruplo major erit altitudine *AE*, ex qua libere decedendo velocitas illa acquiri posset, qua fit projectio ex *A* in *C*.

COROLLARIA.

I. Quia motus horizontalis verticali minime afficitur, variata semper parabolici motus directione, & velocitate constanter illud habebitur quod spatia horizontaliter percursa, & verticalibus lineis intercepta æqualibus temporibus sint æqualia, ac positis æqualibus *AF*, *FL*, si post finem dati temporis corpus utcumque projectum ex puncto *A* reperiat alicubi in recta *FB*, post æquale aliud tempus reperietur alicubi in recta *LC*. Hoc autem dato cum corpus relictum in *A*, & *R*, fig. 60, sublata vi gravitatis, æqualiter debeat excurrere per tangentes *AB*, *RX*, & spatia *AB*, *RX* æqualibus temporibus æqualiter percursa sint velocitatibus proportionalia; velocitates corporis in parabola moti erunt ut portiones tangentium, quas diametri æquidistantes intercipient, & velocitas in vertice *T* ad velocitatem in puncto quocumque *R* se habebit ut *FL* ad *RX*, sive ut semiordina-

ta ad tangentem. Hac verticalis, & horizontalis motus distinctione Galileæanum parabolici motus theorema sic demonstravimus ut exceptiones illas præcaveremus, quibus Balianus demonstrationem a Galilæo allatam olim notaverat.

II. Si data sit parabola ATP , & punctum A pariter datum sit, & diameter parabolæ AN producatur usque in M , fig. 62, & sit AM æqualis quartæ parti parametri ad diametrum AN pertinentis, ac corpus deciderit ex M in A , tum vero motus libero lapsu acquisitus reflexione, aut alia ratione aliqua in projectilem secundum tangentem AB mutetur, corpus parabolam propositam describet. Jam vero si parabolæ vertex sit T , axis TH , & p latus rectum principale, seu parameter ad axem TH pertinens; erit $P = p + 4TL$, ut in Coroll. I. Probl. XXVII. Algebræ dictum est. Quod si igitur in axe TH ultra verticem T continuato accipiat $TG = \frac{1}{2}p$, velocitas projectionis in puncto A ea erit, quæ acquiri posset cadendo ex G in L . Rectam GT Galilæus sublimitatem, TL altitudinem, & AP , quæ ex puncto A parallele ad horizontem ducitur, parabolæ amplitudinem appellavit, atque ita statuit projectionis velocitatem eam esse, quæ acquiri posset cadendo per altitudinem simul, & sublimitatem parabolæ.

III. Si in axe parabolæ TH accipiat TF æqualis quartæ parti lateris recti ejusdem p , erit F focus parabolæ, & si AC sit tangens parabolæ in puncto A , æquales erunt anguli FAC , FCA , CAM , ut in Probl. XXVI. Algebræ jam dictum est, & abscissa TL erit dimidiæ subtangenti LC , & toti rectæ TC æqualis. Erit igitur

$FA = FC = CT + TF = TL + \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}P = MA$: atque ita velocitas in quovis parabolæ puncto A ea erit, quæ acquiri posset cadendo per altitudinem æqualem distantie AF . Quare si centro A , & radio AF describatur circulus NF , in ipsius peripheria erunt focj parabolæ omnium, quæ data velocitate, & dato loco projectionis A , ac variata utcumque directione jactus, & angulo inclinationis ad horizontem CAP , describi possent. Ex hac parabolici motus proprietate aliæ proprietates omnes, & totius semitæ parabolice constructio eleganter, ac facile potest colligi. At aliæ simul constructiones commemorari hoc in loco debent, quæ mihi aliquando exciderunt, & quæ videntur etiam faciliores.

PRO-

Datis binis quibuscumque velocitate, amplitudine, & directione jactus tertiam determinare.

Analitice calculus sic instituitur. Si sit P parameter pertinet ad diametrum AN , fig. 62., & sit $\frac{1}{2}P$ altitudo AN , ex qua corpus libere decedendo velocitatem suæ projectionis acquireret, atque angulus CAL inclinationis ad horizontem vocetur φ ; erit $P \cdot CT = P \cdot \frac{1}{2}LC = P \cdot \frac{1}{2}AC \cdot \sin. \varphi = AC^2$, & $AC = \frac{1}{2}P \cdot \sin. \varphi$: Erit etiam $AL = \frac{1}{2}AP = AC \cdot \cos. \varphi$, atque ob $\sin. \varphi \cos. \varphi = \frac{1}{2} \sin. 2\varphi$, erit $AP = P \cdot \sin. \varphi \cos. \varphi = \frac{1}{2}P \cdot \sin. 2\varphi$. Itaque si ex tribus quantitatibus P , $\sin. \varphi$, AP binæ innotescant tertia etiam determinabitur.

Geometricæ vero constructio semitæ sic habebitur. Sit in fig. 63: projectionis directio AC , & AM altitudo debita projectionis velocitati, descriptoque semicirculo ABM , qui secet rectam AC in B , & per B ducta horizontali linea accipiat $KB = BT$. Erit etiam $AB = BC$, & $AK = CT = AE$, atque ita fiet $4AB^2 = AC^2 = ET^2 = 4 \cdot AM \cdot AK = P \cdot AE$, & punctum T ad parabolam pertinebit diametro AN , & parametro $4AM$ descriptam: & cum punctum T hac constructione determinatum sit unicum, & recta KBT curvæ non nisi semel possit occurrere; erit T vertex, TL altitudo, & $AP = 2AL$ amplitudo parabolæ, & vicissim data amplitudine, acceptaque $KB = \frac{1}{2}AP$ dabitur projectionis directio AC , aut data AP , & AB dabitur AM diameter semicirculi transeuntis per A , & B .

Ex superiore etiam corollario hæc alia eruetur Geometrica constructio. Si in fig. 62. detur directio jactus Ah , & sit AM altitudo, ex qua cadendo projectionis velocitas acquiri posset, projecti semita construatur capiendū angulum hAf æqualem angulo hAM , & radio AM circulem arcum describendo, qui secet rectam Af in F . Erit enim F focus parabolæ, ductaque verticali CFH , & horizontali AP , erit amplitudo parabolæ $AP = 2AL$, & bisecta LC in T , erit T vertex parabolæ.

Vicissim si data sit altitudo AM , & amplitudo AP , ipsique in L bisectæ erigatur perpendicularum LH , centroque A , & radio AM de-

describatur circularis arcus, qui secet perpendicularum in F , ac produ-
cto perpendicularo usque in C ut sit $FC = FA$, erit AC positio tan-
gentis, & parabolæ vertex T punctis L , & C ex æquo interjacebit.

Data pariter positione AC tangentis, sive angulo projectionis
 CAP , dataque amplitudine jactus AP , ipsaque bisecla in L , & bise-
cto in T perpendicularo LC habebitur vertex parabolæ, accipiendoque
æquales angulos LCA , CAF ut sint æquales rectæ FC , FA , erit
 FA altitudo illa, per quam libere decidendo, ob solam vim gravita-
tis, velocitas projectionis acquiri posset.

COROLLARIA.

I. Ex prior formula manifestum est quod cum data parametro
 P , dataque ideoque velocitate, quæ lapsu libero per $\frac{1}{2} P$ acquiritur,
& qua corpus projicitur ex loco A , parabolarum amplitudines AP sint
in ratione composita sinus, & cosinus anguli CAP inclinationis jac-
tus ad horizontem, sive in ratione simplici sinus dupli anguli CAP ,
cumque sinus omnium maximus sit ipse radius, data projectionis velo-
citate amplitudo maxima habebitur ubi angulus directionis CAP erit
semirectus, rectusque angulus $2CAP$: & vicissim data amplitudine
parabolæ AP , ubi angulus directionis sit semirectus, minima proje-
ctionis velocitate opus erit ad feriendum scopum in horizontali linea
positum in loco P . Id etiam ex constructione Geometrica manifestum
est: cum enim in fig. 63. semiordinata KB omnium maxima, quæ est
quarta pars amplitudinis maximæ AP , quadranti integro AB respon-
dere debeat, in casu amplitudinis maximæ semirectus erit angulus
 MAB , & angulo directionis CAP æqualis: quod primum experi-
mentis deprehendit Nicolaus Tartalea, Galilæus vero ex gravitatis le-
gibus collegit.

II. Data altitudine AM , quæ datæ velocitati projecti corporis respon-
det, eadem constructione, fig. 64., determinari poterunt altitudines, &
amplitudines parabolarum directioni cuilibet AB , sive Ab respondentium
jactu enim per Ab facto, & posita $kt = kb$, $Ap = kt$, erit Ap
amplitudo, & tl altitudo parabolæ, quæ respondebit directioni jactus
 Ab . Cum vero acceptis hinc inde a centro O æqualibus OK , Ok ,
binæ semiorinatæ KB , kb æquales sint inter se, binæ erunt dire-
ctiones jactus AB , Ab , quibus amplitudo eadem Ap habebitur: cum-

Mechanica.

N

que

que insuper radio Oo ducto arcus oB , ob , & anguli BAo , bAo æquales sint inter se, & sit angulus oAp semirectus; amplitudines parabolarum a projectis eodem impetu explosis factarum, juxta elevationes per angulos æquales supra, & infra a semirecto distantes, æquales erunt inter se, ut fert Theor. V. Dial. IV. Galilæi. Inferior directio eligitur cum impetu horizontali opus est, ut cum munimenta tormentis ferienda sunt: superior cum recta pilis mortario ejectis, atque ex alto cadentibus debent percuti.

III. Si instituto semel experimento innotescat amplitudo maxima horizontalis, quæ dato impetu projectionis, dato videlicet tormento, dataque pulveris pyrii specie, ac quantitate, semirecto directionis angulo attingitur, quæ in minoribus tormentis, ut vocant *colubrine*, passuum 500 esse solet, facile invenietur quæ jactus directio esse debeat ut iisdem subsidiis feriat corpus ad datam aliam distantiam in plano horizontali constitutum, si scilicet ratio radii ad semiordinatam KB accipiat eadem quæ amplitudinis maximæ ad amplitudinem propositam. Ita si objectum ad 400 passuum distantiam sit positum, accipiatque radius ad sinum rectum ut 5:4, sinus hujusmodi KB in tabulis respondere deprehendetur arcui AB graduum 53, & minorum 8, & cum inde ad quadrantem supersint gradus 36, & minuta 52, dimidium accipiendo bini jactus proposito satisfaciunt, qui gradibus 18, & minutis 26 supra, & infra angulum semirectum æqualiter dirigantur. Eandem rationem sequemur modo in directione jactus determinanda cum scopus supra, aut infra horizontem in plano inclinato erit positum: quod problema Torricellius primo, ac deinde Anderfonius, Hallejus, Roemerus, Hireus, Grandus, Simpsonius, aliique aliis rationibus solverunt.

PROBLEMA XIII.

Data amplitudine maxima, quæ habetur in plano horizontali, invenire directionem jactus, qua percuti possit scopus dato angulo ad datam distantiam elevatum supra horizontem.

Sit in fig. 65. amplitudo maxima AP , quæ dato tormento, globo, ac pulvere pyrio sub semirecto directionis angulo habetur, inquiraturque directio AB , qua scopus R possit percuti. Fiat $AP = a$, $AF = b$, $FR = c$, & tangens quæsitæ anguli BAB vocetur t .

Erit

Erit $FB = bt$, $BR = AD = bt - c$, $AB = DR = b \cdot \sqrt{1+c}$; ac parameter ad diametrum AN pertinens quadrupla erit altitudinis debite jactus velocitati, & dupla amplitudinis maximæ. Erit igitur ob naturam parabolæ $2a \cdot AD = 2a \cdot \frac{bt - c}{b} = b^2 (1 + c)$; unde ordinata æquatione, & quadratica radice extracta eruetur $c = \frac{a}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{a^2 - b^2 - 2ac}$.

Geometrice etiam resolvetur problema si ex R in AB demissa perpendiculo RG , ob similitudinem triangulorum ABF , RBG , atque ob analogiam $AB : AF = BR : RG$ loco AD , seu BR in æquatione parabolæ scribamur $\frac{AB \cdot RG}{AF}$. Tum enim reductis termi-

nis ordine habebimus

$$2AP \cdot AD = 2AP \cdot \frac{AB \cdot RG}{AF} = DR^2 = AB^2,$$

& $2AP \cdot RG = AB \cdot AF$: quæ æquatio vertetur in has alias

$$2AP \cdot RG \cdot \frac{AF}{AB} = AF \cdot \frac{AF}{AR}$$

$$2AP \cdot \sin. BAR \cos. BAF = AF \cdot \cos. RAF:$$

& si loco $\sin. BAR$, $\cos. BAF$ ex formulis trigonometricis accipiamus dimidium sinum summæ angulorum BAF , BAR dempto sinu dimidio differentiæ, si scopus R supra horizontem jaceat, habebimus

$$AP \sin. \frac{2BAF - RAF}{2} = AP \cdot \sin. RAF = AF \cdot \cos. RAF$$

& si scopus r jaceat infra horizontem, & angulus RAF negative accipi debeat, erit resoluta æquatio problematis

$$AP \cdot \sin. \frac{2BAF + RAF}{2} + AP \cdot \sin. RAF = AF \cdot \cos. RAF.$$

COROLLARIA.

I. Ex prioris æquationis inspectione patet non amplius locum esse problemati cum fuerit $b^2 + 2ac$ major quam a^2 , & $a^2 - b^2 - 2ac$ quantitas imaginaria. Patet etiam unicum esse casum problematis, atque esse $c = \frac{a}{b}$ cum fuerit $a^2 - b^2 - 2ac = 0$: unde cum

extracta radice prodeat $a = c \pm \sqrt{c^2 + b^2}$, rejecta radice negativa, quæ ad problema propositum non pertinet, fiet pro eodem

N 2

casu

casu $a = AP = c + \sqrt{(c^2 + b^2)} = AR + FR$. Patet insuper extra hos casus duplicem jactus directionem esse, quæ problemati satisfacit, & quæ exhibetur geminato signo æquationis

$$c = \frac{a \pm 1}{b} \sqrt{(a^2 - b^2 - 2ac)}. \text{ Si data tangente } t \text{ anguli}$$

directionis jactus inquiratur altitudo debita velocitati, qua scopus datæ altitudinis supra horizontem ad daram distantiam posset percuti, resoluta æquatione $2a \cdot bt - c = b^2 \cdot t + t^2$, fiet $a = \frac{c + t^2}{bt - c}$.

II. Si instituto semel experimento amplitudinis maximæ, quæ datis omnibus tormenti conditionibus semirecto directionis angulo attingitur, intra eamdem amplitudinem scopus alius proponatur supra, aut infra horizontem positus, ope illius æquationis construi poterunt tabulæ angularum, quibus ad sciendum scopum inclinari debet tormentum ad horizontem. Ut si amplitudo maxima AP sit pedum 8000, distantia AF pedum 1600, & angulus RAF elevationis scopi supra horizontem sit $8^\circ 15'$, anguli tangens 0.1449931, adeoque RF sit pedum 812, substitutis numeris, & superiore signo accepto prodibit $t = 2.22$, quæ tangens angulo $65^\circ 45'$ respondet: accepto autem signo inferiore $t = 0.637$, quæ tangens respondet angulo $32^\circ 30'$. Bini ergo anguli $65^\circ 45'$, & $32^\circ 30'$ inclinationis tormenti ad horizontem proposito satisfaciunt. Id ipsum ex posterioribus etiam hujus problematis æquationibus colligitur.

III. Ex æquatione illa $2AP \cdot \sin. BAR \cdot \cos. BAF = AF \cdot \cos. RAF$ manifestum est insuper horizontalem scopi distantiam ad duplam amplitudinem maximam se habere in ratione composita: cosinus inclinationis tormenti cum horizonte ad cosinum elevationis scopi supra horizontem ipsum, & sinus elevationis tormenti supra scopum propositum ad sinum totum. Pariter si loco AF scribamus $AR \cdot \cos. RAF$, quadratum cosinus inclinationis plani propositi AR ad horizontem erit ad rectangulum sinus inclinationis tormenti ad planum, & cosinus inclinationis tormenti ad horizontem ut dupla amplitudo maxima AP ad amplitudinem AR . Theoremata, ac formulas hujusmodi alia ratione exhibuit Simpsonius in Exercitationibus Mathematicis: inde autem reliquæ authoris ejusdem formulæ illico possent colligi.

Ita

Ita si posterioris æquationis termini dividantur per $\cos. RAF$ prodibit
 $AF + AP \cdot \tan. RAF = \frac{AP \cdot \sin. \angle BAF - RAF}{\cos. RAF}$, quam for-

mulam Simpsonius tradidit in Propof. III. de Motu Projectorum.

IV. Posita æquatione $AR \cdot \cos. RAF = AP \cdot \sin. \angle BAF - RAF = AP \cdot \sin. RAF$, dataque amplitudine maxima AP in plano horizontali, & datis angulis RAF , ARF , amplitudo AR in plano proposito fiet maxima cum sinus anguli $\angle BAF - RAF$ erit æqualis radio. Quod si igitur in fig. 66. accipiatur BAN æqualis angulo BAF , in casu amplitudinis maximæ AR erit angulus RAN rectus: & si pariter rectus sit angulus FAM , ob æquales angulos RAF , MAN , erit angulus RAB æqualis angulo BAM : atque ita dato projectionis impetu amplitudo maxima habebitur in dato plano ubi projectionis directio bifariam secabit angulum distantie plani a vertice. In hoc etiam casu erit $\cosinus BAF = \cos. BAN = \sin. BAR$, adeoque fiet $2AP \cdot \sin. BAR \cdot \cos. BAF = 2AP \cdot \cos. BAF = AR \cdot \cos. RAF$. Ita igitur si amplitudo maxima in plano horizontali ut antea statuatur pedum 8000, & sit angulus acclivitatis plani $12^\circ 30'$, atque ad angulum rectum superfint $77^\circ 30'$; erit $38^\circ 45'$ angulus, quo amplitudo maxima jactus habebitur: & si fiat ut quadratum cosinus anguli $12^\circ 30'$ ad quadratum sinus $38^\circ 45'$, ita 16000:6577, erit pedum 6577 amplitudo maxima, quæ in plano proposito acclivitatis eodem impetu projectionis haberi poterit.

V. Si quæ aliæ superfint hujus generis regulæ, atque analogiæ ex iisdem principiis facile colligentur, eademque ratione declinatis difficultatibus, quæ in velocitate jactus, & vi pulveris, accensionisque æstimanda possent occurrere, omnibus Ballisticæ problematis satisfiet præmissis tantum experimento amplitudinis maximæ, quæ in plano horizontali datis pulveris pyrii, ac tormenti conditionibus semirecto directionis angulo haberi potest. Quæ cum sublata medii resistentia omnino accurata sint, spectata medii resistentia erunt veris propiora quantum ad praxim sufficit. Hac enim resolvendorum problematum ratione non omnis quidem resistentia aeris negligenterur, sed differentia tantum resistentiarum, & dissimilitudo semitæ, quæ in casu maximæ amplitudinis, atque in casibus aliis haberetur: & cum variata velocitate non omnia quidem motus proje-

ctilis

Nullis elementa similiter variantur, sed proportionē habita minus variari debeant singula ubi velocitas iacūs est minor, & minor esse debeat deflexio a recto tramite; ex amplitudine maxima ut antea supputatus projectionis angulus major erit vero, atque ita limes habebitur, infra quem vere angulus idem consistet. Quæ norma in primis utilis erit iis, qui prædixæ tantum feriendis scopis assuescunt, nec iis etiā negligenda erit, qui elementa resistentiæ aeris non omnino certa esse noscunt, & exhibitos hactenus calculos semitæ in resistente medio descriptæ non omnino institutis experimentis conformes esse deprehendunt.

PROBLEMA XIV.

Si corpus in minimis circuli arcubus descendat descensuum tempora determinare.

Si corpus in circulari arcu KBD , fig. 67., descendere incipiat ex loco K , juxta Coroll. II. Theor. XII., cum ad punctum quodlibet B pervenerit, velocitatem eandem habebit, quæ acquiri posset libere descendendo ex L in M , &, juxta Coroll. I. Theor. XI., erit hujusmodi velocitas $\sqrt{2LM}$. Tum si elementum arcus BF adeo exiguum assumatur ut motus ex B in F spectari possit tanquam æquabilis, spatio per velocitatem diviso erit tempus descensus ex B in F $= \frac{BF}{\sqrt{2LM}}$ & supra LD descripto semicirculo LND , qui secet semiorbitam MB in N , cum sit $LM \cdot MD = MN^2$, & $2LM = \frac{2MN^2}{MD}$,

erit tempus idem descensus $\frac{BF}{\sqrt{2LM}}$, & summas quantitarum $\frac{BF}{\sqrt{2LM}}$

hujusmodi accipiendo habebitur tempus descensus ex K in D .

Ut summæ hujusmodi possint accipi observandum est primo quod si ex F in MB ducatur perpendicularum FO triangulum rectangulum FOB veluti rectilineum spectari poterit, & cum angulum FBO habeat æqualem angulo BAD , simile erit triangulo rectilineo BMA , eritque $MB : AB = FO : BF = MQ : BF$, & elementum arcus BF fiet $= \frac{AB \cdot MQ}{MB}$. Deinde observandum est quod cum

sit $MB^2 = 2AB \cdot MD - MD^2$, binis hisce factis substitutionibus erit

erit alia expressio temporis $\frac{AB \cdot MQ \sqrt{\frac{1}{g}}}{MN \cdot \sqrt{1AB - MD}}$: quæ expressio

aliis Algebrae subsidiis in infinitam seriem converti posset, summisque in unoquoque seriei termino acceptis tempus descensus per quemcumque arcum KD accurate posset definiri.

Sed si arcus KD , & sinus rectus MB adeo parvus intelligatur, ut sinus versus MD præ diametro $1AB$ possit negligi, sola geometriæ subsidia ad definiendum tempus sufficient. Nam loco $1AB - MD$ scribendo tantum $1AB$, fiet idem tempus descensus $\frac{MQ \sqrt{AB}}{1MN}$: &

cum LD bisecta in P , ductoque radio PN , in semicirculo etiam LND esse debeat $MN : PN = MQ : NR$, loco MQ scribendo $\frac{MN \cdot NR}{PN}$,

erit tempus descensus ex B in $F = \frac{NR \cdot \sqrt{AB}}{1PN}$, ubi cum unica tan-

tum quantitas variabilis NR occurrat, summas omnium accipiendo, totum tempus descensus per arcum exiguum KBD æquabitur semiperipheriæ LND per diametrum LD divisæ, ac ductæ in $\sqrt{AB}$.

COROLLARIA.

I. Quia $\frac{LND}{LD}$ exprimit rationem semiperipheriæ ad radium, quæ

ratio in unoquoque circulo est eadem, si plures arcus KD , BD proponantur eodem radio AB descripti, & satis exigui sint singuli, idem in unoquoque arcu erit tempus descensus: & si filo AB corpus aliquod suspendatur ex centro A , ac descendendo circulearem arcum describat, totaque descensus velocitate ex adversa parte ad æqualem altitudinem ascendat, atque oscillationes plures ex itu, & reditu compositas absolvat; tempora oscillationum per inæquales etiam arcus, si singuli exigui sint, erunt inter se æqualia: quod primum in lampade Pisane Ecclesiæ observavit Galilæus; deficientibus autem aliis Geometriæ infinitesimalis subsidiis demonstrandum aliis reliquit. Galilæus etiam post felicem illam lampadis observationem cum usum penduli ad accuratam mensuram temporis proposuisset, analogia quadam illusus in majoribus etiam circuli arcubus oscillationum æquidurnitatem haberi censuit: atque huic principio innixus instrumen-

tum

tum excogitavit, quo nautæ ad differentiam longitudinum æstimandam uterentur.

II. Quoniam tempus descensus per dimidiam penduli longitudinem $\frac{1}{2} AB$, juxta alias formulas antecedentes esse debet $\sqrt{AB}$, tempus descensus per circulem arcum exiguum, seu tempus dimidiæ oscillationis in exiguo circulari arcu, erit ad tempus descensus per dimidiam longitudinem penduli ut semiperipheria circuli ad diametrum: ad tempus autem descensus per duplam penduli longitudinem, seu per descripti circuli diametrum, se habebit ut quadrans circuli ad diametrum: & cum juxta Coroll. I. Probl. IX. tempora descensus per diametrum, & per subtenfam quamlibet circuli ex puncto inferiore ductam æqualia sint, non amplius æqualia erunt tempora descensus per circulem arcum utcumque exiguum, & per subtenfam. Keillius, Parentius, alique æquidururnitatem oscillationum in minimis circuli arcubus ex eo collegerant, quod subtenfa ultimo æqualis fiat arcui, & quod tempus descensus per subtenfam semper sit idem: At vero considerari debet quod non eadem subtenfæ, & arcus utrumque exigui positio est, quodque idcirco ex longitudinis æqualitate æqualitas temporum minime potest colligi.

III. Si data sit longitudo penduli uno minuto secundo temporis oscillationem unam ex descensu, & ascensu compositam in circulari arcu exiguo absolventis, erit tempus descensus per dimidiam eandem longitudinem ad tempus unius secundi ut diameter ad peripheriam: & quia spatia libero lapsu absoluta sunt in ratione duplicata temporum, erit dimidia longitudo penduli ad spatium, quod uno minuto secundo temporis corpus libere decedens absolveret, in duplicata ratione diametri ad peripheriam. Quare cum diameter ad peripheriam se habeat ut 100000 : 314159, si longitudo penduli simplicis uno secundo temporis Romæ in latitudine $44^{\circ} 54'$, quæ non nisi $34'$ nostra latitudinis est major, ex Clarissimorum le Seur, & Jacquier observationibus assumatur pedum Parisiensium 3, & linearum 8.38, erit 15 pedum, unius pollicis, & lineæ $1 \frac{1}{2}$ spatium, quod corpus uno secundo decedens in vacuo absolveret. Et si longitudo penduli uno secundo oscillantis Parisiis cum Hugenio statuatur pedum 3, &

li-

linearum $8 \frac{1}{2}$, erit spatium libero lapsu absolutum pedum 15, & pollicum $1 \frac{1}{2}$.

IV. Si varietur longitudo penduli AB tempus etiam oscillationis variabitur in ratione longitudinum subduplicata: & vicissim longitudo pendulorum erunt in ratione duplicata temporum integrarum oscillationum: & quia numerus oscillationum eodem tempore absolutarum est reciproce ut tempus unius oscillationis, longitudo pendulorum erunt reciproce in duplicata ratione numeri oscillationum eodem tempore absolutarum. Si vim acceleratricem gravitatis variari intelligamus, cum juxta Coroll. I. Theor. XI. tempora descensuum generatim sint ut velocitates directæ, & gravitas acceleratrix reciproce: velocitates vero sint in ratione subduplicata gravitatis acceleratricis, spatiorumque libero lapsu percursorum: adeoque descensuum tempora sint in ratione directâ subduplicata spatiorum, & subduplicata reciproca gravitatis; generatim etiam oscillationum tempora erunt in subduplicata ratione longitudinis pendulorum directæ, & subduplicata gravitatis reciproce. Id ad praxeos rationem sufficit, cum non nisi pendula circularia ad mensuram temporis modo adhiberi soleant. At ingeniosum etiam pendulorum cycloidaliū inventum simili methodo explanandum hoc in loco est.

PROBLEMA XV.

Si corpus in cycloidali quolibet arcu descendat descensuum tempus determinare.

Si in fig. 68. sit CNR semicyclois baseos PG , & altitudinis PR ; ac corporis descensus incipiat ex puncto F , ducanturque FA , NC , QC parallele basi PG ; erit ut antea velocitas descensus in puncto $N = \sqrt{1AC}$, & si puncta N , Q accipiantur inter se proxima, erit tempus descensus ex N in $Q = \frac{NQ}{\sqrt{1AC}}$. Ea vero cycloidis proprietates

est, quod si diametro PR describatur semicirculus PMR , qui secet semiorinatam CN in M , subtensa RM sit tangenti puncti N , & arcui exiguo NQ parallela, & sint similia triangula CMR , nNQ ; ut initio capitis octavi Algebræ explicatum est. Itaque loco NQ scribendo $RM \cdot nQ$ fiet idem tempus descensus

$$\frac{CR}{\text{Mechanica.}}$$

O

RM.

$$\frac{RM \cdot Cc}{CR \cdot \sqrt{2AC}} = \frac{Cc \cdot \sqrt{PR \cdot CR}}{CR \cdot \sqrt{2AC}} = \frac{Cc \cdot \sqrt{PR}}{\sqrt{2AC} \cdot CR} \text{ Jam vero}$$

si diametro AR describatur semicirculus AOR , & centrum semicirculi sit V , erit $AC \cdot CR = CO^2$, & $Cc = CO \cdot \frac{AO}{AV}$. Itaque erit tem-

$$\text{pus descensus } \frac{Cc \cdot \sqrt{PR}}{CO \cdot \sqrt{2}} = \frac{Oo \sqrt{PR}}{AV \cdot \sqrt{2}}, \text{ & cum quantitates } AV,$$

& PR constantes sint, summam elementorum omnium Oo accipiendo, tempus totius descensus ex F in N erit $AO \cdot \frac{\sqrt{PR}}{AV \sqrt{2}}$, & tempus in-

tegrī lapsus per cycloidalem arcum FNR , erit $\frac{AOR \cdot \sqrt{PR}}{AV \cdot \sqrt{2}}$, vel

$$\text{etiam } \frac{PMR \cdot \sqrt{PR}}{\frac{1}{2} PR \cdot \sqrt{2}}, \text{ aut denique } \frac{PMR}{\frac{1}{2} \sqrt{2} PR}$$

COROLLARIA.

I. Cum igitur semiperipheria per radium divisa eundem semper valorem duorum rectorum angulorum exhibeat, in data cycloide CNR idem semper erit tempus, quo corpus ex quovis puncto F , aut N descendet usque ad infimum punctum R : & cum tempus descensus per cycloidis altitudinem PR sit $\sqrt{2PR}$, tempus descensus in quovis cycloidali arcu erit ad tempus descensus per totam cycloidis altitudinem ut $PMR : PR$, sive adhuc ut semiperiphētia ad diametrum. Insuper tempus descensus ex F in N erit ad tempus descensus ex N in R ut arcus AO ad arcum OR : & cum initio ducto ex puncto G tempus descensus ex G in N sit $PpM \cdot \frac{\sqrt{PR}}{\frac{1}{2} PR \cdot \sqrt{2}}$, & tempus descensus per

altitudinem PC sit $\sqrt{2PC}$, tempus descensus per PC erit ad tempus descensus per æque altum cycloidis arcum ut $\sqrt{PR \cdot PC} : PpM$, sive ut subtenſa PM ad arcum: ac denique cum tempus descensus per subtenſam PM , quod idem est tempus descensus per totam diametrum PR , sit ad tempus descensus per altitudinem PC ut $PM : PC$, tempus etiam descensus per subtenſam erit ad tempus descensus per CN ut $PM^2 : PpM$, sive ut diameter PR ad arcum PpM .

$\frac{PC}{PR}$

II.

II. Si filum KXN semicycloidi circumplicetur, evolvaturque ut semper semicycloidem tangat in aliquo puncto X , altero fili extremo N describetur semicyclois GNN priori æqualis, ac subverse posita, quemadmodum in Coroll. III. Probl. LXVI. Algebrae dictum est; si pendulum longitudinis KR constituatur inter duas laminas semicycloidales altitudinis $\frac{1}{2} KR$, quæ se invicem tangant in puncto K , corpus descendendo, atque ascendendo, describet cycloidem aliam altitudinis æqualis, & sive ex G , sive ex N incipiat descensus, oscillationes omnes minores majoresque erunt æquidistantes: eritque tempus integræ oscillationis ad tempus liberi descensus per dimidiam longitudinem penduli ut peripheria circuli ad diametrum: & quia si punctum F , unde incipit descensus, sit propius infimo puncto R cycloidalis arcus abit in minimum circulem arcum centro K , & radio KR descriptum, eadem erit ratio oscillationum in minimis arcibus circularibus absolutarum. Celebrem hunc usum cycloidis proposuit primum Hugenius, atque elegantissime demonstravit in suo Horologio Oscillatorio. Cycloidalem theoriam in hoc problemate contraximus: ad praxim vero pendula circularia sufficere jam antea diximus.

III. Cum tempus descensus ex G in N sit PpM , & tempus de-

$$\sqrt{\frac{1}{2} PR}$$

scensus per altitudinem quamvis propositam Gg , fig. 69., sit $\sqrt{2 Gg}$, temporibus exæquatis erit arcus $PM = \sqrt{PR \cdot Gg}$. Quod si igitur circularis arcus PM accipiat medium proportionalis inter diametrum PR , & altitudinem eandem Gg , ducaturque CMN basi cycloidis PG parallela, corpus æquali tempore per cycloidalem arcum CN , & altitudinem Gg descendet: eodemque modo si aliis circulis genitoribus cycloides aliæ describantur, quæ incipiant ex puncto G , accipiatque arcus, qui sit medius proportionalis inter diametrum alterius circuli, & eandem altitudinem Gg , ac parallela ad basim ducta signetur similiter punctum n , cycloidalis arcus Cn adhuc æquali tempore a corpore descendente absolvi poterit. Hac ratione Joannes Bernoullius signare docuit curvam Nng , ad quam corpus æquali tempore per cycloides quoscunque arcus CN , Cn , & per verticalem altitudinem Gg perveniet. Sed alia etiam insignis proprietas cycloidis

est, quam primo Bernoullius idem derexit, ac deinde Jacobus frater, Newtonus, Leibnitius, Hugenius, Hopitalius, Grandus aliis rationibus explicarunt, quod scilicet brevissimi descensus curva sit cyclois, quodque cum analytice, & breviter jam indicatum fuerit in Coroll. IV. Probl. CXXVII. Algebrae, synthetica demonstratione, quam olim conscripseram, modo exornandum est.

THEOREMA XVI.

Si velocitates corporis ex puncto N , fig. 70., ad rectam ιQ , & inde ad punctum T transeuntis datæ sint, ductaque Nn parallela ipsi ιQ , & perpendicularibus Qn , Tt , sit sinus anguli NQn ad sinum anguli QTt ut velocitas per NQ ad velocitatem, qua percurritur recta QT ; corpus per binas rectas NQ , QT citius feretur quam per alias quaslibet Ny , qT iisdem terminis N , T comprehensas.

Ducatur ex q in NQ perpendicularum qo , & ipsi QT in Q erigatur perpendicularum QO , cui rursus ex q occurrat perpendicularum aliud qO . Cum sint æquales anguli Qqo , NQn , qui cum eodem qQo efficiunt unum rectum, similia erunt triangula rectangula qQo , QNn , eritque $Qo = \frac{Nn \cdot Qq}{QN}$. Pariter cum angulus TQO sit rectus, æqua-

les erunt anguli TQt , OqQ , qui cum eodem qQO efficiunt rectum alterum, similia erunt triangula QqO , TQt , eritque $qO = \frac{\iota Q \cdot Qq}{TQ}$.

Itaque erit $qO : Qo = \frac{\iota Q}{TQ} : \frac{Nn}{QN}$, sive erunt spatia qO , Qo proportio-

naliter velocitatibus, quibus percurrentur rectæ QT , NQ , & quibus etiam qT , Nq juxta hypothesein absolvi possent. Scilicet spatium Qo velocitate $\frac{Nn}{QN}$ eodem tempore absolvetur, quo spatium qO absolvi posset velocitate $\frac{\iota Q}{TQ}$. Sed est qX majus quam qO , Ny majus quam No , ac TX

majus quam TQ . Itaque duæ simul rectæ Ny , qT iisdem terminis N , T comprehensæ absolventur semper majore tempore quam duæ priores NQ , QT .

COROLLARIUM.

Si velocitas, qua corpus ad rectam aliquam CN pervenit, inde ad

ad rectam cQ transeundo utcumque augeatur, corpus a puncto N ad punctum T per unicam lineam rectam, quæ omnium est brevissima, brevissimo tempore non perveniet, sed per duo plana debet ferri, ad perpendiculum, quod in N , & Q ad rectas illas ducitur, sic inclinata ut sinus deviationis a perpendiculo sint proportionales velocitatibus. Quod cum in corpore libere decidente de singulis incrementis velocitatis, & spatii percursum valeat, hoc ipso manifestum est lationem omnium brevissimam inter duo puncta, quæ in eadem verticali linea non jaceant, per unicam lineam rectam non fieri. Inde etiam facile colligeretur brevissimi descensus lineam non esse circularem ut primo suspicatus fuerat Galilæus. Ex serie autem Galilæanæ demonstrationis in Theor. XXII. de motu naturaliter accelerato nihil aliud colligitur, quam quod per circuli arcum citior quam per subtensam descensus haberi possit. Quosdam brevissimi descensus casus Galilæus Geometrice examinaverat in tribus aliis theorematibus præcedentibus, ejusmodi sunt illi in quibus quaeritur qua plani inclinatione corpus aut a recta positione data ad punctum datum, aut a puncto dato ad rectam positione datam brevissimo tempore transire possit. Problema brevissimi descensus generaliter propositum, ac resolutum est a Joanne Bernoullio in Actis Lipsiensibus anni 1696: resolutio autem ope theorematum antecedentis facillima evadit.

PROBLEMA XVI.

Datis duobus punctis, quæ in eadem verticali, aut horizontali linea non jaceant, invenire qua in curva corpus brevissimo tempore ab uno ad aliud dilabi possit.

Si in fig. 70. duo puncta proposita sint G, R , ut quæ curva per G , & H ducitur descensum exhibeat breviorē quam per aliam curvam quācumque iisdem terminis comprehensam, oportet ut quævis etiam curvæ elementa NQ , QT minore tempore absolvi possint, quam elementa alia Nq , qT comprehensa terminis N , & T : secus cum eadem sit velocitas in puncto T per quācumque demum curvam ex data altitudine fiat transitus ad punctum T , si citior esset descensus per NqT quam per NQT , per curvam etiam $GNqTH$ citius transiret corpus ex G in H . Ut autem elementa NQ , QT absolvantur omnium citissime ratio $NQ : \frac{NQ}{QN \cdot TQ}$ eadem esse debet quæ
ca

velocitatis per NQ ad velocitatem per QT : & quia si descensus ex altitudine PC incipiat velocitatum ratio est $\sqrt{PC} : \sqrt{Pc}$, erit in curva brevissimi descensus $\sqrt{PC} : \sqrt{Pc} = Na : rQ$. Quod cum de

singulis curvæ elementis valeat, si ab uno ad aliud transeundo fiat denique $Pc = PR$, atque in vertice curvæ R fiat $rQ = TQ$, erit $\sqrt{\frac{PC}{PR}} = \frac{Na}{QN} = \sin. NQa$, quam esse primariam proprietatem

cycloidis per G , & H ductæ ostendimus in Corollario II. Probl. LXVI. Algebræ.

COROLLARIA.

I. Curva igitur brevissimi descensus, quæ Græco vocabulo Brachystochrona appellari consuevit, eadem curva est, cujus minores, majoresque arcus in punctum infimum desinentes æquali tempore describuntur, quæque idcirco Tautochrone dici solet. Tautochronæ inventionem Christiano Hugenio debemus, ut dictum est, Brachystochronæ Joanni Bernoullio, qui etiam curvam Synchronam excogitavit, ad cujus scilicet puncta singula æquali minimo tempore ex superiore aliquo puncto corpus dilabi posset. Facile autem intelligitur Brachystochronam, Tautochronam, Synchronam eandem esse si corpus in plano aliquo descendat inclinato ad horizontem. Cum enim vis, qua in plano inclinato corpus ad descensum sollicitatur, sit constans, atque ad totam vim gravitatis se habeat in constanti ratione altitudinis plani ad longitudinem, calculi, ac demonstrationis totius series pro unaquaque curva in plano inclinato determinanda manebit eadem,

II. Facile etiam describi poterit cyclois, quæ per duo puncta proposita G, H transeat, & per quam citissimus ab uno ad alterum punctum descensus haberi possit. Nam si duo eadem puncta jungantur recta GH , fig. 69., & semicirculo quovis genitore pfr describatur semicyclois Gr , quæ ex G incipiat, & quæ rectam GH secet in puncto F , atque ad GF, GH , & diametrum semicirculi pr accipiatur quarta proportionalis PR , erit PR diameter semicirculi PMR , quo semicyclois quæ sita GHR gignitur, & semicycloidis basis PG æqualis erit semiperipheriæ PMR . Cum enim cycloides omnes manifeste sint

simi-

similes inter se, ubi initio motus ducto ex puncto G æqualibus angulis ad horizontalem GP inclinentur, revolvanturque semicirculi pfr , PMR , portiones etiam cycloidum CF , GNH , eodem modo determinatæ erunt similes inter se, atque ad ipsas æqualibus angulis inclinatæ rectæ CF , GH erunt homologis aliis figurarum similium lateribus pr , PR proportionales. Hoc etiam modo cycloidem per duo data puncta transeuntem describere docuit Joannes Bernoullius in Actis Lipsiensibus anni 1697.

III. Si sit proposita quævis curva Nag , fig. 69., atque ad ipsam minimo tempore corpus dilabi debeat ex puncto G , & minimi descensus curva sit Gn , ea non nisi cyclois esse poterit, quæ curvæ propositæ Nag occurrat ad rectos angulos. Cum enim ex dato puncto G ad datum punctum n occursum cum curva eadem proposita citissimus descensus per cycloydalem arcum fieri debeat, si extremum elementum arcus sit on , nec tamen angulus ong sit rectus, nec recta on sit brevissima, quæ ex puncto o ad curvam Nag duci potest, data velocitate omni descensus in puncto o per elementum aliud continuum citior descensus haberetur: quod cum generatim pro curva quavis Nag valere debeat, peculiaris casus habebitur si curva in lineam rectam degeneret utcumque inclinatam ad horizontem, atque ex puncto dato ad propositam rectam citissimus per cycloidem illam fiet transitus, quæ rectæ recto pariter occurret angulo.

IV. Cum tempus descensus per cycloidalem arcum quemcumque ab inferiore puncto supputatum ad tempus descensus per totam cycloidis altitudinem sit in constanti ratione peripheriæ circuli ad diametrum, cumque a dato quovis puncto G ad verticalem aliquam PR tempus descensus in cycloide illa fiat minimum, quæ verticali occurrat ad rectos angulos, minimum minimorum omnium in cycloide illa habebitur, quæ insuper altitudinem, ac diametrum circuli genitoris habeat minimam, quæ scilicet in G incipiat, atque in PR desinat, & basim dimidiam æqualem habeat distantie puncti G a recta PR . Nam quæ inferius semicycloides in punctum aliquod rectæ ejusdem desinunt, & cum per punctum G transeant ex superiore puncto alio incipiunt, si parallele ad PR deorsum trahi intelligantur basi ad rectam usque PG deducta, manifeste majorem basim quam

quam PG , & altitudinem majorem exhibebunt quam PR : quod alia ratione primum ex *synchronæ* suæ consideratione *Joannes Bernoullius* collegerat.

SCHOLION.

Quam primum differentialis, atque integralis calculus Mechanicis, & Physicis investigationibus applicari cœpit, problemata celeberrima proposita, ac resoluta sunt curvarum *brachystochronæ*, *tautochronæ*, *synchronæ*, solidi quod juxta axis directionem motum in fluido aliquo minimam resistantiam patiatur, figuræ lintei a vento inflati, laminæ elasticæ incurvatæ, catenæ ab utroque extremo libere suspensæ, curvæ in qua pondus aliquod descendens cum ponte sublicio semper æquilibrium constituat, curvarumque in quibus corpus descendens vi gravitatis æqualibus temporibus æqualiter accedat ad punctum datum, vel a dato puncto æqualiter recedat, quarum prima dicitur curva *isochrona*, altera vero *isochrona paracentrica*. Problematum *brachystochronæ*, *tautochronæ*, *synchronæ*, aliorumque itidem problematum, quæ circa oscillationem, & projectionem corporum præcipua sunt, in hoc capite solutiones illas tradidimus, quas jam antea publici juris fecimus, & quibus nihil, quod addi debeat, postmodum se obtulit. De solido minimæ resistantiæ suo loco agemus. Problema laminæ elasticæ a pondere aliquo incurvatæ post *Joannem Bernoullium Eulerus* tam ample evolvit in appendice ad tractatum de problematis omnibus *isoperimetricis*, ut nihil hic pariter occurrat, quod addi debeat. At in problematis iis vetustioribus *catenariæ*, curvæ æquilibriumis, & curvæ *isochronæ* pervolvendis, aliisque itidem, quæ apud nos fuerant nuperrime proposita, quædam adjicere, atque adnotare contigit, quæ hic ordine recenserebimus.

CAPUT,

CAPUT SEXTUM.

DE SINGULARIBUS

MECHANICÆ PROBLEMATIS.

PROBLEMA XVII.

SI corpus in convexitate curvæ alicujus AMD , fig. 71, verticaliter erectæ quavis cum velocitate descendere incipiat, invenire quo in loco M a curvæ perimetro recedere, & motum suum in orbita parabolica libere debeat continuare.

Fiat abscissa $AB = x$, semiordinata $BM = y$, $Bb = dx$; $mn = dy$, $Ma = ds$, ac sit propterea in puncto M radius osculi MO , sive $aO = \frac{ds}{dx \cdot dy}$, acceptoque infra, aut supra verticem A

puncto C , & posita $AC = \pm a$ ductaque inferius horizontali Cc , quæ curvæ in c occurrat, sit C , vel c altitudo, unde descensus incipit, & $x \pm a$ altitudo descensus in puncto M . Si gravitas exprimitur unitate, & elementum temporis, quo arcus Mn absolvitur, vocetur dt , erit descensus velocitas $\sqrt{2x \pm a}$, & $\sqrt{2x \pm 2a} \cdot dt$ erit spatium, quod juxta tangentem MN eadem cum velocitate, eodemque elemento temporis absolvi posset: eritque propterea spatium Nn , quo corpus juxta tangentem excurrando a curvæ perimetro æqualiter recederet, $\frac{MN^2}{2MO} = \frac{x \pm a \cdot dt^2}{MO} = - \frac{(x \pm a) \cdot dx \cdot dt \cdot ddy}{ds^2}$

& velocitas recessus æqualis $-\frac{(x \pm a) \cdot dx \cdot dt \cdot ddy}{ds^2}$. Cum autem

gravitatis portio, quæ perpendiculariter ad tangentem orbitæ dirigitur, iisdem positis denominationibus, esse debeat $1 \times \frac{mn}{Mm} = \frac{dy}{ds}$,

erit $\frac{dy \cdot dt}{ds}$ velocitas, quæ curvam versus gignetur elemento tempo-

ris dt . Quod si igitur vis centrifuga major fuerit ea vi gravitatis, quæ perpendiculari iter ad curvæ perimetrum exercetur, vel si prior illa velocitas major fuerit velocitate hac posteriore, abducetur corpus a perimetro curvæ, & limes recessus erit punctum curvæ, in quo fiet

Mechanica.

P

dy

$$ds \cdot dy \cdot dt = - (x \pm a) dx \cdot dt \cdot ddy, \text{ \& in quo fiet propterea}$$

$$x \pm a = \frac{-dy \cdot ds}{dx \cdot ddy} = \frac{MO \cdot dy}{ds}$$

COROLLARIA:

I. Si corpus in quadrante circuli *AMD*, fig. 72., verticaliter erecto descendere incipiat ex puncto *c*, aut ex superiore aliquo puncto *C*, & fiat radius $MO = AO = b$, & $\frac{dy}{ds} = \frac{BO}{MO} = \frac{b-x}{b}$, erit in ipso recessus limite $x \pm a = b - x$, & $x = \frac{b \mp a}{2}$.

Quod si punctum *C* infra quadrantis erecti verticem *A* accipiat, & fiat $CB = \zeta = x - a$, signo inferiore accepto fiet etiam $\zeta = \frac{b-a}{2}$. *CO*: Nimirum corpus a quadrantis perimetro rec-

edere incipiet ad dimidiam altitudinem puncti, unde descensus incipit, supra centrum. Id etiam illico invenietur cum sit in circulo intercepta $Nn = \frac{MN^2}{2b}$, velocitas descensus in puncto *M*

$= \sqrt{2x - 2a}$, spatium $MN = \sqrt{2x - 2a} \cdot dt$, velocitas recessus $\frac{x - a}{b} \cdot dt$, vis gravitatis quadranti perpendicularis in puncto

M $= \frac{b-x}{b}$, velocitas accessus $\frac{b-x}{b} \cdot dt$, & exaequatis velocita-

tibus esse debeat $x = \frac{b+a}{2}$, & $\zeta = \frac{b-a}{2}$.

II. Si proponatur semicyclois *AMD*, fig. 73., semicirculo genitore *AFE* descripta, & verticaliter supra horizontalem basim erecta, quia ductis semiordinatis *BM*, *bn*, & binis circuli subtensis *AF*, *FE*, radius osculi *MO* in cycloide parallelus, & aequalis est duplæ subtensæ circuli *FE*, posita diametro *AE* $= 2b$, & manentibus aliis antecedentibus denominationibus, erit $MO = 2\sqrt{(4b^2 - 2bx)}$: & quia insuper in cycloide est $\frac{mn}{Ma} = \frac{FB}{FA} = \frac{V(2bx - x^2)}{V2bx}$, in limi-

te recessus debeat esse $x \pm a =$

$$\frac{(2\sqrt{(4b^2 - 2bx)}) \sqrt{(2bx - x^2)}}{V2bx} = 4b - 2x, \text{ \& } x = \frac{4b \mp a}{3}$$

&

& si descensus incipit ex superiore puncto A erit $x = \frac{1}{2}b = AB$, & $BE = \frac{1}{2}b$, nimirum corpus a cycloidis perimetro recedet ad altitudinem tertiæ partis diametri supra basim.

III. Cum spatium Na , quo corpus ob vim centrifugam a curvæ perimetro recederet, sit semper $\frac{x \pm a}{MO} \cdot dt$, colliguntur etiam hæc

omnia si in posteriore formula Probl. X. spatium ddS percursum vi gravitatis statuamus esse $= G \cdot dt$, & loco vis acceleratricis G scribamus $\frac{dy}{ds}$, quæ est vis perpendiculariter ad curvæ perimetrum exercita,

ubi gravitas omnis exprimitur unitate. Si statui posset

$$ddS = \frac{1}{2} G \cdot dt = \frac{dy}{ds} \cdot dt = \frac{x \pm a}{MO} \cdot dt, \text{ esset etiam}$$

$$x \pm a = \frac{MO \cdot dy}{ds}, \text{ ac fieret propterea in circulo}$$

$$b - x = 2x - 2a; \quad x = \frac{b + 2a}{3}, \quad \frac{1}{3} = \frac{b - a}{3}, \text{ \& in cy-}$$

cloide $4b - 2x = 2x \pm 2a$, & posito $a = 0$ esset $x = b$. Nescio an inde oriatur formularumstrarum dissensio ab iis theorematibus, quæ habentur in priore volumine Dissertationum Physico-Mathematicarum Veronæ elapso anno editarum. At vero in Coroll. II. Probl. X. notatum est non aliam variabilis motus formulam assumi posse quam $ddS = G \cdot dt$, quemadmodum ab Alembertio etiam, aliisque authoribus jam antea notatum fuerat.

IX. In parabola si parameter vocetur c , cum sit radius osculi $MO = \frac{4}{c} \left(\frac{1}{2}c^2 + cx \right)^{\frac{1}{2}}$, descensu ex vertice, aut infra ver-

ticem incœpto, & reliquis ut antea positis, erit recessus velocitas

$$\frac{x - a}{MO} \cdot dt = \frac{c^2 x - a \cdot dt}{4 \left(\frac{1}{2}c^2 + cx \right)^{\frac{1}{2}}}, \text{ \& cum velocitas accessus}$$

$$\frac{dy \cdot dt}{V(dx^2 + dy^2)} = \frac{dt}{V \left(1 + \frac{dx}{dy} \right)}, \text{ factis reductionibus aliis, esse de-}$$

beat $\frac{cdt}{2V(\frac{1}{2}c^2 + cx)}$; hæc semper illa erit major, neque unquam cor-

pus a curvæ perimetro recedet, ut recte in altero ex iis theorematibus, quæ memoravimus, statutum est. In ellipsi si major semiaxis vocetur a , minor b , cum radius oculi sit

$$\frac{1}{ab} (a^2 - (\frac{a^2 - b^2}{b^2} x^2)^{\frac{1}{2}}), \text{ ac sit insuper}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{bx}{V(a^2 - a^2 x^2 + b^2 x^2)}, \text{ problema recessus corporis deducetur}$$

ad cubicæ æquationis resolutionem, & æquatione ellipseos inverfo signo ad hyperbolam traducta patebit etiam qui casus descensus, recessusque a perimetro hyperbolæ esse debeat.

V. Universim vero si gravitas statuatur constans, & radius oculi ad altitudinem lapsus se habuerit ut elementum arcus ad elementum semiordinatæ, corpus in convexitate curvæ, & in plano verticali decedens a curva ipsa recedere, & in orbita parabolica ferri incipiet. Quod si descensus velocitas vocetur v , & sit recessus velocitas $v^* . dt$; ac pro alia quavis hypothesi gravitatis distantia a centro vocetur x , cum juxta Probl. XI. esse debeat

$$v^* = \frac{2gr^m}{m-1} \left(\frac{1}{x^{m-1}} - \frac{1}{a^{m-1}} \right), \text{ \& sit semper } MO = \frac{ds}{dx \cdot ddy} \text{ sit}$$

$$\text{in loco recessus a curva } \frac{dy}{ds} = \frac{gr^m}{m-1} \left(\frac{1}{x^{m-1}} - \frac{1}{a^{m-1}} \right) \frac{dx \cdot ddy}{ds^2};$$

atque erit generalis æquatio problematis

$$\frac{gr^m}{m-1} \left(\frac{1}{x^{m-1}} - \frac{1}{a^{m-1}} \right) \frac{dx \cdot ddy}{dy \cdot ds^2} - 1 = 0.$$

PROBLEMA XVIII.

Si gravitas constans sit invenire qua in curva corpus libere decidendo æqualibus temporibus æqualiter semper accedat ad centrum.

Sit in fig. 74. C centrum virium, Bb spatium, quo corpus minimo quocumque tempore ad centrum accedere incipit, & prior descensus velocitas ea sit, quæ acquiri posset libere decidendo per altitudinem AB . Sit etiam curva quæsitæ $BbMm$, & sit Mm arcus curvæ æquali tempore descriptus, quo corpus dilapsum jam intelligitur

tur ex B in b ; duâisque ex centro C circularibus arcibus MP , mRp , ob conditionem problematis sit $MR = Bb$. Cum spatia æqualibus temporibus percurfa sint proportionalia velocitatibus, atque in hypothesi gravitatis constantis velocitates sint in ratione subduplicata altitudinum descensus, erit $\sqrt{AB} : \sqrt{AP} = Bb : Mm$, & si fiat $AB = a$, $PB = x$, $Pp = MR = Bb = dx$, erit $Mm = \left(\frac{a+x}{a}\right) dx$.

Quod si fiat insuper arcus $MP = \zeta$, acceptoque arcu alio proximo mRp sit $mR = d\zeta$, erit etiam $Mm = dx + d\zeta$, ac fiet propterea $ad\zeta = xdx$, & $a \frac{1}{\zeta} d\zeta = x \frac{1}{x} dx$, ac denique $a \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{x}$. Igitur si centro C , & radio AC describatur circularis arcus AN , productaque CM in N fiat $AN = t$, $AC = b$, erit $MP = \zeta = \frac{PC \cdot t}{AC} = \left(\frac{b-a-x}{b}\right) t$, adeoque etiam $t =$

$$\frac{2bx^{\frac{1}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}(b-a-x)}$$

COROLLARIA :

I. Hinc patet primo quod si centrum virium sit infinite diffusum, & gravitatis directiones censeantur inter se invicem parallelae, atque arcus MP , mp sint rectae axi AC perpendiculares, æquatio $a \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{x}$, sive $\frac{1}{\zeta} ax = x^2$ exprimet parabolam secundi ordinis, in qua parameter $\frac{1}{a}$ æqualis erit $\frac{1}{2}$ illius altitudinis, ex qua decidendo corpus velocitatem primi ad centrum accessus posset acquirere. Hoc primum est curvæ Isochronæ problema a Leibnitio propositum in Actis Lipsiensibus anni 1689, cui ipse adjecit problema aliud determinandæ curvæ æquabilis descensus in hypothesi gravitatis constantis, & directionum convergentium ad centrum virium: Joannes Bernoullius in Lect. XXXIV. de Calculo integrali tres æquationum formas pro hujusmodi problemate exhibuit, nec tamen indicavit quam ratione æquationes reduci, ac resolveri possent. Varignonius in Actis Parisiensibus anni 1699, & Wolfius in Probl. XLVIII. Mechanicæ, posito $a = AB = 1$, $AP = x$, $Rm = \left(\frac{b-x}{b}\right) . dt$,

æqui-

æquationem curvæ isochronæ exhibuerunt primo

$$x dx = dx^2 + \left(\frac{b-x}{b} \right)^2 dx^2, \text{ ac deinde } dt = \frac{b}{b-x} \cdot dx \sqrt{x-1}$$

II. Si in hac altera directionum convergentium hypothesi statuamus corpus usque ad centrum virium descendere, atque esse $a+x = AP = AC = b$, fiet in priore æquatione $t = \frac{2bx^{\frac{1}{2}}}{o}$

$\frac{2AC \cdot BC}{o}^{\frac{1}{2}}$, quantitas scilicet infinita, & corpus non nisi post infinitas

revolutiones per quamdam spiralem formam ad centrum virium perveniet. Id ipsum etiam patet si angulus MCP vocetur $v = \frac{MP}{PC}$

$$\frac{MP}{b-a-x}. \text{ Fiet enim } mR = dv(b-a-x) - vdx = \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{a^{\frac{1}{2}}} = (b-a) dv - (xdv + vdx), \text{ eritque}$$

$$(b-a)v - xv = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}}, \text{ \& } v = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}(b-a-x)}. \text{ Falsum}$$

est igitur quod Varignonius, & Wolfius statuerunt citato in loco curvam isochronam intra angulum rectum contineri: quem errorem adnotavit primum Cl. Mascheronius, qui Bergomi Physicæ Professor est, cum posito $\sqrt{x-1} = u$, & $b-1 = c$ æquationem illam eorundem Mathematicorum deduxit ad formam

$$dt = \frac{2bu^2 du}{c-u^2} = \frac{2bcd u}{c-u^2} - 2bdu, \text{ deductaque ad logarithmos integratione statuit } t = b\sqrt{c} \cdot \log. \left(\frac{\sqrt{c}+u}{\sqrt{c}-u} \right) - 2bu, \text{ quæ quantitas}$$

posito $u = \sqrt{c}$ fit ordinis infiniti,

III. Eadem etiam methodus exhibendæ æquationi differentiali problematis inserviet si gravitas sit reciproce ut quadratum distantiae a centro. In hac enim hypothesi, juxta Theor. XIV., erit in B, & M velocitatum ratio $V\left(\frac{AB}{BC}\right) : V\left(\frac{AP}{PC}\right) = \sqrt{\left(\frac{a}{b-a}\right)} : \sqrt{\left(\frac{a+x}{b-a-x}\right)}$

$$= dx : \sqrt{(dx^2 + d^2)}, \text{ atque inde eruetur } V a \cdot d\dot{x} = \sqrt{\left(\frac{bx}{b-a-x}\right)} \cdot dx,$$

&

& $a^{\frac{1}{2}} dt = \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{(b-a-x)^{\frac{1}{2}}}$. Pariter si gravitas sit directe proportio-

nalis simplici distantiae a centro, juxta Theor. XIII, erit velocitatum ratio $\sqrt{(a \cdot b - a)} : \sqrt{(a+x \cdot b - a-x)}$, atque inde eadem ratione eruetur $dt = \left(\frac{b}{b-a-x} \right) \sqrt{\left(\frac{bx-ax-x^2}{ab-a^2} \right)} dx$,

quæ quantitas evadet imaginaria cum fiet $b-a-x < a$, sive $PC < AB$. Generaliter etiam determinari posset curva æquabilis descensus in alia quavis hypothese gravitatis. At cum in hujusmodi æquationibus reducendis nihil invenerim quod curiosum satis, atque elegans visum sit, præcipui problematis æquationem ea tantum ratione adicere volui hoc in loco ut elementaris error præcaveretur, qui jam diu celebribus Mathematicis, atque in operibus vulgatissimis exciderat.

IV. Eadem denique analogia velocitatum, spatiorumque æquali tempore percursorum resolvendo problemati analogo inserviet, quo quæritur curva $BbMm$, fig. 75., recessus æquabilis a dato puncto B , quam curvam Leibnizius Isochronam Paracentricam appellavit. Simili enim modo debet esse $\sqrt{AB} : \sqrt{AP} = Bb : Mm$. Sed ad elementum curvæ Mm exprimendum alia ratione, circa centrum B descripto semicirculo ANE , educlisque rectis BM , BRm , atque ad AP erectis perpendicularis ND , MP , ac posita $BM = BR$ præstabit statuere $AB = a$, $BD = x$, $BM = \frac{1}{2}$, $mR = Bb = d\frac{1}{2}$. Fiet enim $Nn = \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, $MR = \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, $BP = \frac{x\frac{1}{2}}{a}$, $Mm' = \frac{d\frac{1}{2} + \frac{1}{2}dx}{\frac{a^2-x^2}{a}} = \left(a + \frac{x\frac{1}{2}}{a} \right) \cdot \frac{d\frac{1}{2}}{a}$, atque inde illico eruetur $\frac{d\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$ $\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. At rursus in æquationis hujus resolutione, ac confir-

atione nihil mihi se se obtulit, quod ob utilitatem, aut elegantiam videretur singillatim commemorandum. Alia potius alterius problematis, quod iisdem fere temporibus propositum fuerat, correctio non prætereunda hoc in loco videtur esse.

PROBLEMA XIX.

Si pondus aliquod uniformiter juxta rectam AC dispositum circa

ca centrum A libere converti possit, trahaturque fune CBN transeunte per punctum B , invenire quo alio pondere in N posito, & qua in curva BNL æquilibrium semper haberi possit, fig. 76.

Si pondus omne, quod uniformiter per longitudinem omnem AC distribui intelligitur, vocetur P , & recta AC in locum horizontalem Ac transeat, erit $\frac{1}{2} P$ vis, qua perpendiculariter ad rectam Ac agente in puncto c sustineri poterit, & $\frac{1}{2} P \cdot \frac{cB}{BA}$ erit vis, quæ juxta direc-

tionem cB ad sustinendum pondus requiretur, eademque erit vis ponderis, quo verticaliter suspenso ad initium curvæ B æquilibrium haberi poterit. Jam vero si pondus hujusmodi ex B in N , & pondus aliud ex Bc in AC abire, atque in centro gravitatis M colligi intelligatur, ductaque verticali MF ex F , & B in AC demittantur perpendicularia FG , BD ; erit $P \cdot \frac{FG}{FM}$, sive $P \cdot \frac{BD}{AB}$ vis, quæ ex pon-

dere P perpendiculariter ad AC orietur in puncto M , & dimidio minor erit, quæ perpendiculariter exercebitur in puncto C , & quæ inde orietur vis juxta directionem BC erit $\frac{P \cdot BD}{2AB} \cdot \frac{BC}{BD}$, sive $P \cdot \frac{BC}{2AB}$.

Quod si insuper turbato utcumque æquilibrium punctum N in O abire intelligatur, & sit NOK tangens curvæ BNL in puncto N , atque in ipsam ex B demittatur perpendicularum BK , ac sit pariter NE rectæ BA , & NH rectæ NK perpendicularis, atque Oo sit arcus radio BO , & centro B descriptus; erit No velocitas puncti C , & NO velocitas puncti N : cumque in casu æquilibrii velocitates esse debeant viribus reciproce proportionales, & pondus omne in N positum sit $\frac{P \cdot cB}{2AB}$, &

quæ inde oritur vis ex O in N sit $\frac{P \cdot cB}{2AB} \cdot \frac{KE}{KN}$, ac sit insuper

$$NK = NK + \frac{KE \cdot BK}{NK}; \text{ erit etiam } \frac{P \cdot BC}{2AB} : \frac{P \cdot cB}{2AB} \cdot \frac{KE}{KN} = \\ BC : \frac{cB \cdot KE}{KN} = NO : No = BN : Nk, \text{ atque idcirco erit} \\ BC : BN = cB : \frac{KN}{KE} + BK = cB : KH + BK = cB : BH;$$

Quod

Quod si igitur sit longitudo funis $CBN = a$; $cB = b$; $BE = x$, $BN = y$, $BN = V(x^2 + y^2)$, $BN = a - V(x^2 + y^2)$, & sit subnormalis $HE = \frac{ydy}{dx}$, pro eodem casu æquilibrium debeat esse $x + \frac{ydy}{dx} : V(x^2 + y^2) = b : a - V(x^2 + y^2)$, quæ analogia resolvitur in æquationem differentialem $a(xdx + ydy) = bdx + xdx + ydy$, atque integrando fiet curvæ quæsitæ æquatio $aV(x^2 + y^2) = bx + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + C$.

COROLLARIUM.

Speciata igitur simul & quantitate, & directione virium, & velocitate qua primum moveri possent, eadem habetur æquatio, quam Marchio de l'Hôpital in Actis Lipsiensibus anni 1695 ex sola virium consideratione eruerat. Ipse enim primum proposito subicii pontis, & curvæ æquilibrationis problemare animadvertit quod si absolutum pondus subicii pontis AC exprimatur recta AB , erit BC vis, quæ ad sustinendum pondus exercenda erit, quodque si pondus in N positum exprimatur recta BH , vis ponderis in binas alias resolvetur, quarum una HN in pressione curvæ impendetur, altera BN ad trahendum pontem supererit: atque ex æquatis viribus, & assumpta quantitate constante b , statuit author idem quod in quæsitæ curva esse debeat $\frac{BC}{b} = \frac{BN}{BH}$. At nisi an-

gulus HNB sit rectus, adhuc dubium illud occurreret, quod in casibus aliis analogis toties jam proposuimus, quod scilicet BN non sit vis omnis, quæ agit ex B in N , quodque vis alterius HN portio aliqua ad curvam premendam simul, & ad pontem trahendum impendi debeat.

PROBLEMA XX.

Curvaturam funis, aut catenæ uniformiter crassæ, & ex utroque extremo libere suspensæ determinare.

Si in fig. 49. sit GN , NK bina elementa inter se proxima funis, aut catenæ ABa ex punctis A , a suspensæ, & partes omnes in æquilibrio compositz quiescant, manifestum est quod pars quævis GNK inter puncta G , & K descendet proprio pondere quantum poterit, & gravitatis centrum, in quo pondus omne collectum potest

Mechanica.

Q

in-

intelligi in infimum locum se se recipiet. Hoc posito ex curvis omnibus datæ longitudinis GNK per puncta G, K transcurrentibus, querenda erit illa, in qua distantia centri gravitatis ab horizontali linea BO per verticem B transeunte sit minima, & cum distantia centri gravitatis æqualis sit summæ momentorum divise per summam ponderum, in nostro autem casu ob datam longitudinem GNK data sint summa ponderum, quod propositum est problema in hoc aliud resolvetur ut in verticali plano ABa data longitudine arcuum GN, NK per puncta G, K transeuntium ea queratur arcuum dispositio, in qua summa momentorum ad tangentem BO relatorum sit minima. Jam vero reassumptis omnibus, quæ in Probl. CXXVI. Algebræ dicta sunt, si fiat $BH = x, HG = y, Hh = dx, Gt = dy, GN = ds, NK = ds + dds$, & bini alii arcus utcumque proximi, ac per puncta H, K traducti sint $ds + \varphi \cdot \frac{dy}{ds}$, & $ds + dds - \varphi \left(\frac{dy + ddy}{ds + dds} \right)$, ob æqualem binarii utriusque summam erit $\varphi \cdot \frac{dy}{ds} - \varphi \left(\frac{dy + ddy}{ds + dds} \right) = -\varphi \cdot \left(\frac{dy}{ds} \right) = 0$. Deinde ob minimam momentorum summam in utroque arcu debebit esse $x \cdot ds + x + dx \cdot ds + dds = x \left(ds + \frac{\varphi dy}{ds} \right) + x + dx (ds + dds - \varphi \left(\frac{dy + ddy}{ds + dds} \right))$, atque inde eruetur $-\varphi \cdot d \left(\frac{xdy}{ds} \right) = 0$. Assumpta igitur constante quantitate a , summa omnium $a \cdot d \left(\frac{dy}{ds} \right) + d \left(\frac{xdy}{ds} \right)$ constans debet esse: & quia in vertice B , posita $x = 0$, & $dy = ds$, superest quantitas eadem a , erit curvæ quæsitæ æquatio $\frac{a + x}{a + x} \cdot dy = a \cdot ds$, atque inde æquatio elia eruetur $a + x, dx = \sqrt{2ax + x^2} \cdot ds$, & $s = \sqrt{2ax + x^2}$.

COROLLARIUM.

Quia proprietates omnes maximi, aut minimi, quæ in tota curva habent locum, eæ etiam in minimo quovis curvæ elemento locum habere debent, & vice versa, ea catenariæ, & funiculariæ curvæ proprietas erit, ut gravitatis centrum totius curvæ præ aliis curvis omnibus ejusdem longitudinis, & per eadem puncta extrema traductis sit infimum. Erit etiam differentialis curvæ æquatio

a

$a + x \cdot dx = V_{2ax + x^2} \cdot ds$, dataque abscissa x , & data ratione $dx : ds$ tangens catenariæ duci poterit: erit vero integralis æquatio $s = V_{2ax + x^2}$, & arcus omnis rectificari, & ad abscissam referri poterit. Ea etiam quadrabilis erit curva: namque erit spatium exterius $Sxdy = as - ay = aV(2ax + x^2) - ay$. Radius osculi ex notis formulis supputari facile poterit, critque $a + 2x + \frac{x^2}{a}$ Galii-

læus nescio qua specie illusus catenariam parabolici generis esse censuit. Leibnitius, Hugenius, & Bernoullius eam curvam parabolæ, hyperbolæ, & logarithmicæ subsidio construere docuerunt.

APPENDIX.

DE

QUIBUSDAM PROBLEMATUM CORRECTIONIBUS.

IN Theor. III., atque in Probl. VIII., & XIX. cum de funium tensione, & de firmitate fornicum, & de curva æquilibrationis ageremus jam adnotavimus celebres etiam auctores notissimo compositionis virium, ac resolutionis principio non recte fuisse usos, neque ad effectus propositos supputandos absolutarum virium, causarumque omnium agentium rationem habuisse, atque idem pariter in Coroll. III. Probl. III. virium esse monuimus illius methodi, qua Jacobus Bernoullius curvaturam fornicum undique in æquilibrio consistentium, & qua deinde Joannes frater curvaturam catenæ libere suspensæ determinavit. Utrumque modo explicandum, & singillatim considerandum est. Intelligamus curvam GBg , in fig. 48., ex lapidibus cæsis constructam, deficientibus partibus inferioribus GA , ga sustineri a chordis verticalibus GP , gp , ac pondus per totam curvæ longitudinem æquabiliter distribui, & sit $GB = gB = s$, $GN = ds$, $BH = x$, $Hh = dx$, $HG = hn = y$, $Nn = dy$. Erit s pondus quod verticaliter in P , & p sustinebitur, ductaque tangente GOS , & completo rectangulo $GPOM$, erit $GP : GO = Gn : GN = dx : ds$, eritque hæc eadem ratio totius vis ponderis ad vim aliam, quæ secundum tangentem GS ad pondus idem oblique sustinendum require-

Q 2

tur

tur in puncto G , adeoque erit vis hujusmodi $s \cdot \frac{ds}{dx}$. Jacobus Bernoul-

lius in Art. XXIX. Operis posthumi vi huic alteri exæquari censuit
pressionem, quam lapis GN juxta directionem tangentis GS sustinet:
& cum lapidis GN pondus sit ds , & quæ inde oritur vis ad tan-
gentem perpendicularis esse debeat $ds \cdot \frac{Nn}{GN} = Na = dy$, educis

ad curvam perpendicularis in G , N , utque concurrentibus in puncto
 L , lapidem eum veluti cuneum spectando, rectangulum in puncto
 N , qui priore lateraliter obstringatur, & vi altera tendat ex N in L ,
Mathematicus celeberrimus æquilibrium haberi animadvertit ubi vis
prior se haberet ad posteriorem ut $GL : GN$. Positis autem antece-
dentibus denominationibus esset GL , qui radius osculi dicitur,
 $\frac{ds^2}{dx \cdot ddy}$, quemadmodum in Coroll. IV. Probl. CXXIII. Algebræ
jam dictum est. Erit igitur pro eodem casu æquilibrii $\frac{ds^2}{dx} : dy =$

$\frac{ds^2}{dx \cdot ddy} : ds$, atque inde eruetur differentialis curvæ equatio

$\frac{ds}{s} = \frac{ddy}{dy}$, qua ad logarithmos deducta habebitur $\log. s =$

$\log. \frac{dy}{dx} + \log. a = \log. a + \log. \frac{dx}{dy} = \log. \frac{adx}{dy}$, five $s \cdot dy = a \cdot dx$,

ubi scilicet elementum axis dx assumatur constans, & sit $GBA = a$,
atque in puncto A data sit quantitas dx , quæ in proposito logarith-

dy
morum systemate accipiatur loco unitatis.

Jacobus Bernoullius radio NL producto usque in o , & posita $No =$
 $GN^2 = ds^2$, aliam curvæ æquationem exhibere voluit. Cum enim
 $\frac{GL}{GL}$

motu aliquo lapidis GN circa punctum N excitato impulsione mo-
mentum æquari debeat vi sds in No ductæ, & momentum lapidis
 dx

idem sit ac si pondus omne ad dimidium arcum veluti in centro
colligi intelligatur, aut si vis omnis perpendicularis dy multiplicetur
per

per $\frac{1}{r} ds$, statuit author ipse $\frac{1}{r} dy \cdot ds = \frac{sds}{GL} \cdot \frac{ds}{dx} = -s \cdot ddy$;

unde esset alia curvæ æquatio $\frac{1}{r} \frac{ds}{s} = - \frac{ddy}{dy}$. Jam vero in

notis ad eadem Bernoullii opera jam antea ab editore monitum est quod cum in circulo centri L , & radii GL esse debeat $Co^s = GN^s = No \cdot 2GL$, & $No = \frac{ds^s}{2GL}$, ex vetis recurvi CNo confide-

ratione, iis positis virium resolutionibus, non alia eruetur æquatio; quam quæ ante colligebatur. Ego autem in casu utroque monendum in primis esse censerem quod si $\frac{sds}{dx}$ esset vis omnis, qua lapis CN

juxta suam longitudinem ex superiore pondere premitur, ob ds majorem quam dx , pressio vis major esset tota vi ponderis. Insuper in ea Bernoullii methodo notandum est quod licet vires GP , GO relate ad centrum motus g momentum idem exerceant, tamen ad motum inducendum ex G in N sibi invicem substitui nequeunt, quodque si vis GO , quæ binis GP , GM æquivalet, in hujusmodi casu substitui posset simplici vi GP , vis horizontalis GM , ex verticali vi gravitatis gigneretur, quod est absurdum.

Prior illa difficultas obliquæ vis, quæ tota vi gravitatis major assumeretur, in alia etiam methodo occurreret, qua Joannes Bernoullius in Lect. XXXVI. de Calculo Integrali ad catenariæ curvituram determinandam usus est, in quam proxime recidunt rationes omnes, quas alii authores in eodem problemate resolvendo secuti sunt. Receptissimæ problematis solutiones breviter ad hanc unam reduci possent. Sit in fig. 49. axis BL , vertex curvæ B , coordinatæ BH , GH . Vires tensionis in vertice B , & in puncto alio quocumque G diriguntur juxta tangentes BO , GO : & cum vis quælibet secundum datæ rectæ directionem agens eundem effectum præster in quocumque demum rectæ ejusdem puncto applicari intelligatur; productis tangentibus in b , & g , iisque concurrentibus in puncto O , intelligamus duas vires in O applicari, unam ex O in b , alteram ex O in g , & sint vires hujusmodi Ob , Og , completoque parallelogrammo sit vis composita, & æquivalens Oo . Yis hujusmodi erit æqualis vi ponderis GB , & per

per gravitatis centrum T ejusdem arcus transibit, ac verticaliter debet dirigi. Arcus enim GB proprio pondere in punctis G, B cum agat, eodem modo agere debet ac si omnino esset solidus, & pondus omne colligeretur in centro T , ac tota vis ponderis juxta verticalem lineam TO dirigeretur. Quare si vis Ob vocetur a , & sit arcus BTG , & vis $Oo = s$, ob angulos boO, GoO rectos, manentibus aliis antecedentibus denominationibus, erit $Oo:Ob = s:a = Oi:Gi = dx:dy$, atque erit æquatio curvæ $s.dy = a.dx$, & ob $dy^2 = ds^2 - dx^2$, eruetur inde $dx = \frac{s \cdot ds}{\sqrt{a^2 + s^2}}$, & fiet integrando

$a + x = \sqrt{a^2 + s^2}$, & $s = \sqrt{2ax + x^2}$. Verum hisce omnibus concessis vis tensionis in puncto G ex pondere inferioris arcus GTB juxta tangentem Gog genita esset $s \cdot \frac{OG}{Oi} = s \cdot \frac{GN}{Gn} = s \cdot \frac{ds}{dx}$

major scilicet tota vi ponderis s . Ego cum arcum GTB considerem tota vi ponderis non solum juxta tangentem agere, sed etiam perpendiculariter ad tangentem, turbaroque æquilibrio motum aliquem perpendicularem esse oportere, non adhuc video quam ratione vires omnes in punctis singulis componi debeant, ut in solutione problematis nullis amplius dubitationibus sit locus: atque ideo omissa vi-rum compositione aliam potius solvendi problematis rationem, quæ certa, ac manifesta videtur esse, cum Geometris aliis proposui.

LIBER SECUNDUS. ¹²⁷

DE MOTU

ROTATIONIS CORPORUM.

LEges conficiendæ, & percussionis corporum directe sibi occurrentium, a Cartesio infeliciter exploratas, in Transactionibus Londinensibus anni 1669. primi omnium tradiderunt Wallisius, Wrennus, & Hugenus. Wallisius ab eo principio exorsus est, quod si vis aliqua imprimatur cuicumque corpori velocitatem eo minorem gignet, quo major fuerit corporis ipsius massa. Idem principium expresse assumpsit Newtonus in Lege III. Lib. I. Princip. Mathem. cum statuit in idu, & collisione corporum æquales motuum mutationes utrobique esse oportere, & mutationes velocitatum esse massis reciproce proportionales. Inde vero facile colligitur, quod si duo corpora sibi occurrant eadem motus directione, quæ motus quantitas deficiet uni corpori adjicietur alteri, & summa quantitarum motus ante, & post idum manebit eadem. Quod si occurfus fiat ex adversis partibus, æquales quantitates motus, quæ contrariæ erunt, destruentur, & differentia quantitarum absolutarum manebit eadem ante, & post idum. Scilicet si massa unius corporis sit M , velocitas V , quantitas motus MV , & massa corporis alterius m , velocitas $\pm v$, quantitas motus $\pm mv$; in priori casu $MV + mv$, in casu altero $MV - mv$, atque universim quantitas $MV \pm mv$ non immutabitur ab idu corporum inter se. Paret autem in occurfu ipso duo corpora agere in se invicem, quousque una, & communis evadat utriusque velocitas post idum. Erit ergo hæc communis velocitas $\frac{MV \pm mv}{M + m}$:

velocitas a corpore M ammissa $V - \frac{MV \pm mv}{M + m} = \frac{mV \mp mv}{M + m}$

velocitas a corpore m acquisita $\frac{MV \pm mv \mp v}{M + m} = \frac{MV \mp Mv}{M + m}$.

Inde emergit elegans Wrenni constructio. Exeant duo corpora ex locis M , & m , fig. 77., & 78., atque occurrant sibi invicem in puncto

puncto O , ac propterea velocitates V , & v exprimantur rectis MO , mO , eæque jaceant ad eandem, aut ad contrarias partes cum puncto O , prout motus corporum ante ictum aut ad eandem, aut contrarias partes dirigitur. Dividatur distantia omnis Mm in ratione reciproca massarum in puncto C , adeoque pondera M , m ad distantiam eandem suspensa ex puncto C , juxta Theor. IV. Lib. I, in æquilibrio sint inter se, & sit C centrum gravitatis. Erit OC communis velocitas post ictum, eaque omnis evanescet cum punctum C in O cadet, quando nimirum contrariæ erunt occurfus velocitates, & corporum massis reciprocè proportionales. Erit etiam MC velocitas a corpore M amissa, & mC velocitas ictu acquisita ab altero corpore. Nam si communis fuerit ante ictum directio velocitatum V , & v , fiet $MV + mv = M \cdot MO + m \cdot mO = M \cdot MC + OC + m \cdot OC - mC$, atque ob $M \cdot MC = m \cdot mC$ erit $\frac{MV + mv}{M + m} = OC$;

& in casu altero motuum oppositorum erit similiter $M \cdot MC + OC - m \cdot mC - OC = OC$.

$$\frac{M \cdot MC + OC - m \cdot mC - OC}{M + m} = OC$$

Si utrique corpori adderetur communis quævis velocitas $MM' = mm'$, fig. 79, & 80., iisque in M' & m' positis sit centrum gravitatis C' , ob $Mm = M' m'$, & $M' m'$ ut antea divisam in ratione reciproca massarum, erit $MC = M' C'$, & $mC = m' C'$; scilicet velocitas ictu amissa, & acquisita erit eadem ac si ante ictum abfuisset velocitas communis. Quod idem ex prioribus formulis colligitur. Nam si velocitates ante ictum sint $A + V$, & $A \pm v$, erit communis velocitas post ictum $\frac{M \cdot A + V + m \cdot A \pm v}{M + m} = A + \frac{MV \pm mv}{M + m}$;

& velocitas a priore corpore amissa adhuc erit $m \cdot \frac{V \mp v}{M + m}$

& quæ alteri corpori ictu adjicietur $M \cdot \frac{V \mp v}{M + m}$.

Itaque communis motus relativum minime afficiet, & corporum dato spatio inclusorum iidem erunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur uniformiter in directum. Cumque insuper communis velocitas post ictum OC' , sive OC , fig. 77., & 78., eadem

dem sit, qua centrum gravitatis duorum corporum M , & m primo moveri cœperat, motus autem hujusmodi ante ictum, ob uniformes velocitates MO , & mO , uniformis similiter esse debeat; patet pro occurſu quolibet gravitatis centrum aut quiescere, aut moveri uniformiter in directum.

Ita universim construi poterit problema si corpora directe impulsâ, atque impellentia aut mollia, aut dura sint, & alterum alterius viribus penitus se accommodet. Si corpora sunt elastica, eademque vi restituant se se, qua extrinsecus compressa sunt, corpus M duplam amittet portionem velocitatis, & corpus m duplam pariter acquirere, alteram ictu, alteram elasticitate, quæ æquali vi in contrarias partes corpus restituit. Scilicet si in fig. 81, & 82. accipiat $OC = CD$, erit post ictum DM velocitas corporis M ex D in M , & mD velocitas corporis m ex D in m : quæ primum a Wrenno tradita constructio, & deinde a Descagulierio, Keillio, aliisque authoribus fufius exposita adeo elegans est ut hoc etiam in loco præteriri minime debeat. Ita scilicet erit

$DM = 2OC - OM = OC - MC = OM - 2MC$, &
 $mD = 2OC - Om = Om + 2mC$, atque in utroque casu corporum elasticorum aut ad eandem, aut ad oppositas plagas tendentium variationes velocitatum duplo majores erunt quam si aut omnino dura, aut incomprehensibilia, aut mollia fuissent corpora. Positis prioribus denominationibus erit

velocitas a corpore M ictu amissa $2m \cdot \frac{V \mp v}{M + m}$

tota ipsius velocitas post ictum $\frac{MV - mV \pm 2mv}{M + m}$

velocitas a corpore m acquisita $2M \cdot \frac{V \mp v}{M + m}$

tota velocitas post ictum $\frac{2MV \pm mv \mp Mv}{M + m}$

Si velocitas utriusque corporis per massam multiplicetur erit in priore corpore quantitas motus post ictum $\frac{M \cdot V - MmV \pm 2Mmv}{M + m}$

Mechanica.

R

ac:

atque in altero corpore $2MmV \pm m^2 v \mp Mmv :$

$$M + m$$

& summa utriusque quantitatis adhuc erit $M'V \pm mv$. Quod si quadrata velocitatum earundem per massas multiplicentur, omittis terminis se invicem destruentibus, erit summa omnis $M'^2 + mv^2$. Scilicet cum in collisione corporum quorumcumque durorum, mollium, elasticorum eadem ante, & post idum quantitas motus servetur; in collisione corporum elasticorum eadem insuper manet summa, quæ conficitur ex singulis massis ductis in quadrata suarum velocitatum: quod elegans theorema, ab Hugenio traditum in Propos. XI. Tractatus de motu corporum ex percussione, ab iis qui vires vivas aestimari vellent ex massa, atque ex quadrato velocitatis, principium conservationis virium vivarum dicitur. Monuimus autem in libri antecedentis introductione omnem de viribus vivis, & mortuis controversiam tamdiu inter summos etiam Mathematicos agitatam, & quæ deinde subortæ sunt, de perfecta duritie corporum, de lege continuïtatis, de compositione materiæ ex punctis indivisibilibus, aufugientibus a se invicem, & mutuos contactus corporum impediētib; metaphysicas quæstiones, esse ad physicam promovendam, & Problemata Mechanica resolvenda omnino inutiles & ne fusiis quidem singulas esse in Mechanicis institutionibus recensendas.

Si fiat $M = m$, erit velocitas prioris corporis post idum $= \pm 2mv \pm v$, atque alterius velocitas $2MV = V$: æqualia scilicet

$$M+m$$

$$M+m$$

corpora elastica directe sibi invicem occurrendo permutabunt velocitates suas: & si plura hujusmodi corpora ad quascumque distantias disponantur in eadem recta, & quiescant omnia præter primum, velocitas a primo ad ultimum, intermediis post idum rursus quiescentibus, transibit. Cujus theorematís veritas cum ex quantitate distantiarum earundem minime pendeat, etiam si imminutis ultra quoscumque limites distantis æqualia corpora elastica se se contingant, impulsu primi non nisi ultimus eadem primi impulsus velocitate cæteris suo loco quiescentibus movebitur. Univerſim vero ut quiescat post idum corpus M , & sit $MV = mV \pm 2mv = 0$, debet esse $M = m : 2m = \mp v : V$, & si motus ad eandem partem incipiat debet esse m major quam M , minor vero si motus fiat

fiat in adversas partes. Sistetur etiam post ictum corpus m si fuerit $M - m : 2M = V : \pm v$, quod esse nequit si ante ictum directiones motuum conspirent, & sit v minor quam V , fieri autem poterit si contrarie sint directiones motuum, & sit m major quam M , & velocitas primi corporis ante ictum sit ad secundi velocitatem ut excessus massæ secundi corporis ad duplam massam primi.

Cum velocitas a secundo corpore acquisita $2M \cdot \frac{V \pm v}{M+m}$ genera-

tum sit quarta proportionalis ad summam massarum, duplam massam prioris corporis, & differentiam, aut summam duarum occurfus velocitatum, si alterum corpus quiescat ante ictum, erit velocitas ictu acquisita $2MV$: & simili modo si tertium corpus n proponatur, quod

eadem velocitate $2MV$ in motum agi a secundo debeat, invenietur
 $\frac{2m}{m+n} \cdot \frac{2MV}{M+m}$. At si primus M directe in

tertium n quiescentem velocitate V incurrisset, fuisset hujus velocitas $2MV$. Cum itaque sit

$$\frac{2m}{m+n} \cdot \frac{2MV}{M+m} : \frac{2MV}{M+n} = \frac{4m}{(m+n)(M+m)} : \frac{2}{M+n} =$$

$$2M + 2n : M + n + m + \frac{nM}{m}, \text{ subductis utrimque æqualibus}$$

quantitatibus $M+n$, velocitas directo incurfu acquisita eadem, major, vel minor erit quam quæ interposito alterius corporis acquiri poterit, prout quantitas $m + \frac{nM}{m}$ æqualis, major, vel minor fuerit,

quam $M+n$. At insuper si sit $m = M$, vel $m = n$, erit $M+n = m + nM$: & si sit $m = M+c$, ac fiat propterea $\frac{Mn}{m} = n - \frac{nc}{M+c}$,

statuaturque $M+c$, sive m major quam n , erit $c - \frac{nc}{M+c}$ quanti-

tas positiva, & $m + \frac{Mn}{m}$ major erit quam $M+n$: atque idipsum

continget si fiat $m = M - c$, statuaturque $M - c$ minor quam n . Quare si corpus intermedium primo, & tertio aut simul major, aut

R 2

simul

simul minor fuerit, velocitas a tertio acquisita secundi interjectu minor erit quam quæ prodiisset directo primi in tertium incurfu: major autem erit tertii velocitas si secundum intermediæ fuerit magnitudinis. Si massæ primi, secundi, & tertii corporis fuerint Geometricè proportionales, velocitas a primo in tertium secundi interposito transmissa evadet maxima. Cum enim tunc incrementum quantitatis m æquari debeat decremento alterius $\frac{Mm}{m}$, si loco m assumamus $m + c$,

$$\& \frac{Mn}{m+c} \text{ loco } \frac{Mn}{m}, \text{ ac sit } c \text{ quantitas ita exigua ut statui possit}$$

$$\frac{Mn}{m+c} = \frac{Mn}{m} - \frac{Mnc}{m^2}, \text{ posito } c = \frac{Mnc}{m^2} \text{ fiet } M : m = m : n.$$

In casu autem massarum 1, m , m' , m'' , &c. in ratione quavis crescentium, vel decrecentium, si prioris corporis velocitas vocetur 1, atque ipsius impulsu reliqua directe in motum, atque ordine ut antea agi debeant, erit secundi velocitas $\frac{1V}{1+m}$, tertii $\frac{1 \cdot 2mV}{(1+m)(m+m')}$, quarti $\frac{1 \cdot 2V}{(1+m)^2}$, atque universim si numerus corporum sit x , erit velocitas, qua ultimus e loco suo dimovebitur $\left(\frac{1}{1+m}\right)^{x-1} V$. Hugenus in tractatu jam

memorato cum præcedentia theoremata a se primum inventa aliis rationibus demonstrasset, posteriorem hanc formulam minime indicavit. Monuit tamen se ad normam theorematum eorundem deprehendisse quod si centum corpora perfecte elastica accipiantur in proportionem dupla, ordinenturque per lineam rectam, & motus a maximo incipiat; erit ipsius velocitas ad velocitatem corporis minimi, & ultimi ut 1 : 14760000000: quod si vero incipiat motus a maximo augeretur motus quantitas vicibus proxime 467700000000: quæ duo ex posteriore formula possunt colligi. Eadem autem ratione exhiberi possent leges omnes conflictus corporum imperfecte elasticorum. Postis enim aliis denominationibus quæ antea si vis compressionis se habeat ad vim qua corpora restituuntur, ut 16 : 15, quod Newtonus in globis vitreis expertus est; erit velocitas corporis M post ictum

==

$$= V - \frac{(mV \mp mv)}{M + m} - \frac{15(mV \mp mv)}{16(M + m)} = \frac{16MV - 15mV \pm 31mv}{16(M + m)},$$

$$\& \text{velocitas corporis } m = \frac{31MV \mp 15mV \pm 16mv}{16(M + m)} : \text{ atque inde}$$

ulterius progrediendo determinari possent variationes omnes velocitatum, quæ proposito elasticitatis defectui in singulis superioribus casibus respondebunt.

Hæ vero, & quævis aliæ consimiles formulæ corporum quorumcumque perfecte elasticorum, incompressibilium, mollium se invicem percutientium locum non habebunt nisi ictus directio per centrum gravitatis utriusque corporis impulsu, & impellentis transeat, aut nisi quæ in se invicem agunt corpora in centro gravitatis quasi coalita intelligantur, quo in casu non nisi unicus projectionis motus exurgeret, qui singulis corporis cujusque particulis communis esset, dataque impulsæ massæ, & vis impellentis quantitate posset determinari. At longe alia res est si ictus corporis percutientis, aut vis alia quævis alteri corpori impressa per gravitatis centrum non transeat: quo in casu binos simul projectionis, & rotationis motus unica tantum vi haberi ostendit Bernoullius. Ut generalem theoriā motuum qui ex vi quavis cuicumque corpori utcumque impressa oriri possunt, theoriæ motus communis corporum hic adjiciamus, a binis iis theorematibus exordium erit compositionis, & resolutionis motuum rotationis, quæ in introductione hujus operis jam memoravimus.

CAPUT PRIMUM.

DE MOTU ROTATIONIS

CIRCA AXEM DATUM.

THEOREMA I.

SI planum aliquod $ZH\eta h$, fig. 83, binis viribus ita urgeatur ut earum una circa axem $Z\eta$, altera circa axem alterum Hh seorsim rotari possit, & angulares rotationum duarum celeritates sint inter se ut $C : 1$; binis viribus simul impressis planum omne rotabitur.

bitur circa axem tertium MTm , jacentem in eodem plano, & qui a prioribus axibus Z_1 , Hh declinabit angulis MTZ , MTH , quorum sinus inter se erunt ut $1:C$.

Concipiamus rotationes binas sic fieri, ut in oppositis sectoribus HT_1 , ZTh conspirent binæ motuum directiones, in sectoribus autem ZTH , $1Th$ contrariæ sint, atque ita motu circa axem Hh concepto punctum M infra planum tabulæ deprimatur, motu autem alio circa Z_1 supra planum ipsum assurgat. Tum ita accipiaturs recta MTm , ut ductis ML , MN ad axes Z_1 , Hh normalibus sit $1:C = ML:MN$. Erit ML . C velocitas absoluta puncti M circa axem Z_1 : & MN erit velocitas puncti ejusdem circa axem alium Hh , atque ob $MN = ML \cdot C$, duæ rotationis velocitates in tota recta MTm se mutuo destruent. Composita etiam velocitas puncti alterius cujusque R proportionalis erit distantiae ab eadem recta. Ducantur enim ad HT , MT , & ZT perpendiculara RO , RA , & NG , OD , RB , PQ , & ad PQ perpendicularum aliud RV . Erit RO velocitas rotationis puncti R circa axem Hh , & velocitas rotationis circa Z_1 erit $BR \cdot C = BR \cdot \frac{MN}{ML} = BR \cdot \frac{PO}{PQ} = \frac{PQ \mp PV}{PQ} \cdot \frac{PO}{PQ} =$

$PO \mp PV \cdot \frac{MN}{ML}$, & differentia, aut summa duarum velocitatum erit $RP + PV \cdot \frac{MN}{ML}$. Jam vero ob rectas NG , PQ parallelas angulus RPV æqualis erit angulo NoO , & similia erunt triangula re-

ctangula RPV , NoO , NTG , ac fiet $PV = \frac{TG}{TN} \cdot RP$: atque in-

super ob similia triangula RPA , TPO , TMN erit $RP = \frac{TM \cdot RA}{TN}$.

Itaque differentia, aut summa duarum velocitatum erit $\frac{TM \cdot RA}{TN} \cdot 1 + \frac{TG \cdot MN}{TN \cdot ML} = \frac{RA}{\cos. MTN} \cdot 1 + C \cdot \cos. HTZ$:

atque ob constantem C , & datos angulos MTN , HTZ , composita omnis velocitas proportionalis erit distantiae RA a recta Mm : quo dato planum omne circa ipsam rectam quiescentem rotari poterit.

CO-

COROLLARIA.

I. Cum sit $\frac{TG}{TN} = \cos. HTZ = \cos. \frac{HTM + MTZ}{TN}$

$$\frac{TN \cdot TL - MN \cdot ML}{TM \cdot TN} \text{ erit } \frac{TM}{TN} \cdot 1 + \frac{TG \cdot MN}{TN \cdot ML} =$$

$$\frac{TM}{TN} + \frac{TL \cdot MN}{TM \cdot ML} - \frac{MN}{TM \cdot TN} = \frac{TN}{TM} + \frac{TL \cdot MN}{TM \cdot ML} = \frac{\sin. HTZ}{\sin. MTZ}$$

eritque idcirco rotationis compositæ velocitas $\sin. HTZ \cdot RA$.

II. Si velocitas angularis circa axem Hh accipiat loco unitatis, erit angularis velocitas circa axem $Z_1 = \frac{MN}{ML} = \frac{\sin. HTM}{\sin. MTZ}$, & velocitas rotationis circa axem Mm compositæ erit $= \frac{\sin. HTZ}{\sin. MTZ}$

scilicet angulares velocitates circa tres ipsos axes Hh , Z_1 , Mm erunt ordine ut sinus angulorum MTZ , HTM , HTZ .

III. Quod si in recta T_1 accipiat TX , quæ se habeat ad TY ut $C:1$, jungaturque YX , ipsique per punctum T , in quo bini priores axes Hh , Z_1 se interfecant, ducatur parallela MTm , erit MTm axis totius compositæ rotationis. Fiet enim $C:1 = TX:TY = \sin. TYX:\sin. TXZ = \sin. MTN:\sin. MTL = MN:ML$, & sinus deviationis axis compositæ rotationis a duobus axibus prioribus erunt reciproce proportionales angularibus velocitatibus singillatim circa axes ipsos conceptis.

THEOREMA II.

Si alicui corpori in punctis quocumque F extra planum ZH_1h positis binæ vires imprimantur, quarum una circa axem unum Z_1 , altera circa Hh seorsim rotari possit; corpus circa axem tertium Mm rotabitur, & sinus deviationis axis compositæ rotationis a duobus aliis prioribus erunt reciproce ut angulares velocitates, quæ seorsim circa axes ipsos conciperetur.

Primo enim si punctum quodcumque F circa centrum O circulem arcum describat, & velocitas secundum tangentem sit $FO \cdot \varphi$, atque ex F in planum ZH_1h ducatur perpendicularum FR , & intelligamus tangentem FS in plano FOR ductam cum plano ZH_1h concurrere in puncto S ; rotationis velocitas in binas resolvî poterit, quarum una $SR \cdot FO \cdot \varphi$, five

$$\frac{SF}{FO} \cdot FR$$

$FR \cdot \phi$ parallela erit rectæ RO , altera $RO \cdot \phi$ perpendicularis erit plano, eritque eadem velocitas, qua punctum R circa O eodem angulari motu cum puncto F rotari posset. Eadem igitur ratione si angulares velocitates circa axes Z_1 , Hh inter se sint ut $C : 1$, absolutæ velocitates puncti F circa axes ipsos resolventur in quatuor alias, duarum binæ $BR \cdot C$, & RO perpendiculares erunt plano axium, binæ autem $FR \cdot C$, & FR parallele erunt rectis BR , RO in puncto F . Jam vero binæ priores velocitates cum eadem sint, quibus punctum R circa ipsos axes revolveretur, per Coroll. I. Theorematis præcedentis component velocitatem $\sin. HTZ \cdot RA$ circa $\sin. MTZ$

axem tertium Mm . Jungatur FA , & ex A ducatur CA parallela rectæ ML ut sint æquales anguli PRA , MTN , & ACR , LMN . Quia circulus diametro TM descriptus, ob angulos ad L , & N rectos, transire debet per L , & N , erunt æquales anguli MTN , MLN eidem chordæ MN insistentes, similia erunt triangula RCA , LMN , eritque $RC : CA = ML : MN = 1 : C$. Binæ igitur velocitates, quarum una FR parallela sit rectæ CA in puncto F , altera $FR \cdot C$ parallela sit rectæ RC , inter se erunt ut $RC : CA$, & juxta directionem aliam rectæ RA parallelam component velocitatem

$FR \cdot RA = FR \cdot LN = \sin. HTZ \cdot FR$. Hæc vero cum velocitate alia $\sin. HTZ \cdot RA$, quæ plano ZH_1h perpendicularis est in puncto F , component velocitatem $\sin. HTZ \cdot FA$ rectæ ipsi FA perpendiculari.

Singula igitur puncta F , & corpus etiam quodcumque binis viribus ut antea impulsus circa axem Mm rotabitur, qui jaceat in plano priorum axium Z_1 , Hh , iisque inde declinet anguli, quorum sinus sint reciproce proportionales angularibus velocitatibus singulatim circa axes ipsos conceptis.

COROLLARIA.

I. Bini igitur rotationis motus circa axes binos unicum rotationis motum component circa axem tertium: & vicissim unicus rotationis motus, qui circa axem Mm fiat, resolvi poterit in duos alios circa

circa axes Hh , Zz : atque erit tota rotationis velocitas angularis ad angulares velocitates rotationum resolutarum ut sinus anguli HTZ ad sinus angulorum MTZ , MTH , quibus angulis iidem axes Zz , Hh recedunt ab axe rotationis compositæ Mm . Dato etiam axe Zz , & rotationis velocitate inveniri poterit circa quem axem Hh , & qua velocitate rotatio alia haberi debeat ut binæ simul rotationem unicam component circa axem datum Mm .

II. Itaque compositio, & resolutio motuum non in liberis motibus dumtaxat, verum etiam in motibus rotationis habebit locum: scilicet bini motus rotationis sic componentur, ut in particulis singulis exhibeant velocitatem proportionalem distantie a novo axe, & directione sua perpendicularem rectæ ad axem ductæ: quod satis est ut totum corpus sine ulla partium dissociatione circa axem ipsum rotari possit. Et sicuti ex quocumque viribus corpori impressis vis unica semper exfurgit, & unica in plures vires resolvi potest, ut libri superioris initio explicatum est; ita si plures rotationis motus eidem corpori imprimantur circa idem centrum, unica semper rotatio ex omnibus habebitur, & ex rotatione corporis circa axem datum alii rotationis motus circa axes alios vicissim educi poterunt.

III. Et quia si in quovis corpore punctum aliquod fixum maneat unica vi impressa non alius motus haberi potest quam quod totum corpus rotari incipiat circa axem transeuntem per idem punctum, cumque idipsum valeat de vi quavis singillatim sumpta; simul impressis quocumque viribus, & singulis rotationis motibus compositis semper aliqua habebitur linea immobilis, circa quam totum corpus rotabitur. Unica autem vi impressa in puncto B , fig. 84., si punctum T fixum sit, patet in partibus puncto illi adversis B , D contrariam fore motus directionem BC , DE , ac patet etiam quod si in plano ad directionem eandem normali accipiantur duo puncta b , d æquidistantia a punctis B , D , ut corpus continuum maneat, contraria pariter debebit esse directio motus bc , de : atque hoc posito manifestum est in recta etiam bd punctum aliquod t quiescere, & punctis duobus T , t quiescentibus ad corporis continuitatem insuper requiri ut quiescant puncta omnia rectæ FTf , quæ transit per T , & t .

IV. Quia denique motus omnis ex vi aliqua oritur, qua rursus

Mechanica.

S

in

in adversam partem impressa extingui potest, hoc ipso manifestum est quod si in quocumque corpore punctum aliquod fixum maneat nullus alius motus haberi poterit, quam quo totum corpus rotetur circa aliquam diametrum transeuntem per idem punctum. Id ex eo etiam colligitur quod si puncto T fixo, fig. 85., punctum B in C transeat, & per T traducantur duo plana FBb , FCf ad BC perpendicularia, quæ in recta Ff se intersecet, posito $Bb = Cc$, punctum b non nisi in c eodem tempore transire possit. Nam si in recta bc aut citra aut ultra c reperiretur, distantiam a puncto B jam in C delato majorem quam antea haberet: & si a recta bc in alterutram partem aberraret, non eandem adhuc servaret distantiam a punctis omnibus positis inter B & C . Datis autem tribus punctis cum detur plani cujuslibet positio, puncto B in C transeunte planum omne FBf in FCf abibit, & corpus omne circa axem FTf rotabitur.

THEOREMA IIL

Si durum corpus circa axem aliquem libere rotari incipiat, duplicem inde motum concipiet, quorum uno revolvi perget circa axem alium parallelum per centrum gravitatis transeuntem, altero projicietur uniformiter in directum.

Sit BCb , fig. 86, recta circa quam corpus primo nutare incipit, eique ex centro gravitatis G ducatur parallela GR , atque in planum $BCGR$ ex puncto quocumque P ducatur perpendicularum PQ , rectæque PR , PB , PM , MV sint ordine perpendiculares rectis aliis GR , CB , PB , CG . Si velocitas centri gravitatis G circa axem BC concepta vocetur φ , erit $\frac{PB}{CG}$.

eaque in duas alias resolvi poterit, unam $\frac{QB}{CE} \cdot \varphi$ perpendicularem

plano BGb , alteram $\frac{PQ}{CG} \cdot \varphi$ plano eidem, & rectæ CG parallelam:

& cum sit BR parallela, & æqualis rectæ CG , erit $\frac{QB}{CG} \cdot \varphi =$

$\frac{CG}{CG} - \frac{QR}{CG} \cdot \varphi = \varphi - \frac{QR}{CG} \cdot \varphi$. Itaque perpendicularis veloci-

tas

tas $\frac{QB}{CG}$. ϕ in duas alias resolvitur, quarum una ϕ particulis singu-

lis cum gravitatis centro erit communis, altera $-\frac{QR}{CG}$. ϕ ten-

det contraria directione ex Q in P . Velocitas autem hujusmodi cum velocitate $\frac{PQ}{CG}$. ϕ , quæ directionem habeat rectæ QR parallelam,

componet velocitatem $\frac{PR}{CG}$. ϕ perpendicularem rectæ PR in pun-

cto P , & proportionalem distantie a recta GR , quæque cum in partes contrarias hinc inde tendat, communem motum minime afficiet. Itaque totum corpus dum communi motu feretur uniformiter in directum, volvetur etiam circa axem GR transeuntem per centrum gravitatis, & parallelum axi rotationis primum conceptæ BCb .

COROLLARIA.

I. Ita igitur dum unicus projectionis motus, qui circa quiescentem axem BCb primo incipit, in binos alios resolvitur projectionis, rotationisque circa axem alium RGr transeuntem per centrum gravitatis G ; manifestum est puncta singula axis B , C , b circularis motus velocitatem æqualem, & contrariam habere velocitati ϕ , qua centrum gravitatis G uniformiter in directum moveri perget. Continuat igitur motu punctum C circa idem centrum revolutionibus singulis cycloidem describet, puncta vero alia describent epicycloides pro varia a centro distantia correptas, vel oblongatas. Erit autem CG dimidia cycloidis altitudo, seu radius circuli, cujus evolutione cyclois describitur: atque erit propterea radius ad peripheriam ut distantia duorum axium CG rotationis primum conceptæ, & rotationis resolutæ ad spatium, quod integra totius corporis revolutione percurrat centrum G normaliter ad planum GCB , quodque æquale est basi cycloidum a punctis singulis prioris axis BCb descriptarum.

II. Vicissim si corpus aliquod volvetur circa axem RGr , & communi aliquo motu perpendiculariter ad Rr in directum moveri pergat, atque ad velocitatem rotationis particulæ cujusvis P , velocitatem communem projectionis, & distantiam PR accipiat quarta

proportionalis CG , eaque statuatur perpendicularis directioni motus centri G , & per C ducatur BCb parallela axi RG ; erit BCb axis rotationis, quam bini simul ii projectionis, & rotationis motus component. Quod si alia vi impressa, cujus directio jaceat in plano ad GR normali in centro G , motus projectilis augeatur, vel imminuatur, eadem ratione semper determinabitur axis aliquis compositi motus omnis BCb : & si vis alterius directio ad idem planum obliqua sit, resolutione facta in duas alias, quarum una dirigatur in eodem plano, altera sit plano perpendicularis, ac motu, qui ex prior vi oritur, ut antea composito, supererit motus axi RG parallelus, atque ita motus omnis corpori impressus resolvi poterit in binos alios, quorum uno circa axem positione datum corpus revolvi incipiat, altero parallele ad eundem axem feratur.

III. Cum igitur motus omnes rotationis, qui corpori circa centrum C possunt imprimi, unicum rotationis motum component circa axem aliquem RG , ut in antecedente theoremate dictum est: & motus omnes projectionis in centro G impressi component unicum projectionis motum, ut initio antecedentis libri demonstratum est, unicus autem is motus in binos alios resolvatur, quorum prior sit axi RG normalis in centro G , alter sit axi eidem parallelus; in corpore quovis libero ultima motuum reductio habebitur ad duos alios, quorum uno singulæ corporis particulæ volvantur circa axem aliquem BCb , altero parallele ad eundem axem ferantur. Ut inveniatur quo in loco applicanda sit vis, qua datus corporis motus gigni, & extinguí potest, qui locus centrum percussiois dicitur, generales formulæ centri percussiois inveniendæ erunt, iis autem præmittendæ erunt formulæ centri oscillationis, quod illud penduli utcumque compositi punctum est, in quo si gravitas totius corporis colligeretur, æquidivernæ oscillationes circa idem suspensionis punctum haberi possent.

PROBLEMA I.

Si corpus aliquod oscillari incipiat circa axem perpendicularem plano PCO , quod per centrum gravitatis transeat, in puncto C , fig. 87., oscillationis centrum O determinare.

Proponantur primo bina tantum ponduscula P , O in plano
ver-

verticali DCO connexa, quæ simul oscillari incipiant circa punctum suspensionis C , & invenienda sit vis omnis, qua pondusculum P motum pondusculi alterius O accelerat, vel retardat. Ex P , & O in horizontalem DC demittantur perpendiculara PN , OD , & radio PC in P educatur perpendicularum PF . Si vis acceleratrix pondusculi P secundum verticalem lineam exprimitur unitate, erit $\frac{NC}{PC}$ vis ac-

celeratrix pondusculi ejusdem P secundum PF , & $\frac{DC}{OC}$ vis accelera-

trix pondusculi alterius O secundum rectam perpendiculararem radio OC . At si vis acceleratrix puncti O sit $\frac{DC}{OC}$, ut idem sit angularis mo-

tus punctorum omnium, & simul omnia in plano DCO circa C oscillari incipiant, vis acceleratrix puncti P debebit esse $\frac{DC \cdot PC}{OC}$.

Quod si igitur pondusculi P massa vocetur P , erit $P \cdot \frac{NC}{PC}$ —

$P \cdot \frac{DC \cdot PC}{OC}$ productum massæ in differentiam duarum virium ac-

celeratricium, sive vis omnis motrix, quæ in puncto P , & juxta PF turbabit eundem angularem motum totius plani. Radio OC , & centro C describatur circularis arcus OF , qui secet perpendicularum PF in F , producatursque PF in K , & sit HF radio FC , & KH ipsi FH perpendicularis. Quia vix eadem $P \cdot \frac{NC}{CP}$ — $P \cdot \frac{DC \cdot PC}{OC}$

secundum PF impressa ager eodem modo in quovis demum rectæ ipsius puncto applicetur, intelligatur jam applicari in puncto F , resolvaturque in duas alias secundum FC , FH . Vis prior juxta radium FC trahendo angularem motum circa C conceptum minime afficiet: altera perpendicularis radio cum sit, angularem motum turbabit eodem modo ac si in puncto O , & normaliter ad OC imprimeretur: atque ob $FK : FH = FC : PC$ & $FC = OC$, erit vis eadem omnis, qua angularis motus pondusculi O turbabitur

$P \cdot \frac{NC}{OC}$ — $P \cdot \frac{DC \cdot PC}{OC}$.

His

His positis proponatur quodcumque corpus, quod oscillari incipiat circa axem perpendicularem plano PCO in puncto C , & totum corpus dividatur in elementa quotlibet prismatica eidem plano perpendicularia, & oscillationis axi parallela. Quia particulae singulae secundum longitudinem elementi cujuslibet dispositae eandem habent ab axe motus distantiam, eandemque angularem velocitatem; manifestum est singulas ad motum angularem totius corporis accelerandum, aut retardandum agere eodem modo, ac si elementum quodvis prismaticum in puncto P , atque in plano PCO , quod per centrum gravitatis G transit, colligeretur. Quod si igitur massa elementi cujuslibet vocetur P , & ex G in horizontalem DC ducatur perpendiculum GM , atque in recta GC accipiatur punctum quodcumque O ; vis omnis motrix, qua angularis velocitas puncti O actione elementorum aliorum omnium turbabitur æquari debet summæ omnium $P \left(\frac{NC}{OC} - \frac{DC \cdot PC}{OC^2} \right)$, seu summæ omnium

$$\frac{P}{GC \cdot OC} \left(NC \cdot GC \cdot OC - MC \cdot PC \right). \text{ Ut autem motus}$$

puncti O actione aliorum elementorum ininime turbetur, eodemque modo oscillari incipiat, ac si pondus totius corporis in puncto ipso colligeretur, & sit O centrum oscillationis, summa omnium

$$P \cdot NC \cdot GC \cdot OC \text{ æquari debet summæ omnium } P \cdot MC \cdot PC. \text{ Scilicet si massa totius corporis sit } M, \text{ \& massæ elementum } dM, \text{ ut sit } O \text{ centrum oscillationis debet esse } OC = \frac{S \cdot MC \cdot PC \cdot dM}{S \cdot NC \cdot GC \cdot dM}$$

& qua summa momentorum omnium $NC \cdot dM$ relate ad punctum C , atque ad horizontalem lineam DC æqualis est massæ M ductæ in horizontalem distantiam MC centri gravitatis G a puncto suspensionis C , fiet etiam $OC = \frac{S \cdot PC \cdot dM}{GC \cdot M}$

COROLLARIA.

1. Cum igitur hinc inde a plano quovis per gravitatis centrum traducto æqualia semper momenta ponderum disponantur, & centrum oscillationis semper esse debeat in plano, quod transeat per centrum gravitatis, & sit oscillationis axi perpendiculare, distantia centri oscillationis

rionis a puncto suspensionis habebitur summam omnium pondusculorum ductorum in quadrata distantiarum a puncto suspensionis dividendo per productum massæ, & distantie centri gravitatis ab eodem suspensionis puncto. Hugenius Part. IV. Horol. Oscill. hujusmodi formulam ex eo principio eruit quod motu sursum converso centrum gravitatis ad altitudinem illam redeat, ex qua antea delapsum fuerat. Jacobus Bernoullius in Actis Parisiensibus anni 1703. Hugenii formulam confirmavit demonstratione ex natura vectis perita: Joannes Bernoullius idipsum eruit ope felicitæ ejusdam massarum substitutionis. Demonstrationem a Simpsonio allatam in Sect. XI. de Fluxionibus hic simpliciore effecere conati sumus, atque ad duo principia deduximus per se evidentiâ: quod binæ vires æquales radiis æqualibus perpendiculariter, & contrario sensu applicatæ in æquilibrio sint inter se: quodque eadem vis secundum datæ rectæ directionem agat eodem modo, in quovis demum rectæ illius puncto applicari intelligatur.

II. Data distantia centri oscillationis a puncto suspensionis, distantia centri gravitatis ab utroque puncto facile determinabitur. Nam si jungatur recta PG , & ex P in CO ducatur perpendicularum PA , erit $PC^2 = PG^2 + GC^2 \mp 2GC \cdot GA$: & quia si G sit centrum gravitatis, distantis omnibus GA , & citra, & ultra punctum G sumptis, juxta Coroll. III. Theor. V. Lib. I., esse debet $S \cdot GA \cdot dM = 0$, ac pariter ob constantem quantitatem GC summa omnium $\mp 2GC \cdot GA \cdot dM$ hinc inde a centro gravitatis debet destrui; erit in superiore formula centri oscillationis, ac puncti suspensionis distantia $OC = \frac{S \cdot GC^2 \cdot dM + S \cdot PG^2 \cdot dM}{GC \cdot M} = GC + \frac{S \cdot PG^2 \cdot dM}{GC \cdot M}$,
 $GC = OC - \frac{S \cdot PG^2 \cdot dM}{GC \cdot M}$, & $GO = \frac{S \cdot PG^2 \cdot dM}{GC \cdot M}$.

Hanc aliam formulam priori adjunxerunt authores illi, qui primo de reductione penduli cujusvis compositi ad pendulum simplex coeperunt agere.

III. Data autem posteriore hac formula cum summa omnium $PG^2 \cdot dM$ ex suspensionis loco minime pendeat, adeoque in dato corpore sit constans ex quocumque demum puncto suspensio habeatur; rectangulum etiam $GC \cdot GO$ constans erit: & sicuti si ex puncto C suspendatur

pendatur corpus, & sit GC distantia puncti suspensionis a centro gravitatis, distantia centri gravitatis, atque oscillationis est GO ; ita si corpus suspendatur ex puncto O , & sit GO distantia centri gravitatis, & suspensionis, erit CG distantia centri gravitatis, & oscillationis, semperque oscillationis, & suspensionis centra inverti poterunt. Insuper cum GO sit reciproce ut GC , datis in casu quolibet GO , & GC , ac deinde immutato suspensionis loco, dabitur nova centri gravitatis, & oscillationis distantia, minuendo scilicet, vel augendo distantiam GO in eadem ratione, qua distantia GC augetur, vel imminuitur.

PROBLEMA II.

Iisdem positis, & data æquatione planæ cujuslibet figuræ, determinare centrum oscillationis plani ejusdem, ac solidi rotundi, quod revolutione plani circa axem gigni potest.

Si figura plana BCL , fig. 88., oscilletur circa axem transeuntem per punctum C , & basi BL parallelum, & sit $PM.Pp$ pondusculum, quod intelligi debet positum in puncto P ; ex formula problematis antecedentis erit $CO = S . PM . CP . Pp$, ac data æquatione propo-

sitæ figuræ utrumque integrale, & distantia CO determinabitur. Quod si vero oscillationis axis perpendiculatis sit plano figuræ BCE in puncto C , inprimis summa omnium CT , sive $CP + PT$ per totam semiordinatam PM acceptorum erit $CP . PM + \frac{1}{2} PM^2$. Quare erit distantia centri oscillationis a puncto suspensionis

$$CO = \frac{S . PM . CP . Pp + \frac{1}{2} S . PM^2 . Pp}{S . PM . CP . Pp}$$

stantiæ ejusdem in figuris omnibus, quæ aut in ipso figuræ plano, aut in latus agitantur, erit $\frac{S . PM^2 . Pp}{3S . PM . CP . Pp}$

Quod si planum circuli AMH , fig. 89., ex puncto C suspendatur, & recta CP normalis sit plano circuli, ac motus rectæ CP fiat in plano normali ad diametrum Mm , eadem erit velocitas punctorum omnium semiordinatæ cujuslibet FBI eidem diametro parallelæ. Quod si insuper sit Ff elementum peripheriæ, & elementum abscissæ sit Bb , erit elementum ponderis $BF . Bb = \frac{BF . Ff}{PM}$, eoque

ducto in quadratum distantiae ab axe motus habebitur

$\frac{CP^2 + PB^2 \cdot BF^2 \cdot Ff}{PM}$: & cum posito radio ad peripheriam ut

1 : p sit $\frac{S \cdot CP^2 \cdot BF^2 \cdot Ff}{PM}$. $Ff = \frac{1}{2} p \cdot CP^2 \cdot PM^2$, & sit

$\frac{S \cdot PB^2 \cdot BF^2 \cdot Ff}{PM} = \frac{1}{2} p \cdot PM^2$, & productum massae, & di-

stantiae a puncto suspensionis sit $\frac{1}{2} p \cdot PM^2 \cdot PC$, binas priores sum-
mas per posteriorem hanc dividendo erit $PC + \frac{PM^2}{4PC}$

tri oscillationis circuli a puncto suspensionis. Quod si priores eadem
summæ ducantur in elementum axis Pp , fig. 88., & rursus sum-
mæ accipiantur, dividanturque per summam ponderum, habebitur
distantia centri oscillationis, & suspensionis in solido rotundo revolu-
tione figuræ planæ BLT circa axem TB genito eritque distantia ead-
dem $CO = \frac{S \cdot \frac{1}{2} p \cdot CP^2 \cdot PM^2 \cdot Pp + S \cdot \frac{1}{2} p \cdot PM^2 \cdot Pp}{GC \cdot M}$.

COROLLARIA.

I. Si proponatur parabola axe CE descripta, & accipiendo pa-
rametrum loco unitatis sit $PM = CP \cdot \frac{1}{2}$, erit distantia centri oscil-
lationis, & suspensionis $CO = \frac{S \cdot CP \cdot \frac{1}{2} \cdot Pp}{S \cdot CP \cdot \frac{1}{2} Pp} = \frac{1}{2} CE$: & cum

juxta Coroll. I. Probl. I. Lib. I. sit in parabola centri gravitatis a vertice
distantia $GC = \frac{1}{2} CE$, erit $CO = \frac{1}{2} CE$. Si parabola in latius agi-
tetur circa axem plano figuræ perpendicularem in puncto C , substi-
tutionibus iisdem factis in altera problematis hujus formula prodibit
 $CO = \frac{1}{2} CE + \frac{1}{2}$, & distantia centri oscillationis, & suspensionis
tertia parte parametri major erit, quam si oscillationis axis parabola
ut antea tangeret.

II. Si sphaera ex diametri vertice T suspendatur, fig. 90., & sit
sphaerae radius $TC = r$, $TP = x$, $Pp = dx$, erit sphaerae massa
 $M = \frac{1}{2} pr^2$, & posita $PM^2 = 2rx - x^2$ fiet in postrema formula
 $TP^2 \cdot PM^2 + \frac{1}{2} PM^2 = r^2 x^2 + rx^2 - \frac{1}{2} x^2$, & centri gravitatis,
ac suspensionis distantia æquabitur summæ omnium

Mechanica.

T

(r

$(r^2 x^2 + rx^3 - \frac{1}{2} x^4) \frac{3dx}{4r}$: quæ summa cum sit

$$\frac{x^2}{4r^2} + \frac{3x^3}{16r^2} - \frac{9x^4}{80r^2}, \text{ loco } x \text{ scribendo } 2r \text{ fiet distantia quæsitâ } \frac{1}{4} r,$$

eritque distantia centri oscillationis a centro sphaeræ $GO = \frac{1}{4} r$.
Alia hujus generis exempla, quæ in vulgaribus Mechanicæ Institutionibus occurrunt plurima, pro solidis aliis rotundis exercitii loco comparare sibi poterunt tyrones.

III. Quia per Coroll. III. Probl. antecedentis distantia centri gravitatis, suspensionisque est reciproce proportionalis distantiae centri gravitatis, atque oscillationis, si in priore casu parabolæ circa tangentem ad verticem oscillantis distantia puncti suspensionis a vertice removeatur quantitate A , & fiat ut $\frac{1}{2} CE + A$ ad $\frac{1}{2} CE$ ita $\frac{1}{2} CE$ ad quartum, prodibit nova centri oscillationis a gravitatis centro distantia $\frac{1:CE}{35(3CE+5A)}$. In casu

etiam posteriore sphaeræ oscillantis si suspendatur sphaera ex puncto alio quocumque C , fig. 90., & fiat $CT = A$, posito $A + r.r = \frac{1}{2} r : \frac{2r}{5r+5A}$, hæc erit distantia novi centri oscillationis a centro

sphaeræ, & distantia a novo suspensionis puncto erit $A + r + \frac{r}{A+r}$.

PROBLEMA III.

Si corpus quodecumque rigidum circa axem aliquem rotari incipiat, invenire centrum percussionis.

Revolvatur corpus quodecumque rigidum circa axem BCb , fig. 86., & ex centro gravitatis G , atque ex punctis quibuscumlibet P, p in axem ipsum ducantur perpendiculara GC, PB, pb . Ducantur insuper PQ, pq normales plano, quod per gravitatis centrum, & axem rotationis transit, junctisque QB, qb rectæ PM, pm sint pariter normales rectis PB, pb , atque occurrant plano ipsi in M , & m . Quia angularis velocitas particularum omnium simul rotantium est eadem, absoluta autem velocitas est proportionalis distantiae ab axe motus; si velocitas centri gravitatis G vocetur ϕ , erit $\frac{PB}{CG} \cdot \phi$ velocitas pun-

Si P secundum PM tangentem circuli radio PB descripti: eaque in duas resolvi poterit, unam $\frac{PB \cdot PQ}{CG \cdot FM} \cdot \phi$, sive $\frac{QB}{CG} \cdot \phi$ perpendi-

cularem plano BGb , alteram $\frac{PQ}{CG} \cdot \phi$ plano ipsi parallelam. Et

quia vis omnis secundum PM eodem modo agere debet in quovis demum rectæ ipsius puncto applicari intelligatur, sive in P , sive in in M , relatis viribus omnibus ad planum BGb concipi poterit ex puncto quocumque P duplicem vim oriri in puncto M , unam $\frac{QB}{CG} \cdot \phi$

perpendicularem plano, alteram $\frac{PQ}{CG} \cdot \phi$ jacentem in plano ipso, & rectæ QB , aut CG parallelam.

His positis si massa totius corporis vocetur M , & elementum massæ dM , ac MV , HO parallelæ sint ipsi BC , momentum particule P ad corpus volvendum circa axem aliquem HO priori BC parallelum erit ut vis $\frac{QB}{CG} \cdot \phi \cdot dM$, quæ in puncto M applicari

intelligitur, ducta in distantiam VO ab axe HO , sive erit $\frac{QB \cdot CO}{CG} = \frac{BM}{CG} \cdot \phi \cdot dM$. Jam vero si centrum percussionis ab

axe BC distet intervallo CO , oportet ut impedito motu alicujus puncti in recta HO positi vires omnes ad corpus volvendum circa HO compensent se se invicem, ac destruant. Erit igitur

$$\int \frac{QB \cdot CO}{CG} \cdot \phi \cdot dM = \int \frac{QB \cdot BM}{CG} \cdot \phi \cdot dM = 0: \text{ \& quia}$$

est $QB \cdot BM = PB^2$, & summa omnium $QB \cdot dM$ æqualis est massæ M ductæ in distantiam CG centri gravitatis G ab axe BC , erit etiam $CO = \int \frac{PB^2}{CG \cdot M} \cdot dM$. At erit insuper

$$\frac{QB \cdot HO}{CG} = \frac{BC}{CG} \cdot \phi \cdot dM \text{ momentum ejusdem vis perpendicularis}$$

ad corpus rotandum circa axem alium, jacentem in plano GCB , & rectæ HO perpendicularem in puncto aliquo H . Ut itaque impedito motu puncti H neque ulla rotatio hujusmodi oriatur debebit esse

$$\frac{\int QB \cdot HO \cdot \phi \cdot dM}{CG} = \frac{\int QB \cdot BC \cdot \phi \cdot dM}{CG}, \text{ atque inde eruetur}$$

$$HO = \frac{\int QB \cdot BC \cdot dM}{CG \cdot M}. \text{ Denique si motus particularum omnium}$$

fiat circa axem BCb , dirigaturque in planis eidem axi perpendicularibus, nullus inde motus exsurget tertiæ cujuscumque rotationis, quæ fiat circa axem tertium plano GBb ubilibet perpendiculararem, & qua semel concepta axis BCb juxta longitudinem suam progredi incipiat. Quod cum eadem ratione demonstrari possit, qua antea diximus vires perpendiculares se se invicem non afficere, centrum percussionis H in toto corpore circa axem BCB revolutis fatis determinabitur si accipiat $CO = \frac{\int PB \cdot dM}{CG \cdot M}$, & $HO = \frac{\int QB \cdot BC \cdot dM}{CG \cdot M}$.

COROLLARIA.

I. Qui igitur percussionis centrum primo inquisierunt Cartesius, Robervallius, Wallisius, alique decepti sunt cum in hypothesi etiam axis immobilis problemati fatis fieri posse censuerunt si ex centro gravitatis G ad axem BCb ducantur perpendicularum GC , accipiatque $CO = \frac{\int PB \cdot dM}{CG \cdot M}$. Problemate generaliter resolutio videbimus infe-

rius quæ tertia percussionis centri conditio debeat esse cum præter motum rotationis particulæ singulæ communem alium motum conceptum habeant, quo parallele ad longitudinem axis ferantur omnes. Erravit etiam Wallisius cum percussionis centrum idem esse censuit ac centrum oscillationis, in quo scilicet si gravitas totius corporis colligeretur oscillationes factæ circa idem suspensionis punctum essent æquidistantes. Etenim oscillationis centrum, cum pendeat ex gravitate acceleratrice singularum particularum, semper esse debet in ea recta, quæ per gravitatis centrum perpendiculariter ad axem oscillationis ducitur, atque in diversæ densitatis mediis ob variatam gravitatem specificam, atque acceleratricem variari debet. At percussionis centrum pendet ex absoluta velocitate particularum omnium rotantium circa axem datum, & data rotationis velocitate in unoquoque medio debet esse idem.

II. Si

II. Si plano per gravitatis centrum normaliter ad axem ducto dividatur corpus in partes æquales, similes, & similiter hinc inde positas, æquales erunt hinc inde summæ momentorum in particulis omnibus rotantibus, & percussionis centrum manebit in eodem plano. Posito autem $HO = o$, & substitutione eadem facta quæ in Coroll. II. Probl. I. erit

$$CO = \frac{S \cdot GC \cdot dM}{GC \cdot M} + \frac{S \cdot PR \cdot dM}{GC \cdot M} = GC + \frac{S \cdot PR \cdot dM}{GC \cdot M}$$

$$GO = \frac{S \cdot PR \cdot dM}{GC \cdot M}, \text{ \& distantia centri percussionis a centro gra-}$$

vitatis æque ac centri oscillationis habebitur colligendo simul producta pondusculi cujuscvis in quadratum distantie ab axe per centrum gravitatis parallele ad axem prioris rotationis ducto, & summam dividendo per productum massæ, & distantie duorum axium. Iisdem etiam antecedentis problematis reductionibus percussionis centrum in solidis rotundis determinabitur: & si sphaera circa tangentem aliquam rotari incipiat, percussionis centrum a centro sphaeræ distabit duabus quintis partibus radii: quod si vero circa axem alium rotatio incipiat, distantia centri percussionis a centro sphaeræ habebitur accipiendo duas quintas partes tertiæ proportionalis ad distantiam axis a centro sphaeræ, atque ad sphaeræ radium.

III. His positis reassumendo omnia, quæ in Coroll. III. Theor. III. præmissa sunt, si proponantur casus Planetæ cujuscvis motu periodico circa Solem projecti, & motu diurno circa centrum revoluti, & sint T , t tempora revolutionis periodicæ & diurnæ, R , r radii orbitæ circa Solem descriptæ, & propositi Planetæ, $1 : p$ ratio radii ad peripheriam; in primis erit pR orbita circa Solem descripta, & $\frac{pR}{T}$

erit spatium a Planetæ centro percursum circa Solem tempore unius revolutionis circa ipsum centrum: deinde juxta Coroll. I. Theor. III. hujusmodi spatium minuendo in ratione radii ad peripheriam habebitur distantia duorum axium diurnæ revolutionis, & rotationis primum conceptæ, quæ in binos projectionis, & rotationis diurnæ motus resolvitur, eritque distantia hujusmodi $\frac{rR}{T}$: ac denique juxta Corolla-

rium antecedens accipiendo duas quintas partes tertiæ proportionalis
ad

ad distantiam hujusmodi, & Planetæ radius, erit $\frac{2Tr^2}{5R}$ distantia cen-

tri a puncto illo, in quo imprimenda erat vis unica ut bini simul & rotationis circa centrum, & projectionis motus haberentur.

IV. Quod si etiam speciebus numeros pro casu quovis placeat substituere, atque a Terra exordiendo mediocris radius terrestris orbitæ assumatur semidiametrorum terrestrium 22918, quæ distantia ex mediocri parallaxi Solis secundorum novem colligitur, quæque est ratio sinus totius ad sinum anguli $9''$; erit distantia axis primitivæ rotationis a centro Terræ $\frac{22918 \cdot r}{365\frac{1}{4}}$, sive $62\frac{1}{4}$ terrestrium semidia-

metrorum: atque inde eruetur ad distantiam $\frac{1}{10}$ partis radii applicandam primo fuisse vim illam, ex qua bini motus exsurgerent, atque esset proportio temporum revolutionis diurnæ, & annuæ $1 : 365\frac{1}{4}$. Joannes Bernoullius de centro spontaneo rotationis agens, alia assumpta mediocri distantia Solis, aliam distantiam centri figuræ, & percussione determinavit: optime autem ostendit diurni motus rationem eandem esse quæ motus annui ratio, & causa est, & quæ videntur diversi generis phænomena ex unico tantum primitivæ impulsionis principio proficisci.

V. In Luna cum & periodica revolutio circa Terram, & revolutio circa axem absolvarur eodem tempore, erit in fig. 86., distantia centri gravitatis, atque axis primitivi CG radius ipse lunaris orbitæ: & cum radius hujusmodi sit semidiametrorum terrestrium circiter 60, & radius Terræ ad Lunæ radius se habeat ut $365 : 100$, si Lunæ radius vocetur r , erit $CG = 219 \cdot r$, & $OG = \frac{1}{547\frac{1}{2}} \cdot r$. Pariter

cum radii Terræ, & Jovis proxime sint inter se ut $1 : 10$, distantie a Sole ut $10 : 52$, tempora periodica circa Solem ut $1 : 12$, tempora revolutionum circa axes proprios ut $24 : 10$, eodem modo eruetur $CG = \frac{52 \cdot 62\frac{1}{4} \cdot r}{10 \cdot 12 \cdot 24} = 1\frac{1}{4} \cdot r$, & $OG = \frac{1}{24} \cdot r$. Et quia denique ra-

dii Terræ, & Martis sunt inter se ut $5 : 3$; distantie a Sole ut $2 : 3$ tempora periodica ut $1 : 2$, tempora vero revolutionum circa axes proprios sunt proxime inter se æqualia; si radius Martis vocetur r , erit

erit $CG = 78. r$, & $OG = \frac{1}{\omega} \cdot r$. Universim autem distantia centri gravitatis ab axe prioris rotationis erit directe ut distantia Planetæ a Sole, arque ut tempus diurnæ revolutionis, ac reciproce ut tempus revolutionis annuæ: distantia vero centri gravitatis, & percussionis erit in directa ratione simplici temporis revolutionis annuæ, & duplicata radii Planetæ, arque in ratione simplici inversa radii orbitæ circa Solem descriptæ, & temporis revolutionis circa axem proprium.

CAPUT SECUNDUM.

DE ROTATIONE

CIRCA AXEM MOTUM.

PROBLEMA IV.

SI corpus rotari incipiat circa axem aliquem utcumque motum invenire centrum percussionis.

Quia per Corol. III. Theor. III. ultima motus cujuslibet resolutio est in duos alios, quorum uno singulæ corporis particulæ circa axem positione datum BCb , fig. 86., rotari incipiant, altero parallele ad axem ipsum ferantur; sit ϕ velocitas rotationis centri gravitatis G , & communis velocitas parallele ad axem BCb concepta vocetur Δ , sitque H punctum illud, cui unica vi impressa motus hic omnis sissi, atque ex adverbo impressa rursus produci potest. Reasumptis omnibus, quæ in problemate antecedente, erit $\frac{QB}{CG}$ ϕ velo-

citas particulæ cujusque P perpendiculariter ad planum BCG concepta, eritque $\frac{PQ}{CG}$ ϕ velocitas plano eidem, & rectæ CG parallela: & vi-

ribus particularum omnium juxta PM perpendicularem radio PB agentibus ad punctum M , atque ad planum BCG relatis si elementum massæ sit dM , erit $\frac{QB}{CG} \cdot CO - BM$. ϕdM momentum parti-

culæ cujusvis P ad corpus inclinandum circa axem aliquem HO in plano BCC jacentem, & parallelum plano BCb : eritque

QB

$QB \cdot \overline{HO} - \overline{BC} \cdot \varphi \cdot dM$ momentum, quo corpus circa axem $\overline{CG}$

aliud inelinabitur perpendicularatem rectæ HO , & rectæ OC parallelum. Quod si igitur sit H centrum percussionis, & impedito motu ipsius centri nullus in toto corpore motus circa hos binos axes superfit, fieri oportebit primo $S. QB \cdot CO \cdot dM = S. QB \cdot BM \cdot dM = S. PB' \cdot dM$, & $CO = \frac{S. PB' \cdot dM}{S. QB \cdot dM}$: ac deinde erit $S. QB \cdot HO \cdot dM = \frac{CG \cdot M}{S. QB \cdot BC \cdot dM}$, five erit $HO = \frac{S. QB \cdot BC \cdot dM}{CG \cdot M}$, ut in antecedente

problemate jam dictum est. At insuper cum sit $PQ \cdot \varphi$ velocitas, quæ $\overline{CG}$

directionem habet parallelam rectæ CG in puncto quocumque P , erit $\frac{PQ \cdot \overline{HO} - \overline{BC} \cdot \varphi \cdot dM}{\overline{CG}}$ quod inde exsurgit momentum ad

corpus omne volvendum circa axem tertium plano BCG perpendicularem in puncto H . Denique cum sit Δ velocitas parallela axi BC in puncto eodem P , & sit tota motus communis quantitas $M\Delta$, cumque vis tota æquivalens, qua scilicet gigni ea motus quantitas, & extingui potest, parallele ad axem BC per centrum gravitatis G debeat dirigi, crit $M\Delta \cdot GO$ quod inde orietur momentum ad corpus omne volvendum circa axem transeuntem per punctum H , & perpendicularem plano BCG . Ut ergo impedito motu puncti H nullus omnino motus habeatur circa neutrum ex tribus axibus se se invicem ad angulum rectum secantibus in puncto H , atque ut totum corpus quiescat, oportet ut bina momenta hujusmodi æquantur sibi ex adverso, & sit $S. PQ \cdot \overline{BC} - \overline{HO} \cdot \varphi \cdot dM = M\Delta \cdot GO$: & cum summa $\overline{CG}$

omnium PQ supra, & infra planum BCG , quod per gravitatis centrum traducitur evanescat, atque ob constantes $\overline{CG}$, HO , & φ debeat esse $S. PQ \cdot \overline{HO} \cdot \varphi \cdot dM = 0$, erit $S. PQ \cdot BC \cdot \varphi \cdot dM = \frac{CG}{M\Delta \cdot GO}$. Ita igitur habebuntur tres æquationes, quæ distantiam

centri percussionis a binis axibus BCb , RCr , atque a perpendiculari CGO

CGO in corpore utcumque moto determinabunt

$$\text{I. } CO = \frac{S \cdot PB \cdot dM}{CG \cdot M}$$

$$\text{II. } HO = \frac{S \cdot QB \cdot BC \cdot dM}{CG \cdot M}$$

$$\text{III. } CO = \frac{S \cdot PQ \cdot BC \cdot \phi \cdot dM}{CG \cdot M \Delta}$$

COROLLARIUM.

Ut percussiois centrum sit in recta CO, quæ perpendiculariter ad axem rotationis BCB, aut RGr per gravitatis centrum C traducitur, & sit HO = 0, oportet etiam ut summa omnium QB.BC.dM evanescat in toto corpore: atque ut nullus sit motus axi parallelus, qui vi unica impressa in puncto H simul sili, atque ex adverso excitari potest, & sit CO . CG . MΔ = 0, oportet etiam ut producta omnia PQ . BC . φ . dM, & supra, & infra planum BCG; & citra, & ultra rectam CG se mutuo destruant. Quæ cum non semper quantitates in corporibus omnibus evanescant, nec percussiois centrum semper erit in plano per gravitatis centrum perpendiculariter ad axem ducto, nec rotationis axis semper erit perpendicularis plano ducto per centrum gravitatis, & per directionem vis, qua totus corporis motus gigni, & extinguí potest. Tres æquationes illas ex aliis principiis erutas exhibuit primum Cl. Eques Mozzius in Probl. III. de Rotatione Corporum, atque ex formularum consideratione falsum esse collegit principium axis perpendicularis plano per vis impressæ directionem, & per centrum gravitatis ducto, quod principium Joannes Bernoullius pro motu corporum generatim determinando proposuerat.

THEOREMA IV.

Idem positis si corpori cuicumque imprimatur vis aliqua, quæ circa datum axem rotari incipiat, quantitas momentorum, quæ habetur colligendo simul producta omnia massæ, velocitatis, & distantie ab axe motus in particulis singulis, æquabitur momento consimili vis impressæ.

Revolvi incipiat corpus circa axem aliquem Bb, atque ut antea sit φ velocitas rotationis centri gravitatis, PB . φ velocitas puncti

Mechanica.

U

CG

cujus

cujusque P , velocitas axi parallela Δ , & quantitas motus communis, totius corporis sit $M\Delta$. Statuamus hos binos motus unica vi gigni posse, cujus directio FH plano GCB occurrat in puncto H , & sit Π velocitas communis, quam ipsa gigneret si in centro gravitatis imprimeretur: ac sit propterea vis eadem $M\Pi$, demissoque ex F in planum GCB perpendicularo FK dividatur in binas vires, unam $\frac{FK \cdot M\Pi}{FH}$

perpendicularem plano, alteram $\frac{KH \cdot M\Pi}{FH}$ agentem in eodem plano.

Velocitas etiam rotationis in puncto P secundum PM concepta referatur ad idem planum GCB , ut in Probl. III. factum est, resolvaturque in duas alias, unam $\frac{QB}{CG} \cdot \varphi$ perpendicularem plano, alteram

$\frac{PQ}{CG} \cdot \varphi$ parallelam rectæ CG .

His positis cum sit ut antea $S \cdot QB \cdot dM = CG \cdot M_1$ summa omnium virium perpendicularium plano proposito, sive $S \cdot \frac{QB}{CG} \cdot \varphi dM$ erit $M\varphi$.

Deinde cum summa virium omnium $\frac{PQ}{CG} \cdot \varphi dM$ parallelarum rectæ

CG destruat in toto corpore, non alia vis parallela axi Bb supererit quam $M\Delta$. Cumque vires hujusmodi perpendiculares, & parallelæ ex binis viribus $\frac{FK \cdot M\Pi}{FH}$, & $\frac{KH \cdot M\Pi}{FH}$ juxta FK , & KH in

puncto H agentium exsurgant, & cum insuper quibus viribus motus aliquis gignitur, iisdem contraria directione, eodemque in loco impressis destrui debeat motus omnis; ut impedito motu puncti H nullus in toto corpore motus supersit debet esse $\frac{KH \cdot M\Pi}{FH} = M\Delta$, & $\frac{FK \cdot M\Pi}{FH} = M\varphi$.

Cum igitur corpore utcumque moto sit $CO = \frac{S \cdot PB \cdot dM}{CG \cdot M}$, erit momentum vis perpendicularis $\frac{FK \cdot M\Pi}{FH}$ circa axem Bb exerci-

tum $\frac{FK \cdot CO \cdot M\Pi}{FH} = CO \cdot M\varphi = S \cdot \frac{PB \cdot \varphi \cdot dM}{CG}$: momentum scilicet

cer, quod exurgit vim perpendicularem plano GCB ducendo in distantiam CO a primitivæ rotationis axe Bb , æquabitur summæ particularum omnium rotantium in totam rotationis velocitatem, atque in distantiam ab axe motus ductarum.

COROLLARIA.

I. Si nullus sit motus axi parallelus, & sit tota vis perpendicularis $M\pi = Mp$, simplicior fiet theorematis demonstratio. Id ipsum etiam pro eodem casu ex aliis principiis antecedentibus facile colligetur. Nam si corpus N , fig. 91., virga inflexili NA alligatum circa punctum A velocitate C oscillari incipiat, & corpus aliud M in motum agat, agendo autem amittat velocitatem c ut sit residua velocitas $C - c$; quia corpora N, M , eadem vi inflexili alligata, eadem etiam velocitate angulari moveri debent, erit primo $\frac{N \cdot NA \cdot c}{MA}$ vis omnis, qua corpus N aget in aliud corpus M , &

velocitas a corpore M acquisita erit $\frac{N \cdot NA \cdot c}{M \cdot MA}$

$C - c = \frac{N \cdot NA \cdot c}{M \cdot MA} = NA : MA$. Inde vero eruetur

$c = \frac{M \cdot MA \cdot C}{N \cdot NA + M \cdot MA}$. Erit igitur post communicationem motus

in binis simul corporibus motus quantitas

$\frac{N \cdot C - c + M \cdot N \cdot NA \cdot c}{M \cdot MA} = \frac{N \cdot NA \cdot C + M \cdot N \cdot NA \cdot MA \cdot C}{N \cdot NA + M \cdot MA}$,

cum ante communicationem esset quantitas motus $N \cdot C$. Summa autem momentorum post eandem communicationem erit

$\frac{N \cdot NA \cdot C - c + M \cdot MA \cdot N \cdot NA \cdot c}{M \cdot MA} = N \cdot NA \cdot C$, idem scilicet

momentum quod ante communicationem motus habebatur.

II. Si manentibus punctis P , & O , fig. 86., punctum C longius semper abire intelligatur, rectæ CO, PB, CG ad parallelismum, & ad æqualitatem propius semper accedent, cumque fiet ultimo $CO = PB$, motus punctorum P , & O secundum lineas parallelas dirigetur, & rotationis motus in progressivum desinet: eritque in hoc

U 2

casu

casu quantitas motus communis in toto corpore

$Mp = FK \cdot MI$, æqualis scilicet quantitati vis impressæ. Alia igitur
 $\frac{FH}{FH}$

tur in corporibus libere sibi occurrentibus, projectisque, alia in corporibus rotantibus, & oscillantibus lex erit, ut cum illa ante, & post ictum eandem quantitatem motus conservent, hæc eandem conservent quantitatem momentorum, quæ ex massa particulæ uniuscujusque, velocitate, ac distantia ab axe motus metiuntur. Newtonus in Lem. III., atque in Propos. XXXIX. Lib. III. Princip. Mathem. cum dato motu, qui in exteriori Terra a perturbatricibus Solis, & Lunæ viribus induci debet, investigaret qua lege ad interiorem globum motus transire, & qui in tota terra motus residuus esse posset, principium conservationis quantitatis motus in corporibus rotantibus æque ac in corporibus libere impulsis locum habere censuit. Generales autem formulæ percussionis corporum perspicue indicant quantitatem motus in rotatione corporum quantitatem momentorum substitui oportere.

III. Et qua ratione in corporibus libere sibi occurrentibus, ubi ictus omnis per gravitatis centrum dirigitur, ex quo eadem maneat ante, & post ictum corporum motus quantitas, data velocitate ante ictum determinatur velocitas post ictum, ut libri hujus initio dictum est; ita etiam in corporum oscillatione, ac rotatione cum eadem semper maneat summa productorum omnium massæ particulæ uniuscujusque, velocitatis, & distantie ab axe motus, dato momento vis impressæ determinari poterit velocitas rotationis. Scilicet angularis velocitas æqualis erit producto vis impellentis, & distantie ab axe motus diviso per summam omnium elementorum corporis ductorum in quadrata distantiarum singularum ab axe ipso: absoluta autem velocitas particulæ ejusque æquabitur angulari velocitati ductæ in distantiam particulæ propositæ ab axe. Quod si plures vires imprimantur simul in eodem corpore, momentum vis ex omnibus compositæ æquale erit momento rotationis, & angularis, atque absoluta rotationis compositæ velocitas eadem semper ratione determinari poterit.

THEO-

THEOREMA V.

Si corpus aliquod ob vim quamcumque inclinari primum incipiat circa axem aliquem, & duplex inde motus oriatur projectionis, & rotationis circa centrum gravitatis; motus projectionis idem erit ac si in centro ipso, directione parallela, primo impressa fuisset vis omnis: motus autem rotationis idem erit, ac si fixum maneret centrum, & vis omnis in solum rotationis motum impenderetur.

Positis iisdem denominationibus præcedentibus, si Δ sit velocitas, quæ in particulis singulis parallele ad axem dirigitur, & ϕ velocitas qua gravitatis centrum projicitur perpendiculariter ad planum CBC , quæque toti pariter corpori est communis, utraque autem gignatur vi $M\Pi$ juxta directionem FH impressa in puncto H , & æquali vi in contrariam partem reagente extingui possit; in primis ob KH parallelam utrique axi BC , & RG , atque ob $KH \cdot \Pi = \Delta$, & $FK \cdot \Pi = \phi$,

$$\frac{FH}{FH} - \frac{FH}{FH}$$

quæ binæ erant antecedentis theorematismæ æquationes, velocitas utraque Δ , & ϕ eadem erit, quam binæ vires $\frac{KH \cdot M\Pi}{FH}$, & $\frac{FK \cdot M\Pi}{FH}$

parallele ad KH , FK , seu quam vis unica $M\Pi$ parallele ad FH impressa in centro gravitatis potuisset gignere. Deinde vero si vi omni juxta FH impressa in puncto H , & motu primum suborto circa axem BC , sit Δ velocitas axi parallela, & sit $\frac{PB}{CG} \cdot \phi$, sive

$\phi + \frac{PR}{CG} \cdot \phi$ velocitas rotationis particulæ cujusque P ; intelligamus

vim aliam æqualem parallele ad FH , & contraria cum directione imprimi in centro G . Orientur inde ex adverso velocitates — Δ , & — ϕ , quibus communis centri gravitatis, & particularum omnium motus extinguetur. Hoc autem in casu fixum maneret centrum gravitatis, & sola superesset velocitas $\frac{PR}{CG} \cdot \phi$ proportionalis distantie

ab axe RG , quæque est ipsa velocitas rotationis circa gravitatis centrum conceptæ. Quod si igitur cuicumque corpori imprimatur vis aliqua, cujus directio per gravitatis centrum non transeat, idem projectionis motus habebitur, ac si in centro vis omnis parallela directione

im.

imprimeretur: & velocitas rotationis inde ortæ eadem erit, quæ circa axem fixum RG , eadem vi eodem in loco impressa produci posset.

COROLLARIUM.

Directio itaque, & quantitas communis motus, sive qui parallele ad axem rotationis dirigitur, sive qui perpendicularis est plano per axem ipsum, & gravitatis centrum transito, minime pendet ex loco, & ex distantia a centro, in qua imprimitur vis motrix, & quæ non nisi velocitatem rotationis circa idem centrum conceptæ majorem, minoremve potest exhibere; atque ita pro inveniendâ velocitate rotationis, quæ data vi, & dato in loco libere impressa circa axem per centrum gravitatis transeuntem gignitur, neglecto communi, motu axis veluti fixus spectari poterit: ac pariter pro inveniendâ velocitate projectionis, negligi poterit rotationis cujuscvis motus, perinde ac si in centro gravitatis vis omnis imprimeretur, quæ plane singulares sunt leges, ac proprietates corporum projectionum, & simul circa centrum gravitatis rotantium.

PROBLEMA V.

Datis æquationibus centri percussiois ad primitivæ rotationis axem relati, invenire æquationes, quæ centrum idem relate ad axem rotationis conceptæ circa gravitatis centrum determinant.

Positis omnibus, quæ in Probl. IV. præmissa sunt, cum sit $QB, BC = \overline{CG} - \overline{QR} \cdot \overline{RG}$, cumque summa omnium $RG \cdot dM$ hinc inde a centro gravitatis sumptarum oppositione signorum, ac terminorum æqualitate destruat, atque ob constantem CG sit etiam in toto corpore $S \cdot \overline{CG} \cdot \overline{RG} \cdot dM = 0$, erit $HO = \frac{S \cdot \overline{QR} \cdot \overline{RG} \cdot dM}{\overline{CG} \cdot M}$:

cumque insuper sit $PB = \overline{CG} + \overline{PR} \mp 2 \overline{CG} \cdot \overline{QR}$, & summa posterioris termini $S \cdot \overline{CG} \cdot \overline{QR} \cdot dM$ similiter destruat in toto corpore, erit prior antecedentis problematis æquatio $CO = \frac{S \cdot \overline{PB} \cdot dM}{\overline{CG} \cdot M} =$

$\overline{CG} + \frac{S \cdot \overline{PR} \cdot dM}{\overline{CG} \cdot M}$. Hoc autem posito erit $GO = \frac{S \cdot \overline{PR} \cdot \varphi \cdot dM}{\overline{CG} \cdot M}$:

cumque in tertia æquatione problematis ejusdem sit etiam $GO = \frac{S \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{RG} \cdot \varphi \cdot dM}{\overline{CG} \cdot M \Delta}$, & reducto rectæ HO valore ad secundam

dam æquationem relato esse debeat $GO:HO=S.PR'.dM:S.QR.RG.dM$, tres æquationes illæ abibunt in binas alias, quæ percussionis centro determinando relate ad axem rotationis circa gravitatis centrum concepto sufficient,

$$I. S . PR' . \Delta . dM = S . PQ . RG . \varphi . dM .$$

$$II. HO . S . PR' . dM = GO . S . QR . RG . dM .$$

COROLLARIA.

I. Ita igitur ex tribus iis Mozzii æquationibus facile has alias æquationes binas collegimus, quas alia omnino ratione erutas exhibuit primum Eulerus in Probl. LIX. de motu corporum rigidorum. Ex iis rursus manifestum est quod ut percussionis centrum sit in recta CO , & fiat $HO = 0$, esse debet $S . QR . RG . dM = 0$: atque ut nullus sit motus axi parallelus, ac fiat $\Delta = 0$ esse debet $S . PQ . RG . dM = 0$: quæ duo cum non semper haberi possint, patet rursus principii illius falsitas, quo assumebat Bernoullius percussionis centrum semper esse in plano per gravitatis centrum perpendiculariter ad rotationis axem traducto.

II. Cum facilis hujus problematis reductionibus prodeat

$$GO = \frac{S . PR' . dM}{CG . M}, \text{ \& sit } \frac{PR' . \varphi}{CG} \text{ velocitas, quæ circa axem}$$

RG priori BC parallelum, & circa gravitatis centrum debet exsurgere, & cum juxta Theor. IV. esse debeat $FK . MII . GO = GO . M\varphi =$

$\frac{FH}{FH}$

$\frac{S . PR' . \varphi . dM}{CG}$; momentis ad axem RG relatis adhuc momentum vis $\frac{FK}{FH} . MII$ æquabitur summæ momentorum omnium rotationis

vis alterius, in quam prioris rotationis motus seposito communi motu projectionis resolvitur, ac fit circa centrum gravitatis.

III. Cum autem sit $PB' = CG' + PR' \mp 2CG . QR$, posteriore termino omisso, qui in toto corpore signorum oppositione destruitur, acceptaque differentia quadratorum PB' , PR' , erit $CG . M\varphi$ differentia momentorum duarum rotationum, quæ circa binos axes parallelos per C , & G transeuntes haberi possunt: scilicet differentia hujusmodi æquabitur momento strati alicujus cylindrici, per cujus super-

superficiem intelligatur distributa massa corporis, & cujus radius sit CG ; velocitatis autem particulæ ejusque circa axem ea sit, quæ primo gravitatis centrum perpendiculariter ad primitivæ rotationis axem moveri incipit. Momentum rotationis circa axem transeuntem per centrum gravitatis erit minimum momentorum omnium, quæ circa alios parallelos axes similiter habentur: quod aliud singulare theorema ab Eulero traditum est in Probl. XXV.

IV. Si corpori cuicumque ex adversis partibus imprimantur vires contrariæ, quibus æquales velocitates centro gravitatis in partes contrarias possint imprimi, iisque se se invicem destruentibus solus superfit motus rotationis circa axem transeuntem per idem centrum; momentum virium omnium impressarum æquabitur momento totius corporis circa hujusmodi axem rotantis. Momentum enim vis uniuscujusque circa axes alios parallelos æquabitur momento initialis rotationis: atque ob destructum communem motum projectionis differentiarum omnes momentorum circa axem transeuntem per centrum gravitatis, & circa axes alios parallelos, se mutuo destruent, & quod supererit momentum rotationis circa idem centrum resolutæ æquabitur omnibus momentis virium.

PROBLEMA VI.

Data æquatione corporis relati ad planum, quod per gravitatis; centrum perpendiculariter ad directionem vim impellentis ducitur, invenire æquationes generales, quæ rotationis axem relate ad planum idem determinant.

Sit in fig. 92. Gh perpendicularum ex centro gravitatis G demissum in directionem vis impressæ FH , & in plano per Gh traducto perpendiculariter ad directionem ipsam Fh sit SG perpendicularis rectæ Gh . Quod si insuper plano SGh perpendicularæ sit planum TGL , & rotationis axis TG parallelus sit rectæ HO , demissoque in HO perpendicularo GO , ex puncto h ducatur recta parallela intersectioni planorum LG , ea cum recta HO ita concurret in puncto O ut anguli TGL , HOh , HPK æquales sint inter se. Denique ex puncto quocumque P propositi corporis in planum $TGOH$ ducatur perpendicularum PQ , & ex puncto Q in axem TG ducatur perpendicularum aliud QR , ac fiat $PQ = Z$, $QR = Y$, $RG = X$, & vocetur

tur ϖ sinus, & ω cosinus anguli LGS , π vero sinus, & δ cosinus anguli TGL . Erit $PR = Z + Y$, & manentibus cæteris ut in quarto Theoremate erit $\frac{KH}{FK} = \frac{\Delta}{\varphi} = \frac{\pi}{\delta}$: & si ex h in LG ducatur

perpendicularum hv , rectæque LG , & hv in plano TGL erigatur perpendicularum vV , jungaturque VH in plano $TGOH$; ob rectos angulos Vvh , vhH , OhH , erit $hv = HV = GO = \omega$. Gh . Erit etiam $Oh = \delta$. $HO = \varpi$. Gh . Cum itaque reductis tribus Probl. IV. æquationibus in Probl. V. binæ aliæ æquationes prodierint, quæ percussiois centrum ex dato motu, & vicissim positionem axis, velocitatemque corporis determinant ex data quantitate, ac directione vis impressæ

$$I. \Delta . S . PR . dM = \varphi . S . PQ . RG . dM$$

$$II. HO . S . PR . dM = GO . S . QR . RG . dM;$$

speciebus ut antea substitutis, & coordinatis corporis ad planum $TGOH$ relatis binæ æquationes aliæ habebuntur

$$I. \pi . S . \overline{Z + Y} . dM = \delta . S . XZ . dM$$

$$II. \varpi . S . \overline{Z + Y} . dM = \omega \delta . S . XY . dM.$$

COROLLARIA.

I. Si sit $\Delta = 0$, hoc est si nullus sit motus parallelus axi rotationis corporis, ob $\frac{\Delta}{\delta} = \pi$ erit etiam $\pi = \sin. TGL =$

$\sin. HOH = 0$, & rotationis axis jacebit in plano per gravitatis centrum traducto, & directioni vis impressæ occurrente ad rectos angulos. Hoc insuper in casu erit $\delta = 1$, & fiet $\frac{\varpi}{\omega} = \frac{S . XY . dM}{S . \overline{Z + Y} . dM}$. Quod ex

priore etiam solutione problematis colligitur: nam si corpus revolvatur circa axem datum, & destruentibus se se viribus aut agentibus in plano per axem ipsum, & gravitatis centrum traducto, aut plano ipsi parallelis, nullus superfit motus parallelus axi; vis, quæ ex viribus omnibus perpendicularibus exsurgit, directionem habebit plano proposito perpendicularem.

II. Si proponatur lamina aliqua plana cujuscumque figure $ABad$, fig. 95., & vis impressæ directio in ipsa jaceat, manifestum est motum omnem in plano laminæ, & circa axem aliquem laminæ perpendicu-

Mechanica.

X

larem

larem fieri oportere. Quod si directio vis impressæ perpendicularis sit laminæ $ABab$ in puncto quocumque H , manifestum est pariter nullam posse aut vim, aut motum inde exfurgere, qui in plano laminæ dirigatur. In posteriore itaque hoc casu rotationis axis LGI jacebit in plano $ABab$, ductaque SG perpendiculari ad GH , & posita perpendiculari $RP = Y$, $RG = X$ erit $\omega = \frac{\omega}{\omega}$ $LGS =$

$S.XY . dM$. Si vis oblique ad $ABab$ dirigatur, resolvaturque de modo $S.Y . dM$

re in binas alias, utraque simul rotatio habebitur, & circa axem LGI , & circa axem alium perpendicularem laminæ in centro G , atque ita axis rotationis rotius compositæ dato angulo ad planum $ABab$ inclinabitur.

III. Si proponatur solidum aliquod rotundum revolutione figuræ planæ $ABab$ circa rectam Aa genitum, & directio vis impressæ in plano aliquo per Aa ducto utcumque jaceat, ob partes æquales, similes, & similiter hinc inde positas, motus omnis fieri non poterit nisi circa axem plano ipsi perpendicularem. Quod si autem vis impressa dirigatur in plano circuli alicujus normaliter ad Aa secto, vis ipsa utrimque æqualiter se habebit ad binas partes, quæ plano per Aa ducto, & vis impressæ directionem normaliter secante dividetur, æqualia hinc inde erunt momenta virium, atque axis motus ab hujusmodi plano abduci nequaquam poterit. Universum etiam si planum per gravitatis centrum perpendiculaeriter ad directionem vis impellentis ductum dividat totum corpus in partes æquales, similes, & similiter hinc inde positas, rotationis axis pariter per centrum ductus jacebit in eodem plano.

PROBLEMA VII.

Sint in fig. 93. binæ rectæ HG , SG se invicem secantes ad rectum angulum in puncto G , & in earundem planum ex puncto quocumque P dimittatur perpendiculum PK , & ex K in SG ducatur perpendiculum aliud KV : tum vero ducatur planum TGL , quod planum prius fecerit normaliter in recta LG , atque ex P in planum TCL ducatur perpendiculum PQ , & ex Q in TG perpendiculum aliud

aliud RQ ; datisque rectis PK , KV , VG , & angulis LGS , TGL invenire oporteat valorem reclarum PQ , QR , RG .

In primis quia PK perpendicularis est plano HGS , & plano TGL parallela, recta PQ perpendicularis plano TGL æqualis erit perpendiculo KD ex K in LG ducto, junctaque QD erit angulus QDG rectus, & fiet $QD = PK$. Sit jam

$$PK = \zeta, KV = y, VG = x,$$

$$QR = Z, PR = Y, RG = X,$$

$$\varpi \text{ sinus, \& } \omega \text{ cosinus anguli } LGS,$$

$$\pi \text{ sinus, \& } \delta \text{ cosinus anguli } TGL.$$

Si ex V in GL , & KD productam ducantur perpendiculara Vv , Vu , & ex D in GT perpendiculum aliud Dr , erit $Gv = \omega x$, & ob æquales angulos VGv , vVK , VKu erit $Vu = vD = \varpi y$, & $GD = \omega x + \varpi y$. Erit etiam $Vv = uD = \varpi x$, & $KD = PQ = \omega y - \varpi x$. Insuper erit $Gr = \delta$. $GD = \delta \omega x + \delta \varpi y$: & quia ob angulum QDG rectum anguli qDr , rGD debent inter se æquari, erit $Rr = \pi$. $QD = \pi \zeta$, & $GR = \delta \omega x + \delta \varpi y + \pi \zeta$. Denique erit $QR = \delta$. $QD - Dr = \delta \zeta - \pi$. $GD = \delta \zeta - \pi \omega x - \pi \varpi y$. Itaque coordinatæ X , Z , Y coordinatis x , ζ , y , plani alterius positione dati HGS exprimi poterunt si fiat

$$X = \delta \omega x + \delta \varpi y + \pi \zeta$$

$$Z = \delta \zeta - \pi \omega x - \pi \varpi y$$

$$Y = \omega y - \varpi x.$$

COROLLARIA.

I. Hæc igitur quantitativis in se ductis, reductisque fiet

$$\text{I. } Z + Y = (\varpi^2 + \omega^2 \pi^2) x^2 + (\omega^2 + \varpi^2 \pi^2) y^2 + \delta^2 \zeta^2 \\ - 2\omega\varpi(1 - \pi^2)xy - 2\omega\pi\delta x\zeta - 2\varpi\pi\delta y\zeta.$$

$$\text{II. } XZ = -\omega^2 \pi \delta x^2 - \varpi^2 \pi \delta y^2 + \pi \delta \zeta^2 \\ - 2\omega\pi\delta xy + \omega(\delta^2 - \pi^2)x\zeta + \varpi(\delta^2 - \pi^2)y\zeta.$$

$$\text{III. } XY = -\omega\varpi\delta x^2 + \omega\varpi\delta y^2 \\ + \delta(\omega^2 - \varpi^2)xy - \omega\pi x\zeta + \omega\pi y\zeta.$$

II. Si proponatur quodcumque corpus, & elementum totius massæ sit dM , atque elementis singulis ad planum HGS relatis innotescant summæ omnes, ac fiat

$$X = 2$$

$$fx$$

$$S.x^2 dM = A, S.y^2 dM = B, S.z^2 dM = C,$$

$$S.xy dM = D, S.xz dM = E, S.yz dM = F; \text{ erit etiam}$$

$$\text{I. } S.\overline{Z^2 + Y^2} . dM = (\omega^2 + \omega^2 \pi^2) A + (\omega^2 + \omega^2 \pi^2) B + \delta . C \\ - 2 \omega \varpi (1 - \pi^2) D - 2 \omega \pi \delta E - 2 \varpi \pi \delta F.$$

$$\text{II. } S.XZ . dM = - \omega^2 \pi \delta A - \omega^2 \pi \delta B + \pi \delta C \\ - 2 \omega \varpi \pi \delta D + \omega (\delta^2 - \pi^2) E + \varpi (\delta^2 - \pi^2) F.$$

$$\text{III. } S.XY . dM = - \omega \varpi \delta A + \omega \varpi \delta B \\ + \delta (\omega^2 - \omega^2) D - \varpi \pi E + \omega \pi F.$$

III. Cum dato corpore dentur summæ omnes A, B, C, D, E, F , si dato angulo TGL angulum HGL augeri, aut minui intelligamus angulo exiguo $d\theta$, hoc est si quantitates etiam π, δ sint constantes, & solæ ω, ϖ habeantur pro variabilibus, erit $d\omega = \omega d\theta$, & $d\varpi = - \omega . d\theta$. Quare cum sit $1 - \pi^2 = \delta^2$ fiet

$$d. (\omega^2 + \omega^2 \pi^2) A = 2 \omega \omega \delta^2 A . d\theta, \text{ \&}$$

$$d. (\omega^2 + \omega^2 \pi^2) B = - 2 \omega \omega \delta^2 B . d\theta, \text{ eodemque ordine sumptis}$$

elementis omnibus terminorum, qui summam omnium $\overline{Z^2 + Y^2} . dM$ exprimunt, fiet in puncto quocumque P quantitas

$$\overline{Z^2 + Y^2} . dM = - 2 \delta . d\theta . S.XY . dM.$$

IV. Pariter si ω, ϖ pro constantibus, quantitates vero π, δ & accipiantur pro variabilibus, & sit $d\pi$ elementum variabilis anguli TGL , posito $d . \pi^2 = 2 \pi d\pi = 2 \pi \delta . d\pi$, & $d . \delta^2 = - 2 \pi \delta . d\pi$, eodemque modo aliis omnibus elementis sumptis fiet in puncto eodem P quantitas $\overline{Z^2 + Y^2} . dM = - 2 d\pi . S.XZ . dM$. Quare si binos angulos HGL, TGL , eorumque sinus, & cosinus simul variari intelligamus, binis simul iisdem variationibus copulatis fiet universim

$$\overline{Z^2 + Y^2} . dM = - 2 \delta . d\theta . S.XY . dM - 2 d\pi . S.XZ . dM.$$

V. Si quo in casu rectangula omnia XY, XZ , & quæ positiva, & quæ negativa sunt, inter se æquantur, & simul omnia compensent se se invicem, ac destruant, & fiat in toto corpore $S.XY . dM = 0$, $S.XZ . dM = 0$, erit etiam $\overline{Z^2 + Y^2} . dM = 0$. Notum est autem cujuslibet quantitatis valorem maximum, aut minimum tunc obtineri cum ipsius elementum evanescens a positivo ad negativum valorem transit. Quantitas igitur $S.\overline{Z^2 + Y^2} . dM$ in toto corpore erit ma-

maxima; aut minima cum simul fiet

$$S.XY . dM = 0, S.XZ . dM = 0.$$

PROBLEMA VIII.

Data qualibet vi impressa, & coordinatis corporis relatis ad planum illud, quod transit per centrum gravitatis, atque est directioni ejusdem vis perpendicularare, positionem axis rotationis ad idem planum determinare.

Positis omnibus ut in Probl. VI., & in fig. 92., cum prior æquatio, quæ positionem axis rotationis determinat, esse debeat

$$\overline{S.Z + Y}. dM = \frac{\delta}{\pi} S.XZ . dM, \text{ si valores quantitatum}$$

$\overline{S.Z + Y}. dM$, & $S.XZ . dM$ assumantur ex corollario secundo problematis antecedentis, & posterior hæc quantitas ducatur in $\frac{\delta}{\pi}$,

posito semper $\pi + \delta = 1 = \omega + \omega'$, fiet primo

$$(\omega + \omega' . \pi + \delta). A = A$$

$$(\omega + \omega' . \pi + \delta). B = B.$$

Deinde vero evanescent termini, in quibus occurrunt quantitates C , & D . Ac denique iisdem substitutionibus prodibit

$$- \left(1 \omega \omega \delta + \frac{\omega \delta^2}{\pi} - \omega \pi \delta \right). E = - \frac{\omega \delta^2}{\pi} E$$

$$- \left(2 \omega \pi \delta + \frac{\omega \delta^2}{\pi} - \omega \pi \delta \right). F = - \omega \delta . F.$$

Quare collectis terminis prior illa æquatio abit in hanc aliam

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega E + \omega F}{A + B}.$$

Erit etiam juxta Probl. VI. altera motus æquatio

$$S.\overline{Z + Y}. dM = \frac{\omega \delta}{\omega} . S.XY . dM, \text{ & valore totius summæ}$$

$$S.XY . dM \text{ ut antea accepto, ductoque in } \frac{\omega \delta}{\omega} \text{ prodibit eodem ordine}$$

$$(\omega + \omega' . \pi + \delta). A = A$$

$$(\omega + \omega' . \pi - \omega' \delta). B = \pi B.$$

Deinde supererit terminus $\delta^2 C$, & fiet insuper

$$- \left(1 \omega \omega \delta^2 + \frac{\omega^2}{\omega} . \delta^2 - \omega \omega \delta^2 \right). D = - \frac{\omega \delta^2}{\omega} . D.$$

Su-

Supererit etiam terminus $-\omega\pi\delta \cdot E$, ac fiet denique

$$-\left(2\omega\pi\delta + \frac{\omega}{\pi}\pi\delta\right) \cdot F = -\pi\delta \cdot \frac{1 + \omega}{\omega} \cdot F.$$

Quare cum sit $A = \pi^2 + \delta^2 \cdot A$, terminis omnibus per $\pi\delta$ divisib.
 fiet altera rotatorii motus æquatio

$$\frac{\pi + \delta}{\delta} \cdot A + \frac{\pi}{\delta} \cdot B + \frac{\delta}{\pi} \cdot C - \frac{\omega\delta}{\omega\pi} \cdot D = \omega E + \frac{1 + \omega}{\omega} \cdot F.$$

Quod si vero binæ æquationes hujusmodi simul comparantur,
 & valores quantitatum $\frac{\pi}{\delta}$, $\frac{\delta}{\pi}$ ex prioræ æquatione eruti in secunda

$$\begin{aligned} &\text{æquatione substituantur, prodibunt ordine æquationes aliæ} \\ &\frac{A + B}{\omega E + \omega F} \cdot \left(A + C - \frac{\omega}{\omega} \cdot D \right) + \omega E + \omega F = \omega E + \frac{1 + \omega}{\omega} \cdot F \\ &\frac{A + B}{\omega} \cdot \frac{A + C}{A + B} = F + \frac{\omega}{\omega} \cdot \frac{FE + \omega}{\omega} \cdot D \cdot \frac{A + B}{A + B} \\ &\frac{\omega}{\omega} = \frac{FE + D \cdot A + B}{A + B \cdot A + C} - F \end{aligned}$$

COROLLARIA.

I. Ita igitur si in fig. 92. planum hGS transeat per centrum gravitatis G , & sit perpendiculare directioni vis impressæ FHh , & perpendiculum ex puncto quocumque corporis propositi demissum in idem planum vocetur γ , sintque aliæ corporis coordinatæ in plano ductæ y , x , ac posito ut antea $S.x \cdot dM = A$, $S.y \cdot dM = B$, $S.\gamma \cdot dM = C$ &c., ex parte coordinatarum y positivarum ita accipiaturs angulus hGL ut sit ipsius tangens $\omega = \frac{A + B}{FE + D \cdot A + B}$; ac deinde in plano alio per LG ducto, & perpendiculari ad hGL ita accipiaturs angulus LGT ut sit ipsius tangens $\frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega E + \omega F}{A + B}$, habebitur quæsitus rotationis axis TC .

II. Si in peculiari aliquo casu fuerit $F = 0$, hoc si summa omnium $y\gamma \cdot dM$ oppositione signi, & terminorum æqualitate destruaturs in toto corpore, fiet tangens anguli $hGL = \frac{A + C}{D}$, & ipsius quantitas minime pendebit ex summis aliis B , & E : tangens vero anguli alterius LGT erit $\frac{\omega E}{A + B}$, & cum quantitas ω , seu sinus anguli

li hGL pendeat ex summis A, C, D , pendebit simul tangens hujusmodi ex summis omnibus A, B, C, D, E . Quod si posito $F = S.y\dot{x} \cdot dM = 0$, simul sit $S.x\dot{y} \cdot dM = E = 0$, evanescet tangens anguli LGT , ac rotationis axis TG cadet in planum hGL , & tangens anguli alterius hGL adhuc erit $= \frac{A+C}{D}$. Quod si posito

$F = 0$, & $E = 0$ sit insuper $D = S.xy \cdot dM = 0$, rotationis axis TG , ut antea, cadet in planum hGL , & tangens anguli hGL fiet major quacumque data, hoc est angulus ipse fiet rectus.

III. Patet autem utramque summam $S.y\dot{x} \cdot dM$, $S.x\dot{y} \cdot dM$ in toto corpore non posse destrui nisi planum hGL , quod per gravitatis centrum perpendiculariter ad directionem vis impellentis ducitur, dividat totum corpus in partes æquales, similes, & similiter hinc inde positas: qui est casus aut laminæ perpendiculariter impulsæ, aut corporum regularium, & rotundorum, in quibus similiter vis impressa sit perpendicularis plano per figuræ axem traducto. Rursus igitur ex formulis generalibus colligitur, quod in Corollario Probl. IV. jam dictum est, rotationis axem in hisce casibus jacere in eodem plano, cui perpendicularis est vis impressa. At insuper manifestum est præter binas priores summas summam etiam $S.xy \cdot dM$ destrui non posse nisi etiam planum per gravitatis centrum, & directionem vis impellentis ductum hinc inde relinquat partes æquales, similes, & similiter positas: qui est casus corporum regularium in ipso figuræ axe impulsorum. Tum ergo rotationis axis cum perpendiculari linea e centro ad directionem vis impellentis ducta angulum rectum constituet.

IV. Generatim si rotationis axis jaceat in plano hGL per gravitatis centrum perpendiculariter ad directionem FHh vis impellentis ducto, posito $\pi = 0$, ex priore hujus problematis æquatione eruetur $\frac{\omega}{\omega} = -\frac{F}{E}$: ex altera vero æquatione cum primo eruat

$$A + \pi^{\circ} \cdot B + \delta^{\circ} \cdot C - \omega \delta^{\circ} \cdot D - \omega \pi \delta^{\circ} \cdot E - \pi \delta^{\circ} \cdot \frac{1 + \omega^{\circ}}{\omega} = 0, \text{ similiter}$$

posito $\pi = 0$, & $\delta = 1$, eruetur etiam $\frac{\omega}{\omega} = \frac{D}{A+C}$. Ut ergo rota-

tionis

tionis axis jaceat in plano per gravitatis centrum normaliter ad directionem vis impellentis ducto tangens anguli LGS binos hos simul valores habere debet — $\frac{E}{F}$, & $\frac{D}{A+C}$, sive esse debet

$FD = -E \cdot \frac{A+C}{A+C}$. Quod cum generatim in corpore quocumque locum habere nequeat, rursus pater axem totius rotationis, quæ a vi aliqua utcumque impressa excitari potest, nec semper esse perpendicularem plano per gravitatis centrum, & directionem vis impellentis ducto, nec semper etiam jacere in plano, quod ex eodem centro perpendiculariter ad directionem eandem vis impellentis duci potest.

V. Denique cum sit tang. $LGT = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega E + \varpi F}{A+B}$, cumque

summæ omnium x , y positivum valorem habeant, nec unquam esse possit $A = 0$, $B = 0$, $\delta = 0$, patet in corpore quovis proposito ad rectum usque augeri non posse angulum LGT deviationis axis a plano AGL . Fiet autem maximus idem angulus, & tangens $\frac{\pi}{\delta}$ valorem maximum obrinebit cum elementis sumptis fiet

$E \cdot d\omega + F \cdot d\varpi = 0$. Quare cum sit elementum sinus $d\omega = -\frac{\omega}{\varpi} \cdot d\varpi$, quo in casu angulus LGT deviationis axis TG

a plano AGL in corpore quovis proposito fiet maximus, debebit esse $\omega = \frac{E}{F} = \frac{A+B}{FE+D} \cdot \frac{A+C}{A+C} \cdot F$.

SCHOLION.

Formulæ omnes, quas in posteriore hoc problemate ex aliis Probl. V., & VI. formulis derivavimus, eædem sunt, quas tradiderat Eulerus in Probl. LIX. de motu corporum rigidorum. Est enim apud Eulerum x , & y quod apud nos y , & $-x$: ac litteris A , B , E , F ordine designavit ipse, quod nos litteris B , A , F , E : & quantitates F , & D apud ipsum negativo signo accipiuntur. Hæ formulæ binis angulis, ex quibus pendet positio axis rotationis, ge-

ne-

neratim in quovis corpore determinandis sufficiunt. Utcumque vero ad minimos terminos reductæ formulæ omnes videri possint, qui iisdem in casu aliquo etiam simpliciore uti vellet, ut esset casus laminæ oblique impulsæ, multum adhuc sibi operis restare ad rotationis axem, atque ad motum omnem determinandum facile intelligeret. Nam si eadem Euleri methodo semiordinatæ x, y accipiantur in plano SGA , quod directionem vis impressæ FHh ad rectum angulum fecerit in puncto h , & planum laminæ propositæ transeat per G, H ; data æquatione, quæ secundi hujus plani figuram exprimit, longiore calculo esset opus, ut semiordinatæ prioris plani æquatione alia exprimi possent pro qualibet utriusque plani inclinatione. In casu etiam coni, conoidis, aut solidi alterius rotundi eadem æquationum reducendarum difficultas semper occurreret cum directio vis impressæ nec per figuræ axem transiret, nec jaceret in plano normaliter ad axem ducto, cumque semiordinatæ in plano alio extra axem deberent accipi. Ut directam, & simpliciore exhibeamus solutionem problematum ad theorema illud compositionis, & solutionis rotatorii motus redeundum erit.

CAPUT TERTIUM.

DE ROTATIONE

CORPORUM REGULARIUM.

PROBLEMA IX.

IN sphaera utcumque impulsæ rotationis circa centrum conceptæ momentum, & velocitatem determinare.

In primis manifestum est quod si planum alicujus circuli circa axem normaliter e centro eductum revolvatur, & in distantia illa a centro, quæ exprimitur unitate, velocitas etiam rotationis pro unitate accipitur, atque in distantia r a centro velocitas sit $= r$, & radius ad peripheriam se habeat ut $1 : p$; erit momentum peripheriæ circuli radio r descripti $= pr$, & momentum idem multiplicando per elementum radii variabilis dr , summæque accipiendo

Mechanica.

Y

erit

erit momentum totius areæ circularis $\frac{1}{2} p r^2$. Deinde quia, per Coroll. III. Probl. VI., axis rotationis sphaeræ TB debet esse, in fig. 90., perpendicularis plano ducto per centrum C , & directionem vis, quæ imprimitur in vertice L diametri alterius LI ; dividi intelligatur sphaera planis quibuscumque axi TB normalibus, & non jam radius variabilis sectionis circularis, sed sphaeræ propositæ semidiameter TG vocetur r , & sit $TP = x$, $Pp = dx$. Erit momentum segmenti sphaerici altitudinis Pp circa axem ipsum

$= \frac{1}{2} p \cdot PM^2$. $Pp = \frac{1}{2} p (4r^2 x^2 - 4rx^2 + x^2) dx$: momentum totius segmenti sphaerici altitudinis TP , sive x erit

$= \frac{1}{2} p (\frac{1}{2} r^2 x^2 - rx^2 + \frac{1}{2} x^2)$: & posito $x = 2r$ fiet momentum sphaeræ integræ $= \frac{1}{10} p r^2$. Quod si velocitas rotationis in puncto L vocetur C , & in distantia illa ab axe, quæ exprimebatur unitate, velocitas sit $= \frac{C}{r}$, atque hæc ipsa quantitas in æstimanda

velocitate accipiat loco unitatis, evadet idem momentum sphaeræ circa diametrum revolutæ $= \frac{1}{10} p r^2 C$. Jam vero, juxta Theor. IV., hoc idem esse debet momentum $r \cdot M\Pi$ vis totius $M\Pi$ impressæ in vertice diametri alterius perpendicularis. Erit igitur

$C = \frac{15}{4} \cdot \frac{M\Pi}{r}$, & loco massæ M totius sphaeræ scribendo $\frac{1}{2} p r^2$

fiet $C = \frac{1}{2} \cdot \Pi$.

COROLLARIA.

I. Si circa axem TB volvatur sphaeroidis sub polis T, B compressa, & sit æquatoris radius $GQ = a$; momenta circulorum parallelorum, qui radiis PM, PN in sphaera inscripta, & in sphaeroide describentur, inter se erunt ut $PM^2 : PN^2 = GL^2 : GQ^2 = r^2 : a^2$. Quæ ratio cum in sectionibus omnibus perpendicularibus axi sit constantis, erit momentum sphaeroidis oblatæ circa polos revolutæ $= \frac{1}{10} p a^2 C$: & si velocitas rotationis in æquatore sphaeroidis Q vocetur c , scribendo $\frac{rc}{a}$ loco C , prodibit idem sphaeroidis totius momentum $= \frac{1}{10} p a^2 rc$.

II. Quod si vis eadem $M\Pi$, quam antea superficiei sphaeræ statuimus impressam fuisse in puncto L , modo in æquatore sphaeroidis Q applicari intelligatur, erit similiter ipsius momentum

a .

$a \cdot MII = \frac{1}{4} pa^3 rc$, sive erit $c = \frac{15}{4pa^3r} MII$: atque ita angulares

velocitates $\frac{C}{r}$, $\frac{c}{a}$, quæ eadem vi MI , sive in L , sive in Q ap-

plicata in sphæroide gigni possunt, inter se erunt ut

$\frac{15}{4pr^4} MII : \frac{15}{4pa^3r} MII$, in triplicata scilicet ratione axis majoris sphæroi-

dis ad minorem.

III. Si sphærois eadem compressa non circa axem, sed circa aliquam æquatoris diametrum volvatur simul cum sphæra circumscripta, ducanturque quocumque planæ eidem diametro perpendicularia: dividetur sphærois in similes ellipses, & sphæra in totidem circulos, quorum radii æquales erunt semiaxibus majoribus ellipsium, ad minores autem semiaxes se habebunt ut major sphæroidis semiaxis a ad minorem r . Et si sphærois accedat proxime ad sphæram, momentum cujusque ellipseos censerî poterit æquale momento circuli ejusdem areæ, cujus radius sit medius proportionalis inter ellipseos semiaxes, & ad radium circuli in sphæra circumscripta secti se habeat ut $\sqrt{ar} : a$. Itaque momenta ellipseos in sphæroide, & circuli in sphæra circumscripta secti, inter se erunt in constanti ratione $a^3 r : a^4 = r^3 : a^4$. Et quia si velocitas rotationis in æquatore sphære vocetur c est sphære momentum $\frac{1}{4} pa^3 c$, erit momentum propositæ sphæroidis $\frac{1}{4} pa^3 r^3 c$.

IV. Eodem modo si proponatur sphærois oblonga, quæ ad inscriptam sphæram proxime accedat, & circa minorem axem revolvatur, ductis quocumque planis minori axi normalibus dividetur sphærois in totidem ellipses similes, & sphæra inscripta in circulos, ac momentum cujusque ellipseos proxime æquabitur momento circuli ejusdem areæ, cujus scilicet radius ad radium circuli in sphæra secti se habeat ut $\sqrt{ar} : r$. Patet enim quod si ex ellipsi, & circulo ejusdem arcæ circa idem centrum descripto dematur area, quæ utriusque communis est, spatiorum in ellipsi, & circulo superstitum latitudo, ob proximitatem sphære, & sphæroidis, exigua erit, & ejus latitudinis puncta omnia censerî poterunt distantiam a centro motus, velocitatemque, ac momentum habere æquale. Momenta igitur sphære, & sphæroidis inter se erunt ut $r^3 : a^4$, & cum sphære ipsius

inscriptæ momentum sit $\frac{4pr^2}{15a} c$, posito quod in vertice semiaxis majoris

a velocitas vocetur c , erit sphaeroidis momentum $\frac{4}{15} pr^2 ac$.

V. Pariter si proponatur sphaeroidis, quæ accedat proxime ad sphaeram, quæque simul oblata, & oblonga sit, quæ scilicet meridianum simul, & æquatorem, sectionemque alteram per polos factam, & meridiani plano normalem habeat ellipticam, quæque gignatur ellipsi circa majorem axem sic revoluta, ut vertex minoris axis ellipsim aliam describat: & si insuper sit r minor sphaeroidis semiaxis, major a , & b semiaxis tertius meridiani plano, minorique, ac majori semiaxi in centro perpendicularis, & tota sphaeroidis circa minorem axem ac roteretur, & velocitas rotationis in distantia a ab ipso axe vocetur c ; erit sphaeroidis momentum $\frac{4}{15} pb^2 arc$: in utraque enim sphaeroidis & oblonga, & oblata simul, oblongaque arcæ sectionum minori eisdem axi perpendicularium debent esse inter se quam proxime ut $ar:ab$, momenta vero ut $r^2:b^2$.

PROBLEMA X.

Si sphaeroidis, quæ accedat proxime ad sphaeram, revolvatur circa axem aliquem e centro ductum, rotationis momentum, & velocitatem determinare.

Sit in fig. 94. sphaeroidis oblonga $ADCd$, axis major AC ; minor Dd , EO æquator, XZ axis rotationis transiens per centrum T , & fiat radius sphaeræ inscriptæ $TD = r$, differentia semiaxium $AB = b$, & velocitas rotationis in æquatore L sphaeræ ipsius vocetur c , ductaque ex alio quolibet circuli $DLdR$ puncto P in axem XZ perpendiculari PM sit particulæ P velocitas $\frac{c}{r} \cdot PM$. Si recta PM secet se-

miaxem TA in H , & sit Ppr peripheria circuli, quæ a puncto P describitur, atque ad peripheriæ punctum aliud quodcumque p ducatur recta TP , producatursque quousque superficiei sphaeroidicæ in q occurrat, atque insuper ex p in PM ducatur perpendicularum pG , & ex G in TA perpendicularum aliud GF , erit TF cosinus anguli ATp , ac denique si per puncta A , q , C , transire intelligatur ellipsis ellipsi ADC similis, & æqualis, ob sphaeroidis, ac sphaeræ inscriptæ affinitatem, erit $pq = \frac{b \cdot TF^2}{r^2}$, atque in pq erit quantitas motus

bc

$\frac{bc}{r} \cdot TF \cdot PM$, momenti vero $\frac{bc}{r} \cdot TF \cdot PM$. Est autem TF

$$= \overline{GM} - \overline{MH} \cdot \frac{TK}{r} + TH, \text{ \& si summa quadratorum omnium}$$

TF per totam circuli Pqr peripheriam accipi debeat, omittenda erunt producta $2GM \cdot TH \cdot \frac{TK}{r} - 2GM \cdot MH \cdot \frac{TK}{r}$, quæ ob

constantes rectas TH, MH, TK in adversis quadrantibus oppositione signorum rectæ GM destruuntur, & pro TF sola spectanda erit quantitas $GM \cdot \frac{TK}{r} + MH \cdot \frac{TK}{r} - 2MH \cdot TH \cdot \frac{TK}{r} + TH =$

$$GM \cdot \frac{TK}{r} + \overline{MH} \cdot \frac{TK}{r} - \overline{TH} \cdot \frac{TK}{r}. \text{ Est autem } MH = \frac{MT \cdot TK}{BK};$$

$$TH = \frac{MT \cdot TB}{BK}, \text{ adeoque est } \overline{MH} \cdot \frac{TK}{r} - \overline{TH} \cdot \frac{TK}{r} =$$

$$\frac{MT}{r} \cdot \left(\frac{TK - TB}{BK} \right) = \frac{MT \cdot BK}{r}.$$

Quod si igitur radius ad peripheriam se habeat ut $r : p$, pro GM scribendo valorem medium $\frac{1}{2} PM$, acceptaque summa quantitatatum omnium $\frac{bc}{r} \cdot PM \cdot (GM \cdot TK + MT \cdot BK)$, erit

in toto eodem circulo momenti quantitas

$$\frac{pbc}{r} \left(\frac{1}{2} PM \cdot TK + PM \cdot MT \cdot BK \right). \text{ Fiat modo}$$

$r = TB = 1, BK = m, TK = n, MT = x, PM = y$ & sit momentum idem $pbc \left(\frac{1}{2} y' n^2 + y' x^2 m' \right)$. Quantitatem hanc

ducendo in elementum peripheriæ $\frac{dx}{y}$, summasque rursus per totam peri-

pheriam circuli maximi perpendiculariter ad Ppr traducti accipiendo; erit momentum particularum omnium in sphæroide oblonga extra sphæram inscriptam redundantium $\frac{1}{2} pbc \cdot 2 - m^2$, addendoque momentum sphære inscriptæ $\frac{1}{2} pc$ erit momentum totius sphæroidis $\frac{1}{2} pc \cdot 1 + 2b - bm^2$, & quantitatem hanc exæquando totius vis; qua rotatio gignitur, momento rotationis velocitas determinabitur;

CO.

Si fiat $m = 0$, & sphærois oblonga circa minorem axem figuræ Dd rotetur, erit rotationis momentum $\frac{1}{11} pc \cdot 1 + 2b$, ut etiam ex corollario quarto antecedente colligitur si rotationis velocitas in æquatore sphæræ inscriptæ vocetur c . Quod si igitur sphærois oblonga successive circa diversos axes rotari debeat, & in æquatore sphæræ inscriptæ velocitas rotationis sit c dum circa minorem axem Dd rotatio absolvitur, sit autem C velocitas dum sphærois circa aliam quamcumque rectam XZ rotatur, momentis exæquatis fiet

$$\frac{1}{11} pc \cdot 1 + 2b = \frac{1}{11} pC \cdot 1 + 2b - bm', \text{ atque inde eruetur illico } \frac{C}{c} = \frac{C - c}{c} = \frac{C}{c} - 1 = bm', \text{ quæ quantitas dupla est illius.}$$

quam Walmeslejus invenerat in Transact. Philos. anni 1758. Inde autem prodit distictimen omne, quod author clarissimus eandem semper quantitatem motus in motu rotationis servari cum Newtono assumpserit, & summam quantitarum motus sphæroidis supputaverit, cum juxta Theor. IV. eadem momenti quantitas servari debeat.

PROBLEMA XI.

Si sphærois oblata, quæ accedat proxime ad sphæram, revolvatur circa axem aliquem e centro ductum, determinare momentum, & velocitatem rotationis.

Proponatur sphærois revolutione ellipsæos $ADCD$ circa minorem axem Dd genita, eaque revolvatur pergit circa axem alium quemcumque XZ , atque ex puncto quocumque p circuli Ppr , qui a puncto P circa axem ipsum describitur, in diametrum. Pr ducta perpendiculari pG , sint GN , GS perpendiculares aliæ ex G ductæ in Dd , EO , & sit propterea pN perpendicularis ex puncto eodem p in minorem axem Dd ducta. Erit $GN = \sin. GTN = \sin. GTS + \overline{STD} = \overline{GT}$

$\sin. GTS + \overline{TBK}$, & si fiat $TD = TB = 1$, $BA = b$, $BK = m$, $TK = n$, $PM = y$, $TM = GS = x$, $GM = z$, erit $GN = mx + nz$, adeoque cum sit $pG = y - z$, erit $pN = pG + GN = y - z + mx + 2mnz + n^2 z = 1 - n^2 x^2 - m^2 z^2 + 2mnxz$. Jam vero si producat recta Tp quousque superficiæ sphæroidicæ in q occurrat, & per puncta D, q, d

tran-

transire intelligatur ellipsis similis, & æqualis ellipsi $ADCd$, ob ellipsos, & circuli affinitatem, erit recta $pq = \frac{b \cdot pN^{\circ}}{TB^{\circ}}$, & momentum re-

actæ ejusdem pq circa axem XZ motæ erit

$$\frac{bc \cdot PM^{\circ} \cdot pN^{\circ}}{TB^{\circ}} = bc \cdot y^{\circ} (1 - n^{\circ} x^{\circ} - m^{\circ} z^{\circ} + 2maxz^{\circ}). \text{ Quod si}$$

igitur in accipienda momentorum summa per totum circulum, qui radio PM describitur, negligatur posterior terminus, qui oppositione signorum rectæ $\pm z$ in adversis quadrantibus debet destrui, habitis quantitatibus y° , & x° pro constantibus, & loco variabilis z° scribendo valorem medium $\div y^{\circ}$, & posito quod radius ad peripheriam se habeat ut $1 : p$, fiet eadem momentorum summa

$$pbc \cdot y^{\circ} (1 - n^{\circ} x^{\circ} - \frac{1}{2} m^{\circ} y^{\circ}). \text{ Quod si denique hæc eadem}$$

quantitas ducatur in $\frac{dx}{y}$, quod est elementum peripheriæ circularis

ex centro T perpendiculariter ad circulum Ppr traductæ, ac rursus summæ accipiantur, erit momentum rotationis totius materiæ in sphaeroidæ oblata extra sphaeram inscriptam redundanti $\frac{4}{3} pcb (4 - m^{\circ})$, & momentum totius sphaeroidis $\frac{4}{3} pc (1 + 4b - bm^{\circ})$, & quantitatem hanc exæquando momento vis impressæ velocitas rotationis ut antea determinari poterit.

COROLLARIUM.

Si fiat $m=0$, & sphaeroidæ oblata circa axem figuræ Dd volvatur, erit sphaeroidis momentum $\frac{4}{3} pc (1 + 4b)$, ut ex primo etiam noni problematis corollario cruitur: atque ita si in æquatore sphaeræ inscriptæ rotationis velocitas sit c dum sphaeroidis circa minorem axem revolvitur, sit autem C dum revolvitur circa alium axem quemcumque, qui per centrum sphaeroidis transeat, momentis rotationum juxta Theor. IV. exæquatis fiet adhuc $\frac{C-c}{C} = \frac{C-c}{c} = bm^{\circ}$. Ita

igitur si sphaeroidi oblatae, aut oblongæ motus aliquis rotationis circa minorem axem imprimatur, ac deinde motus non nisi circa axem alium continuari possit, ob momentorum conservationem, rotationis velocitas fiet major, & in utroque sphaeroidis genere, dato angulo deviationis axis, eadem ratione augebitur, atque ubi rotationis axis

in

in axem minorem recidet velocitas restituetur in gradum pristinum : Nova autem , & singularis proprietas oblate sphaeroidis est quod isdem oblongæ sphaeroidis legibus rotationis velocitas variari debeat.

PROBLEMA XII.

Data vi, quæ perpendiculariter laminæ cuicumque planæ $ABab$ imprimitur in puncto H , fig. 95., invenire axem rotationis.

Sit rotationis axis LG , ductaque SG perpendiculari ad HG , & ex puncto quocumque P demissis in eundem axem, & in binos axes figuræ Aa , Bb perpendiculis PR , PM , PF , fiat $y = PF$, $x = PG$, $h = \sin. LGA$, $l = \cos. LGA$, $f = \sin. HGA$, $g = \cos. HGA$, & sint ut antea ω , & ω sinus, & cosinus anguli LGS . Ex notis formulis trigonometricis eruetur

$$\begin{aligned} h &= \omega g + \omega f & l &= \omega g - \omega f \\ \omega &= gl + hf & \omega &= hg - lf \\ PR &= hy - lx & RG &= ly + hx. \end{aligned}$$

His positis cum juxta postremam æquationem Probl. VI. esse debeat $\frac{\omega}{\omega} = \frac{S \cdot PR \cdot RG \cdot dM}{S \cdot PR \cdot dM}$, si coordinatis ad figuræ axes

Aa , Bb relatis summæ omnium xy se destruant, erit

$$\frac{\omega}{\omega} = \frac{hl \cdot S \cdot y^2 - x^2 \cdot dM}{h^2 S \cdot y^2 dM + l^2 S \cdot x^2 \cdot dM} : \text{ \& si summa omnium } x^2 dM$$

ut antea vocetur A , & summa omnium $y^2 dM$ vocetur B , fiet

$$\frac{\omega}{\omega} = \frac{gl + hf}{hg - lf} = \frac{B - A}{\frac{h}{l} B + \frac{l}{h} A}$$

reductisque terminis, & posito $h + l = 1$, fiet denique

$$\frac{h}{l} = \frac{gA}{fB}, \text{ \& } \frac{\omega}{\omega} = \frac{gf \cdot A - B}{g^2 A + f^2 B}.$$

Jam vero si PF , sive y sumatur constans, & loco dM accipiat dx , erit in tota recta MN summa omnium $y^2 dM = y^2 x$, & summa omnium $x^2 dM = \frac{1}{2} x^3$: cumque hujusmodi summæ hinc inde ab axe AG debeant esse æquales, si a vertice A incipiendo fiat $AG = a$, $AM = v$, $MN = u$, & sit propterea $PF = y = \pm a \mp v$, erit in toto plano proposito $A = S \int u^2 dv$, & summis omnium MN hinc inde ab eodem axe per totam diametrum ac-

ceptis

cepris $B = 2 S (a^2 - 2av + v^2) u dv$: atque hinc ultimo quantitatibus substitutis fient præcedentes ipsæ æquationes

$$\frac{h}{l} = \frac{g \cdot S \cdot \frac{1}{2} u^2 dv}{f \cdot S \cdot (a^2 - 2av + v^2) u dv}$$

$$\frac{\omega}{\omega} = \frac{gf \cdot S \cdot (\frac{1}{2} u^2 - a^2 + 2av - v^2) u dv}{g^2 S \cdot \frac{1}{2} u^2 dv + f^2 S \cdot (a^2 - 2av + v^2) u dv}$$

COROLLARIA.

I. Si proponatur aliquod rectangulum altitudinis $2a$, & latitudinis $2k$, erit $u = k$, $A = \frac{1}{2} k^2 a$, & $S \cdot (a^2 - 2av + v^2) k dv = k a^2 v - k a v^2 + \frac{1}{2} k v^3$, substituendoque $2a$ loco v fiet $B = \frac{1}{2} k a^3$, atque ita erit $\frac{h}{l} = \text{tang. } LGA = \frac{1}{\text{tang. } LGB} = \frac{g k^2}{f a^2} =$
 $= \text{tang. } HGB \cdot \frac{k^2}{a^2} = \frac{k^2}{a^2 \cdot \text{tang. } HGA}$: scilicet in dato quovis re-

ctangulo, data ratione $k^2 : a^2$, tangentes angulorum LGB , HGA jacebunt ex adversis partibus anguli BGH , eruntque inter se invicem proportionales. Erit insuper $\frac{\omega}{\omega} = \text{tang. } LGS = \frac{gf \cdot \frac{k^2}{2} - a^2}{g^2 k^2 + f^2 a^2}$.

Ac denique si fiat $a = k$, & rectangulum abeat in quadratum, erit tang. $LGS = 0$, & tang. $LGA = \frac{1}{\text{tang. } HGA}$.

II. Si proponatur triangulum ifoceale ACE , fig. 95., & sit $AG = a$, $AD = b$, $CD = c$, $AM = v$, & $MN = u = \frac{ev}{b}$, erit $S \cdot \frac{1}{2} u^2 dv = \frac{e^2 v^2}{12b^2}$, & $S \cdot (a^2 - 2av + v^2) \frac{ev dv}{b} =$
 $\frac{e}{b} (\frac{1}{2} a^2 v - \frac{1}{2} av^2 + \frac{1}{2} v^3)$: & cum juxta Cor. I. Probl. I. Lib. I. di-

stantia centri gravitatis G a vertice sit $\frac{1}{2} b$, posito $a = \frac{1}{2} b$, & $v = b$, evadet summa omnis posterior $\frac{1}{12} eb^2$, ac fiet

$$\frac{\omega}{\omega} = \frac{gf \cdot (\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} b^2)}{g^2 e^2 + \frac{1}{2} f^2 b^2}, \text{ \& } \frac{h}{l} = \frac{1}{\text{tang. } LGB} = \frac{3ge^2}{f b^2} =$$

$$\frac{3e^2}{b^2 \cdot \text{tang. } HGA}, \text{ sive tang. } HGA = \frac{3e^2}{b^2} \cdot \text{tang. } LGB.$$

Quare cum in triangulo rectangulo sit $AC = 4CD$, & $AD = b =$
Mechanica, Z 3CD

3 $CD = 3c$, erit $\frac{\omega}{\omega} = 0$, & $\text{tang. } HGA = - \text{tang. } LGB$. Si

fit c major, aut minor quam $\frac{1}{2} b$, & angulus CAE major, aut minor 60° , axis LG aut infra, aut supra rectam SG jacebit versus apicem trianguli A .

III. In parabola si altitudo omnis sit b , & parameter vocetur k , & sit $u' = kv$, erit $S. \frac{1}{2} u' dv = \frac{1}{2} k \frac{1}{2} v^{\frac{1}{2}}$, &
 $S. (a' - 2av + v^2) u dv = k \frac{1}{2} (\frac{1}{2} a' v^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} av^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} v^{\frac{3}{2}})$,
 & cum ita in parabola sit $\frac{1}{2} b$ distantia centri gravitatis a vertice, posito $v = b$, & $\frac{1}{2} b = a$, fiet posterior summa $\frac{3}{2} k \frac{1}{2} b^{\frac{3}{2}}$, ac terminis omnibus reductis eruetur $\frac{\omega}{\omega} = \frac{gf (\frac{1}{2} k - \frac{1}{2} b)}{\frac{1}{2} g^2 k + \frac{1}{2} f^2 b}$, &

$\frac{l}{h} = - \frac{12b}{35k} \cdot \frac{f}{g}$. Ita igitur quamdiu erit $k > \frac{12}{35} b$ angulus LGS

tangentis positivæ supra rectam SG jacebit ex parte punctorum B , & H . Posito $k = \frac{12}{35} b$ rotationis axis cum recta SG con-

gruet, & fiet $\frac{l}{h} = - \frac{f}{g}$: ac denique posito $k < \frac{12}{35} b$ ro-

tationis axis jacebit infra eandem rectam SG .

IV. In ellipsi cum posito semiaxe majore a , minore b , sit $u = \frac{b}{a} \sqrt{(2av - v^2)}$, erit $\frac{1}{2} u' dv = \frac{b'}{3a'} (2av - v^2)^{\frac{1}{2}} dv$.

Est autem $S. (2av - v^2)^{\frac{1}{2}} dv = \frac{1}{2} a^2 S. (2av - v^2) dv = \frac{1}{2} (a - v) (2av - v^2)^{\frac{1}{2}}$. Cum itaque posito radio ad peripheriam ut $1 : p$, facioque $v = 2a$, evanescat posterior terminus, & sit $S. (2av - v^2) dv = \frac{1}{2} pa^2$, erit $S. \frac{1}{2} u' dv = \frac{1}{2} pb' a$: & cum pariter sit

$(a^2 - 2av + v^2) u dv = ab \sqrt{(2av - v^2)} dv = \frac{b}{a} (2av - v^2)^{\frac{1}{2}} dv$, &

penultimi termini summa sit $\frac{1}{2} pb'a$, ultimi vero $-\frac{1}{2} pb'a$, erit $\frac{\omega}{\omega} = \frac{gf \cdot b' - a^2}{g^2 b' + f^2 a^2}$, & $\frac{l}{h} = - \frac{a^2}{b'} \cdot \frac{f}{g}$ scilicet juxta Coroll.

I. idem rotationis axis habebitur eadem vi ad datum angulum HGA ab axe AG impressa perimetro sive ellipsæos, sive etiam rectanguli circumscripti.

PRO-

Iisdem positis invenire velocitatem rotationis.

Sit $M \phi$ vis, quæ plano $ABab$ normaliter imprimitur in puncto H , fig. 91., & posito ut supra $\omega = \cos. LGS = \sin. LGH$, sit $\omega \cdot HG$ perpendiculum ex H demissum in rotationis axem LI , & momentum vis impressæ sit $\omega \cdot HG \cdot M \phi$. Sit etiam C velocitas rotationis in ea ab axe distantia, quæ accipitur pro unitate, & velocitas puncti cujuslibet alterius P sit $PR \cdot C$, momentum vero $PR \cdot C$. Juxta Theor. IV. esse oportebit $\omega \cdot HG \cdot M \phi = S \cdot PR \cdot C \cdot dM$ adeoque etiam $C = \omega \cdot HG \cdot M \phi$. At positis aliis omnibus antecessoris problematis denominationibus, & neglectis rectangulis xy , quæ in plano ad axem aliquem relato destruuntur signorum oppositione, est $PR^2 = h^2 y^2 + l^2 x^2$, & $S \cdot PR^2 \cdot dM = h^2 B + l^2 A$. Insuper cum sit $h = -\frac{gA}{fB}$, erit $1 - h^2 = l^2 = 1 - \frac{g^2 l^2 A^2}{f^2 B^2}$, atque inde eruetur $l = \frac{f \cdot B}{f \cdot B + g^2 \cdot A}$, & $h = \frac{g^2 \cdot A}{f \cdot B + g^2 \cdot A}$, ac pariter cum sit $\frac{\omega}{\omega} = \frac{gf \cdot A - B}{g^2 \cdot A + f \cdot B}$ simili calculo prodibit

$$\omega = \frac{g^2 \cdot A + f \cdot B}{\sqrt{(g^2 \cdot A + f \cdot B^2 + g^2 \cdot f \cdot A - B^2)}}$$

Substitutis itaque terminis hisce omnibus habebitur

$$C = \frac{HG \cdot M \phi}{A \cdot B} \cdot \left(\frac{f \cdot B + g^2 \cdot A}{\sqrt{(g^2 \cdot A + f \cdot B^2 + g^2 \cdot f \cdot A - B^2)}} \right)$$

& cum radicalis terminus sit $\sqrt{(g^2 \cdot A + f \cdot B^2 + g^2 \cdot f \cdot A - B^2)}$, & sit etiam $g^2 \cdot f \cdot A = g^2 \cdot 1 - g^2 \cdot A$, & $g^2 \cdot f \cdot B = f \cdot 1 - f \cdot B$, fiet $C = \frac{HG \cdot M \phi}{A \cdot B} \cdot \sqrt{(f \cdot B + g^2 \cdot A)} = HG \cdot M \phi \cdot \sqrt{\left(\frac{f}{A} + \frac{g^2}{B}\right)}$

$$= HG \cdot M \phi \cdot \sqrt{\left(\frac{f}{\frac{1}{2} S \cdot u \cdot dv} + \frac{g^2}{4 (S \cdot a^2 - 2av + v^2 \cdot u \cdot dv)}\right)}$$

COROLLARIA.

I. Si sint a , & k semilatera alicujus rectanguli, atque ut in

Z₂

prio-

priore corollario problematis antecedentis fiat $A = \frac{1}{2} k a$, & $B = \frac{1}{2} k a'$, ac sit $M = \frac{1}{2} k a$, erit

$$C = \frac{1}{2} HG \cdot \phi \cdot \sqrt{\left(\frac{f}{k} + \frac{g^2}{a^2}\right)}$$

& si fiat $k = a$, rectangulo in quadratum abeunte, erit $C = \frac{1}{2} HG \cdot \phi$.

Pariter in triangulo isoscele cum sit $A = \frac{1}{2} c' b$, $B = \frac{1}{2} c b$, $M = c b$, erit $C = 6 HG \cdot \phi \cdot \sqrt{\left(\frac{f}{c} + \frac{9g^2}{b^2}\right)}$.

II. In parabola posito $A = \frac{1}{2} k \div b \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2} k \div b \frac{1}{2}$, erit $C = \frac{1}{2} HG \cdot M \phi \cdot \sqrt{\left(\frac{9f}{k^2 b^2} + \frac{1225g^2}{16k^2 b^2}\right)}$:

& cum altitudini b respondeat latitudo parabolæ $2\sqrt{kb}$, & sit area parabolæ $\div k \div b \frac{1}{2}$, fiet etiam $C = 5 HG \cdot \phi \cdot \sqrt{\left(\frac{f}{k^2 b^2} + \frac{1225g^2}{144b^2}\right)}$.

Pariter cum in ellipsi sit $A = \frac{1}{2} p b' a$, $B = \frac{1}{2} p b a'$, & area totius ellipsoes sit $\div p b a$, reductis ut antea terminis prodibit

$$C = \frac{1}{2} HG \cdot \phi \cdot \sqrt{\left(\frac{f}{b^2} + \frac{g^2}{a^2}\right)}$$

III. Si fiat $b = a = HG$, & ellipsis in circumscriptum circumulum degeneret, erit $f = 0$, $g = 1$, & fiet $C = \frac{4\phi}{a}$. Quod di-

recte etiam ex primis circularis motus notionibus potest colligi. Nam si circularis annulus circa diametrum aliquam volvi intelligatur, & velocitas in distantia 1 ab axe vocetur C , augeaturque, aut minuat in ratione simplici distantie, momentum erit ut velocitas eadem C ducta in quadratum sinus cuiusque recti: & quia summa quadratorum omnium ex sinus quibusque rectis per totam peripheriam per radio r descriptam dimidia est summæ quadratorum totidem maximorum r^2 ; si latitudo annuli sit dr , erit summa momentorum omnium annuli propositi $\frac{1}{2} p C r dr$, & in annulis omnibus acceptis ad centrum usque $\frac{1}{2} p C r$; quæ summa cum exæquari debeat momento vis impressæ $a \cdot M \phi$, posito $M = \frac{1}{2} p a^2$, & $a = r$, rursus eruetur $C = \frac{4\phi}{a}$.

PRO.

Data vi, quæ laminæ planæ utcumque imprimitur, motum omnem rotationis determinare.

Resolvatur vis impressa in duas partes, quarum una $M\phi$ perpendicularis sit plano laminæ $ABab$ in puncto H , & rotationem gignat circa axem LG ut antea positum in plano ipso: altera $M\Delta$ in eodem plano dirigatur perpendiculariter ad radium HG , & rotationem aliquam gignat circa axem perpendiculararem plano in centro G : nam quæ alia vis juxta radium ipsum HG dirigetur non nisi projectionis motum punctis omnibus communem gignet. Si C ut antea sit velocitas, quæ in distantia 1 ab axe LG gigni potest ob vim $M\phi$, erit ut antea $C = HG \cdot M\phi \cdot \sqrt{\left(\frac{f'}{A'} + \frac{g'}{B'}\right)}$: & si c sit

velocitas, quæ ob vim $M\Delta$ in ea ab axe perpendiculari distantia potest gigni, quæ pariter pro unitate accipiat, & momentum particulæ cujusque P circa hunc alterum axem rotantis sit $c \cdot PG$, juxta Theor. IV. fiet adhuc $HG \cdot M\Delta = c \cdot S.PG \cdot dM$, atque inde eruetur $c = \frac{HG \cdot M\Delta}{S.PG \cdot dM} = \frac{HG \cdot M\Delta}{S.PF + FG \cdot dM} = \frac{HG \cdot M\Delta}{A + B}$.

Binis igitur viribus simul impressis, & juxta Theor. II. binis rotationis motibus in rotationem unicam circa axem TG compositis, si π ut antea sit sinus, & δ cosinus anguli TGL axis TG cum plano $ABab$, fiet tang. $TGL = \frac{\pi}{\delta} = \frac{c}{C} = \frac{\Delta}{\phi \cdot A + B \cdot \sqrt{\left(\frac{f'}{A'} + \frac{g'}{B'}\right)}}$.

Denique rotationis hujus compositæ velocitas in distantia 1 ab axe TG , erit $\sqrt{(C+c)^2} = HG \cdot M \cdot \sqrt{\left(\phi \cdot \left(\frac{f'}{A'} + \frac{g'}{B'}\right) + \frac{\Delta^2}{(A+B)^2}\right)}$.

COROLLARIA.

Si juxta Corollarium primum Theorematis secundi fiat cosinus anguli TGL ad radium ut velocitas $HG \cdot M\phi \cdot \sqrt{\left(\frac{f'}{A'} + \frac{g'}{B'}\right)}$ circa axem LG concepta ad velocitatem compositæ rotationis, eademque methodo problematis præcedentis ex alia problematis hujus formula $\frac{\pi}{\delta} =$

$$\frac{\Delta}{\varphi \sqrt{A+B} \cdot \sqrt{\left(\frac{f}{A} + \frac{g}{B}\right)}} \quad \text{eruat} \quad \delta = \varphi \cdot \sqrt{A+B} \cdot \sqrt{\left(\frac{f}{A} + \frac{g}{B}\right)}$$

$$\sqrt{\left(\varphi \cdot \sqrt{A+B} \cdot \left(\frac{f}{A} + \frac{g}{B}\right) + \Delta\right)}$$

$$\text{adhuc erit velocitas composita } HG \cdot M \cdot \sqrt{\left(\varphi \cdot \left(\frac{f}{A} + \frac{g}{B}\right) + \frac{\Delta}{(A+B)}\right)}$$

II. Iisdem etiam reassumptis præcedentium problematum substitutionibus in rectangulo fiet $\frac{\pi}{\delta} = \frac{\Delta}{\varphi \cdot a^2 + k^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{f}{k^2} + \frac{g}{a^2}\right)}}$;

atque erit rotationis compositæ velocitas

$$3HG \cdot \sqrt{\left(\varphi \cdot \left(\frac{f}{k^2} + \frac{g}{a^2}\right) + \frac{\Delta}{(k^2 + a^2)}\right)}$$

& ex æquatis rectanguli lateribus in quadrato fiet

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{\Delta}{2\varphi}, \quad \& \text{ velocitas } \frac{3HG}{a^2} \cdot \sqrt{\left(\varphi + \frac{1}{2}\Delta\right)}.$$

III. In triangulo isoscele simili ratione invenietur

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{\Delta}{\varphi \cdot c^2 + \frac{1}{2}b^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{f}{c^2} + \frac{2g}{b^2}\right)}}$$

$$\text{in ellipsi vero erit } \frac{\pi}{\delta} = \frac{\Delta}{\varphi \cdot a^2 + b^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{f}{b^2} + \frac{g}{a^2}\right)}}$$

$$\& \text{ rotationis velocitas } 4HG \cdot \sqrt{\left(\varphi \cdot \left(\frac{f}{b^2} + \frac{g}{a^2}\right) + \frac{\Delta}{(a^2 + b^2)}\right)}$$

& in priore casu, posito $c = \frac{1}{2}b$, in posteriore vero, posito $a = b$, scilicet in triangulo æquilatere, & in circulo fiet æque ac in quadrato $\frac{\pi}{\delta} = \frac{\Delta}{2\varphi}$.

IV. In posteriore etiam hoc casu cum sit $HG = a$, $M = \frac{1}{2}pa$, $A = B = \frac{1}{2}pa^2$, ex antecedentibus velocitatum formulis eruetur

C

$C = \frac{4\phi}{a}$, $e = \frac{2\Delta}{a}$: scilicet eadem vi in plano circuli impressa

duplo minor angularis velocitas habebitur circa axem plano ipsi perpendiculariter in centro eductum, quam si vis esset perpendicularis plano, & rotationis motus fieret circa aliquam circuli diametrum. Quod etiam ex corollario tertio præcedentis problematis facile colligitur. Cum enim primo esse debeat $C = \frac{4\phi}{a}$, & sit $pcr^2 dr$

momentum annuli radio r , & latitudine dr descripti, & velocitate c moti circa axem perpendiculariter in centro erectum; erit $\frac{1}{2} pca^2$ summa momentorum omnium totius circuli radio a descripti: & cum momentum vis impressæ sit $a \cdot M\Delta = \frac{1}{2} pa^2 c$, rursus fit $c = \frac{2\Delta}{a}$.

PROBLEMA XV.

Si corpori cuilibet rotundo imprimatur vis aliqua, quæ perpendicularis sit plano per axem figuræ ducto, invenire axem rotationis.

Gignatur solidum revolutione figuræ planæ BAA circa rectam Aa , fig. 97., & sit PK perpendicularum ex puncto quocumque P demissum in planum BAb , atque ex K in figuræ axes AG , BG ductis perpendicularis KM , KF , & KR in axem rotationis LG , junctaque PR fiat $PK = z$, $KF = y$, $FG = x$, & manentibus aliis denominationibus Probl. X. sit $KR = hy - lx$, & $RG = ly + hx$. Si vis impressa perpendicularis esset plano BAA , juxta Coroll. I., & III. Probl. VI., rotationis axis jaceret in plano ipso, atque esset tang. $LGS = \omega = \frac{S \cdot KR \cdot RG \cdot dM}{S \cdot PR^2 \cdot dM}$. Est autem $PR^2 = PK^2 + KR^2$

atque insuper si solidum sit rotundum rectangula omnia xy in toto corpore debent destrui. Erit itaque in hoc casu

$$\frac{\omega}{\omega} = \frac{gl + hf}{hg - lf} = \frac{hl \cdot S \cdot y^2 - x^2 \cdot dM}{S \cdot (z^2 + h^2 y^2 + l^2 x^2) \cdot dM}$$

Pater autem in sectionibus omnibus circularibus perpendiculariter ad axem AG ductis summas omnium x^2 , y^2 æquari oportere. Quod si igitur fiat $S \cdot x^2 dM = S \cdot x^2 dM = A$, & $S \cdot y^2 dM = B$, erit

$$\frac{\omega}{\omega} = \frac{gl + hf}{hg - lf} = \frac{hl \cdot B - A}{h + l \cdot A + h \cdot B}$$

Hac

Hac autem data æquatione, multiplicatifque, ac reductis terminis omnibus facili demum calculo eruetur $\frac{h}{l} = -\frac{2gA}{f \cdot A+B}$. Quod si igi-

tur pro expressione tangentis anguli LGS scribamur

$$\frac{B-A}{2lA + \frac{h}{l} \cdot A+B}, \text{ \& loco } \frac{h}{l} \text{ valorem ultimo inventum substi-}$$

tuamus, similiter reductis terminis habebimus

$$\frac{\omega}{\omega} = \frac{gf \cdot A - B}{1 + g^2 A + f^2 B}$$

COROLLARIA.

I. Quoniam posito radio ad peripheriam ut $1:p$, summa quadratorum omnium ex sinibus, aut cosinibus in circulo radii r est $\frac{1}{2} pr^2$, & posito r variabili est summa huiusmodi in tota circulari area $\frac{1}{2} pr^2$, adeoque posita $u = MN$ in tota sectione circulari perpendiculariter ad AC rectæ in puncto M summa omnium u^2 , aut x^2 est $\frac{1}{2} pu^2$; si fiat insuper $AM = v$, erit in formulis præcedentibus $A = \frac{1}{2} p \cdot Sur dv$. Pariter cum sit tota sectionis ejusdem area $\frac{1}{2} pu^2$, & summa quantitatum omnium y^2 , quæ in sectione quavis eadem constanter manent, sit $\frac{1}{2} pu^2 y^2$, erit

$$B = \frac{1}{2} S. (u^2 - 2av + v^2) u^2 dv.$$

II. In cono cum posita altitudine b , & radio baseos e , sit $u = \frac{ev}{b}$, erit $S. u^2 dv = \frac{e^2 v^2}{3b^2}$, & $A = \frac{1}{2} pe^2 b$. Erit etiam

$$S. (a^2 - 2av + v^2) \frac{e^2 v^2}{b^2} dv = \frac{a^2 e^2 v^2}{3b^2} - \frac{ae^2 v^3}{2b^2} + \frac{e^2 v^4}{4b^2}, \text{ ac po-}$$

sito $v = b$, $a = \frac{1}{2} b$, collectisq; terminis fiet

$$B = \frac{1}{120} pe^2 b^5. \text{ Ita igitur ex priorè formula eruetur}$$

$$\frac{h}{l} = -\frac{2ge^2}{f(e^2 + \frac{1}{2}b^2)} = -\frac{2g}{f} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b^2}{4e^2}}$$

III. In cilindro altitudinis $2a$, & radii baseos b erit $A = \frac{1}{2} pb^2 a$; & $S. (a^2 - 2av + v^2) b^2 dv = b^2 (a^2 v - av^2 + \frac{1}{3}v^3)$, substi-

tuen-

tuendoque $2a$ loco v fiet $B = \frac{1}{3} p b^2 a^2$; atque ita eruetur $\frac{h}{l} = \frac{g b^2}{f(\frac{1}{3} b^2 + \frac{1}{3} a^2)}$: & si sit $a = b$, hoc est si baseos diameter exæquet altitudinem cylindri, erit $\frac{h}{l} = \text{tang. } LGA = -\frac{1}{3} \cdot \text{tang. } HGB$.

IV. In paraboloido cum posito $u^2 = kv$ sit $S. u^2 dv = \frac{1}{3} k^2 v^3$; fiet $A = \frac{1}{3} p k^2 b^3$; & cum sit $S. (a^2 - 2av + v^2) u^2 dv = \frac{1}{3} a^2 k v^3 - \frac{1}{3} a k v^4 + \frac{1}{3} k v^5$, cumque insuper distantia centri gravitatis a vertice exæquet duas partes tertias totius altitudinis, posito $v = b$, & $a = \frac{2}{3} b$, eruetur $B = \frac{1}{3} p k b^3$, ac fiet $\frac{h}{l} = \frac{2 g k}{f.(k + \frac{1}{3} b)}$.

V. In sphæroide vero cum sit $u^2 = \frac{b^2}{a^2} (4a^2 v^2 - 4av^3 + v^4)$;

summis de more acceptis, ac posito $v = 2a$, fiet $A = \frac{1}{15} p a b^2$; & cum sit $S. (a^2 - 2av + v^2) (4av^2 - 4av^3 + v^4) dv = (a^2 v^2 - \frac{1}{3} a^2 v^3 + av^4 - \frac{1}{3} v^5)$, posito $v = 2a$, & collectis simul fractionibus fiet $B = \frac{1}{15} p a^2 b^2$, atque his valoribus in eadem formula substitutis erit

$$\frac{h}{l} = -\frac{2 g b^2}{f(a^2 + b^2)}$$

PROBLEMA XVI.

Data vi, quæ corpori rotundo utcumque imprimitur; rotationis axem determinare.

Sit $M\phi$ vis perpendicularis plano BAa in puncto H , & rotationis velocitas, quæ ob eandem vim circa axem LG posset concipi, vocetur C . Sit etiam $M\Delta$ vis jacens in plano ipso, & radio HG perpendicularis in puncto eodem H , sitque insuper c velocitas rotationis inde ortæ circa axem plano BAb perpendicularem in centro G . Eadem, qua in Probl. XIII., & XIV. usi sumus, metodo eruetur $C = \omega \cdot HG \cdot M\phi$, & $c = HG \cdot M\Delta$; & divisione facta, juxta $\frac{S \cdot PR^2 \cdot dM}{S \cdot KG^2 \cdot dM}$

Theor. II. tangens deviationis axis TG rotationis compositæ ab axe LG debeat esse $\frac{\pi}{\phi} = c = \frac{\Delta}{\omega \phi} \frac{S \cdot PR^2 \cdot dM}{S \cdot KG^2 \cdot dM}$

Est autem $PR^2 = R^2 y^2 + R^2 x^2 + z^2$, $S \cdot PR^2 \cdot dM = 1 + F \cdot A + R^2 B$,

Mechanica.

A a

&

& $S \cdot KG \cdot dM = A + B$. Insuper posito

$$\frac{h}{l} = -\frac{2gA}{f \cdot A + B}, \quad \& \quad \frac{\varpi}{\omega} = \frac{gf \cdot A - B}{1 + g^2 A + f \cdot B} \text{ fit}$$

$$r = \frac{f \cdot A + B}{f \cdot A + B + 4g^2 A}$$

$$R = \frac{4g^2 A}{f \cdot A + B + 4g^2 A}$$

$$\frac{1}{\omega^2} = 1 + \frac{g^2 f \cdot A - B}{(1 + g^2 A + f \cdot B)^2}$$

Facilis itaque hisce omnibus substitutionibus prodibit

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{\Delta}{\phi \cdot A + B} \left(\frac{A + f \cdot A + B}{f \cdot A + B + 4g^2 A} \cdot \frac{A + 4g^2 A \cdot B}{f \cdot A + B + 4g^2 A} \right) \times$$

$$\sqrt{\left(\frac{(1 + g^2 \cdot A + f \cdot B)^2 + g^2 f \cdot A - B}{1 + g^2 \cdot A + f \cdot B} \right)} : \text{posito autem}$$

$$f = f - f \cdot g^2, \quad \& \quad \text{reductio radicalis termini numeratore fiet } \frac{\pi}{\delta}$$

$$= \frac{\Delta}{\phi \cdot A + B} \left(\frac{2f \cdot A \cdot A + B + 4g^2 \cdot A \cdot A + B}{\sqrt{(f \cdot A + B + 4g^2 A)(1 + g^2 \cdot A + f \cdot B)}} \right)$$

$$= \frac{\Delta \cdot 2A}{\phi \sqrt{(f \cdot A + B + 4g^2 A)}}$$

COROLLARIUM.

Ita si sphaeris aliqua proponeretur semiaxibus a , & b descripta; atque ut antea esset $A = \frac{2}{5} p a^2 b$, $B = \frac{2}{5} p a^2 b^2$, reductis terminis prodibit

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{2b^2 \Delta}{\phi \sqrt{(f \cdot a^2 + b^2 + 4g^2 b^2)}}. \text{ Simili modo rotationis}$$

axis in solidis aliis rotundis determinari poterit, ac similibus substitutionibus, reductionibusque, quibus in posteriore aequatione hujus problematis usi sumus, posito semper $f + g = 1$, definiri etiam poterit rotationis totius velocitas, & ad minimos terminos deduci.

SCO-

SCOLION.

Eadem ratione, ac methodo rotationis velocitas supputari, atque axis positio determinari poterit in singulis polyedris, ac solidis regularibus, atque in iis etiam omnibus corporibus, quæ plano aliquo *BAa* per gravitatis centrum transeunte ita secari possunt, ut si vis impressa dirigatur in plano ipso rotationis axis sit plano perpendicularis, & si vis perpendicularis sit plano rotationis axis in plano eodem jaceat. Scilicet ex formulis quarti, & sexti problematis in casu utroque eruetur axis positio: atque ex theoremate quarto, quo momentorum quantitatem in percussione corporum variari non posse ostendimus, rotationis utriusque velocitas colligetur: ac demum juxta theorema tertium binos rotationis motus componendo invenietur axis, & velocitas rotationis quotiescumque vis aliqua oblique ad planum propositum dirigatur. Neque ita minus accuratæ, ac generales erunt solutiones problematum quam quibus apud alios auctores oscillationis centrum in planis quibuscumque, ac solidis rotatione genitis determinatur. Ut eadem methodus ad alia quælibet corpora irregularia traducatur alio insuper theoremate opus est, quod D. Segnerus in specimine theoriæ turbinum Halæ edito proposuit anno 1755, & quod deinde auctores alii variis demonstrationibus confirmarunt: quod scilicet in unoquoque corpore saltem tres axes assignari possint se ad angulum rectum secantes, circa quos ubi semel rotatio inceperit, viribus centrifugis se se invicem compensantibus, invariabiliter continuari possit. Primam theorematis singularis demonstrationem protulit Albertus Eulerus in dissertatione, quæ præmium Parisiensis Academiæ anno 1760 retulit: alias deinde addiderunt auctores alii. Leonardus Eulerus in Probl. XXVII. de motu corporum rigidorum, assumpta eadem, quæ supra, expressione quantitatis $S \cdot \dot{x}^2 + y^2 dM$, & differentialibus bis acceptis, ac nihilo exæquatis, sinum π primo, ac deinde sinum ω pro variabili accipiendo, in æquationem cubicam incidit, ejus cum una saltem realis debeat esse radix, atque aliam insuper radicem realem esse oportere ex iisdem formulis præcedentis problematis colligatur, tres omnes semper radices reales esse ostendit, & tres semper esse axes, circa quos ubi semel rotatio inceperit, inæqualitate virium centrifugarum nunquam variari possit. Radicatus

Aa 2

æqua-

æquatione aliter disposita ad eandem conclusionem facile pervenit; indicavitque tria simul theoremata trium axium principalium, conservationis momenti corporum rotantium, & compositionis motuum rotationis in corporibus quibuscumque ad definiendum initialem motum sufficere. Datis scilicet tribus axibus principalibus vis impressa in tres alias resolvi potest, quæ motum aliquem rotationis circa tres eisdem axes singillatim excitent: deinde vero ex theoremate conservationis momenti virium erui potest velocitas rotationis uniuscujusque: ac denique juxta theorema compositionis motuum rotationis binas simul rotationes componendo, rotationemque inde prodeuntem componendo rursus cum tertia, totus corporis motus definiri potest. Antequam id reductis æquationibus explicemus præciliarem aliam trademus demonstrationem theorematum trium axium principalium, quæ ex prioribus rotatorii motus notionibus facile colligitur.

CAPUT QUARTUM.

DE ROTATIONE

CORPORUM QUORUMCUMQUE.

THEOREMA VI.

AXes, circa quos corpus invariabiliter rotari potest, per gravitatis centrum transire: & binis quibuscumque axibus invariabilibus se ad angulum rectum secantibus in eodem centro semper respondere axem tertium pariter invariabilem, transeuntem per idem centrum, & plano duorum axium normalem.

Volvatur corpus circa axem aliquem RG , fig. 86., & in planum RGC ex puncto quocumque P demittatur perpendicularum PQ , & sit ut antea $PQ = Z$, $QR = Y$, $RG = X$, & elementum massæ totius corporis sit dM . Vis centrifuga puncti ejusdem P , qua scilicet, concepto rotationis motu, nitetur directe recedere ab axe RG , atque a centro R circuli descripti, proportionalis erit distantie PR , resolveturque in duas alias secundum RQ , QP , atque erit $Z \cdot dM$ vis perpendicularis plano RGC , & vis plano eidem parallela in puncto P erit $Y \cdot dM$. Erit etiam $XZ \cdot dM$ momentum particu-

læ

Iæ P ad corpus inclinandum circa rectam CO jacentem in plano RGC , & perpendiculararem axi RG : & $XY.dM$ erit momentum, quo corpus a viribus centrifugis inclinabitur circa axem tertium duobus RG, GO perpendiculararem in puncto G . Ut ergo corpus circa axem aliquem RG invariabiliter rotari possit quin continuato motu novus emergat axis rotationis, primo summa omnium virium centrifugarum hinc inde ab axe æquari, & simul destrui debet, sive esse debet $S.Z.dM=0$, & $S.Y.dM=0$: quod esse acquirit nisi rotationis axis RG transeat per centrum gravitatis G . Deinde esse debet $S.ZX.dM=0, S.YX.dM=0$, ne corpus inclinari possit aut circa axem GC , aut circa axem tertium plano RGC perpendiculararem in centro G . Simili modo, ut totum corpus circa axem GC invariabiliter possit revolvī, esse oportebit $S.ZY.dM=0, S.YX.dM=0$. Quod si insuper intelligamus rotationem totius corporis incipere circa axem tertium plano RGC perpendiculararem in centro G , & vis centrifuga particulæ cujusquæ P resolvatur in binas alias Y, X perpendiculararem unam, & alteram parallelam plano, quod per RG , & tertium hunc axem transit; erit $ZX.dM$ momentum particulæ ejusdem ad corpus inclinandum circa axem GC : eritque $ZY.dM$ momentum, quo corpus inclinari incipiet circa RG . Itaque si circa axem RG invariabiliter corpus rotari possit, & una ex binis æquationibus, quæ hanc conditionem exprimunt, sit $S.ZX.dM=0$: ac pariter si GC sit axis alius invariabilis, & sit propterea $S.ZY.dM=0$; corpus circa axem tertium duobus prioribus normalem in centro G invariabiliter revolvī poterit.

COROLLARIA.

I. Si proponatur figura quæcumque plana, & fiat $Z=0$; erit etiam $S.ZX.dM=0$, & $S.ZY.dM=0$, adeoque ex centro gravitatis eduçta recta, quæ sit figuræ ipsi perpendicularis, unus semper axis habebitur circa quem, ubi semel rotatio incœperit, eadem uniformiter poterit continuari. Quod si insuper per centrum ipsum, atque in plano propofitæ figuræ ita ducatur recta ut sit $S.YX.dM=0$, quæque propterea ob momentorum æqualitatem sit axis alius invariabilis, tertius rotationis axis pariter invariabilis determinari poterit ex gravitatis centro educendo rectam, quæ sit plano

plano duorum priorum axium perpendicularis. Et quia si QR , sive Y sumatur constans, & loco dM accipiat dX , in tota recta axi RG parallela, summa omnium $XY \cdot dM$ est $\div X \cdot Y$; problema trium axium principalium in figura qualibet plana eo reducetur ut in plano ipso, & per gravitatis centrum ducatur recta, cujus respectu sit $S \cdot X \cdot Y \cdot dY = 0$.

II. Generatim vero si figura plana axem aliquem habeat, qui coordinatas omnes bifecet ad rectos angulos, quique propterea cum momenta hinc inde relinquat inter se æqualia invariabilis rotationis axis esse possit, invariabilis alius axis in plano figuræ, & per centrum gravitatis ductus erit priori axi perpendicularis. In parallelogrammo autem quovis cum binæ rectæ per centrum gravitatis ductæ, & ad latus alterutrum parallelæ rotationis momenta hinc inde æqualia relinquant, bini alii invariabiles axes habebuntur ex centro ipso binas alias rectas educendo, quæ sint prioribus perpendiculares, atque in plano eodem jaceant. In solidis revolutione planæ figuræ genitis circa ipsum revolutionis axem uniformis rotatio haberi poterit: & diametri omnes in circulo per gravitatis centrum normaliter ad axem eundem secto, ob æqualitatem momentorum, quæ hinc inde relinquentur, erunt totidem alii invariabiles axes rotationis: ut in spheroidæ diametri omnes æquatoris, & in spherâ diametri omnino omnes.

III. In corporibus etiam quibuscumque cum pro invariabili rotationis axe esse debeat $S \cdot ZX \cdot dM = 0$, & $S \cdot YX \cdot dM = 0$, & cum juxta Coroll. IV., & V. Probl. VII. duabus hisce conditionibus possit fieri $Z \cdot Y \cdot dM = 0$, atque hoc dato cum quantitas $S \cdot Z \cdot Y$, seu quadratarum distantiarum puncti cujuslibet propositi ab axe motus exprimat etiam productum simplicis distantiarum, & vis centrifugæ; manifestum est invariabilem quemlibet rotationis axem eum esse, circa quem motu incæpto momenta virium centrifugarum, seu totius motus rotatorii maximum, vel minimum valorem habeant: & si in corpore aliquo axes hujusmodi invariabiles plures sint, plures etiam maximi, aut minimi rotatorii momenti casus in eodem corpore esse oportebit.

IV. Si vires centrifugæ non sint æquales inter se, nec hinc inde

de ab axe rotationis compenſent ſe ſe invicem, ac deſtuant, hoc eſt ſi rotationis axis non tranſeat per centrum gravitatis, motus omnis juxta Theorema tertium in binos alios reſolvi poterit projectionis, & rotationis circa axem, qui tranſeat per centrum gravitatis. Quod ſi ſit $S.Z.dM=0$, $S.Y.dM=0$, non autem $S.ZX.dM=0$, $S.YX.dM=0$, hoc eſt ſi vires quidem centrifugæ æquales ſint inter ſe, ſed tamen momenta virium ſint inæqualia, nova totius corporis rotatio orietur, eaque fiet circa axem alium tranſeuntem per centrum gravitatis, & priori axi perpendicularẽ. Data vero differentia utriuſque momenti virium centrifugarum hinc inde ab axe motus, eadem methodo, quam in Coroll. III. Theor. IV. indicavimus, determinari poterit velocitas novæ rotationis, quæ ob hanc ipſam momentorum inæqualitatem inducitur.

V. Binæ autem rotationes huiusmodi, & quæ primum a viribus impreſſis gignitur circa axem datum, & quæ deinde ob inæqualitatem momentorum adjicitur circa axem alium in centro gravitatis occurrentem priori ad rectos angulos, juxta Theor. II., rotationem unicam component circa axem tertium jacentem in plano priorum axium, & qui ab utroque iis angulis deviabitis, quorum ſinus velocitatibus angularibus circa binos eoſdem axes antea conceptis erunt reciproce proportionales. Et ſi neque circa axem hunc tertium compoſita rotatione centrifugarum virium momenta æqualia ſint, nova adhuc rotatio habebitur, eaque ſimili modo ſemper cum præcedentibus componi, & motus totius corporis ad tempus quodcumque datum assignari poterit.

PROBLEMA XVII.

Si circa axem aliquem datum impreſſus viribus quibuſcumque quodcumque corpus rotari incipiat, & centrifugarum virium momenta ſe ſe invicem non deſtruant, variationes motus inde ortas definire.

Sit in fig. 97. axis ſolidi AGx , & rotationis axis LGI , duſtaque ut antea BG perpendiculari ad AG , ſit h ſinus, & l coſinus anguli LGA , ac fiat pariter $PK=y$, $KF=y$, $FG=x$, $KR=Y=y-lx$, $RG=X=y+lx$, & ſit propterea $XY=hl$. $y^2-x^2+h^2=p^2$.

Sit

Sit insuper ds areus elemento temporis dt circa axem rotationis LGL , & in illa ab axe distantia descriptus, quæ unitate exprimatur, ac sit rotationis primo impressæ velocitas $\frac{ds}{dt}$. Quia particula quæ-

vis juxta tangentem libere, & æquabiliter excurrento a peripheria circuli recederet, & quæ tangente, & circulo intercepitur secantis portio æqualis est quadrato tangentis per diametrum circuli diviso, erit in distantia illa ab axe vis centrifuga $\frac{1}{2} ds^2$, & velocitas recedendi directe a circulo erit $\frac{ds^2}{2dt}$; eumque in particulis omnibus eodem mo-

tu angulari circa axem revolutis vis centrifuga esse debeat distantii proportionalis, erit in P velocitas recessus a centro motus $\frac{PR \cdot ds^2}{2dt}$,

& vis axi AG parallela $\frac{Y \cdot dM \cdot ds^2}{2dt}$, & momentum ejusdem vis ad

corpus omne volvendum circa axem alium plano LAC perpendicularem in centro G erit $XY \cdot dM \cdot \frac{ds^2}{dt}$. Jam vero si totum corpus circa

axem hunc ipsum velocitate c ad distantiam 1 revolvatur, erit rotationis momentum $c \cdot \overline{S \cdot y^2 \cdot dM} + \overline{S \cdot x^2 \cdot dM}$. Momentis itaque juxta Theor. IV. exæquatis, & posito ut antea $\overline{S \cdot x^2 \cdot dM} = A$, $\overline{S \cdot y^2 \cdot dM} = B$, $\overline{S \cdot xy \cdot dM} = D$, erit $c = \left(\frac{hl \cdot \overline{B - A} + \overline{h^2 - l^2} \cdot D}{A + B} \right) \frac{ds^2}{2dt}$;

& si alterius hujus rotationis motus dirigatur a puncto l in L , prior autem sic fiat ut punctum A supra planum tabulæ affurgat dum inferius deprimitur punctum a ; bini rotationis motus se destruent in recta TG , atque in plano alio per LG perpendiculariter ad AGL erecto, ac velocitatibus divisus juxta Theor. II. fiet denique tang. LGT

$$= \left(\frac{hl \cdot \overline{B - A} + \overline{h^2 - l^2} \cdot D}{A + B} \right) \frac{1}{2} dt.$$

COROLLARIA.

I. Si proponatur figura plana, quæ diametro aliqua AGa sit prædita, aut solidum revolutione planæ cujuscunque figure circa axem quem

quemcumque genitum, & sit $S. xy. dM = D = 0$;
erit $\frac{1}{2} hl. \frac{B - A}{B + A} ds$ tangens deviationis axis, circa quem ro-

tatio componitur. Atque ita si proponatur sphærois, & juxta Coroll. V. Probl. XIV. sit $A = \frac{1}{2} pb^2 a$, & $B = \frac{1}{2} pb^2 a'$, erit tangens anguli $LGT = \frac{1}{2} hl. \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} ds$, dataque proportionem semiaxium

augebitur, aut minuetur in ratione composita sinus, & cosinus anguli LGB .

II. Si sphærois utrimque ad polum B sit compressa, & sit $AG = a$, $BG = b$, & fiat propterea $b < a$, cum directio totius vis centrifugæ tendat ex R in K motus etiam rotationis inde ortus dirigitur ex puncto A in L . At si fiat $b > a$, & sphærois ad polos sit oblonga, rotationis motus, qui ex inæqualitate momentorum omnium exsurget, contraria directione tendet ex B in A , & si primæ rotationis directio intelligatur eadem, quæ antea, bini motus ex adversa parte se destruent, & angulus LGT deviationis axis compositæ rotationis infra tabulæ planum jacebit. Utroque autem in casu cum axis TG maneat in plano normaliter ad LGA per axem LG ducto, rotationis polus inæqualitate momentorum a polo figuræ recedet longius.

III. Et qua ratione axis LG in TG abit, viribus centrifugis continue agentibus, & continuato motu totius corporis, novus rotationis axis ab axe figuræ BG adhuc recedet longius, dataque proportionem semiaxium sphæroidis, & rotationis prioris velocitate, deviatio omnis ad tempus quodcumque datum ex formulis præcedentibus erui poterit. Eadem methodus exemplis aliis aptabitur corporum quorumcumque: & si in corpore aliquo momenta virium centrifugarum nec parallele, nec perpendiculariter ad planum LAG exercita se se destruant, & non sit $S. XZ. dM = 0$, simili modo velocitas novæ rotationis circa axem AGa genitæ supputari, & rotationes omnes componi, & axis locus ad tempus quodcumque datum assignari poterit.

DE ROTATIONE
THEOREMA VII.

In unoquoque corpore saltem tres esse axes per gravitatis centrum transeuntes, & sibi invicem perpendiculares, circa quos ubi semel rotationis motus incœperit, invariabiliter semper continuabitur.

Per Theor. VI. ut circa axem aliquem invariabiliter continuari possit rotatio, momenta virium centrifugarum, & parallele, & perpendiculariter ad planum quodvis traductum per axem ipsum exercita debent se invicem destruere: & per Coroll. V. Probl. VII., & Coroll. III. Theor. VI. momenta omnia earumdem virium exercita directe in axem habere debent valorem maximum, vel minimum. Jam vero si, quod in sphaera habet locum, circa diametros omnes per gravitatis centrum traductas æqualia undique habeantur momenta virium centrifugarum, manifestum est diametros esse totidem axes rotationum invariabilium; & si momenta eadem undique circa diametros omnes non sint æqualia inter se, manifestum est pariter unum saltem in toto corpore axem esse oportere, circa quem momentorum summa valorem maximum, vel minimum obtineat. Sit axis hujusmodi BGb , fig. 97., ac propterea in planis omnibus $ABab$ per axem ipsum traductis, juxta Theor. VI., sit $S.PK.FG.dM = 0$, & $S.KF.FG.dM = 0$. Ex centro G erecta GA ad BG perpendiculari, & plano $ABab$ circa BGb revoluta per totum corpus manifestum est insuper alicubi esse oportere $S.PK.KF.dM = 0$. Nam si in dato plani loco ex una ipsius facie summa momentorum omnium hujusmodi major sit quam ex altera, & deinde planum circa BGb revolvi pergat, antequam per gradus omnes in positionem adversam transeat, & ex prior eadem facie non major jam sed minor summa momentorum respondeat, alicubi ex facie utraque habebuntur momenta æqualia, iisque se se invicem oppositione signi destruentibus erit in toto corpore $S.PK.KF.dM = 0$. At si simul sit $S.PK.KF.dM = 0$, & $S.KF.FG.dM = 0$, axis etiam AGa rotationi invariabili inserviet: & per Theor. VI. ad AG , & BG ex centro G educendo perpendicularem lineam, invariabilis tertius rotationis axis habebitur. Patet igitur propositum.

COROLLARIA.

I. Si sint AG , BG bini axes invariabiles se ad angulum rectum secantes, iisdemque positis denominationibus quæ antea sit S .

$S. \dot{x}x . dM = 0$, $S. yx . dM = 0$, $S. zy . dM = 0$, statuamusque in plano ipso $ABab$ esse axem alium invariabilem LG , fieri insuper oportebit $S. \dot{z} . RG . dM = 0$, & $S. KR . RG . dM = 0$: & quia si h sit sinus, & l cosinus anguli LGA , esse debet ut antea $KR = hy - lx$, & $RG = by + hx$, binæ aliæ æquationes habebuntur $S. l \dot{y} + h \dot{x} . dM = 0$

$S. (hl . y^2 - x^2 + h^2 - l^2 xy) . dM = 0$.

II. Jam vero si in binis hisce æquationibus posterioribus priores tres combinentur supererit $S. hl . y^2 - x^2 . dM$, sive $S. y^2 . dM = S. x^2 . dM$, & quantitates h , & l , cum maneant indeterminatæ, valorem quemcumque alium habere poterunt: adeoque si in plano aliquo per gravitatis centrum traducto plusquam bini sint axes invariabiles rotationis, rectæ omnes in eodem plano per idem centrum traductæ erunt toridem axes pariter invariabiles. Datis tribus axibus invariabilibus, & quarto insuper LG patet ex Theor. VI. quantum determinari educendo ex G ad LG perpendicularem in plano AGB .

III. Si quartus aliquis axis invariabilis jaceat extra tria plana, quæ bini axes AG , BG inter se, & cum tertio axe constituunt ad AGB perpendiculariter erecto in centro G , ad plana omnia primi, & quarti, secundi, & quarti, tertii, & quarti pariter axis perpendiculares alias similiter educendo septem jam invariabiles rotationis axes habebuntur: & quatuor priores axes ad tres alios referendo, & perpendicularis aliis educitis duodecim novi axes determinari poterunt, eodemque ordine ulterius ad alios rursus axes licebit progredi.

PROBLEMA XVIII.

Si in corpore aliquo unus axis innotescat, circa quem invariabilis esse possit rotatio, binos alios axes perpendiculares determinare.

Cum in corpore quovis proposito, etiam irregulari, unus saltem axis facile innotescat, circa quem momentis virium centrifugarum ad maximum vel minimum valorem assurgentibus invariabiliter continuari possit rotatio, statuamus axem hujusmodi esse SG , fig. 93. Juxta Theor. VI., plano quoeumque SGH per axem SG traducto, & positis omnibus problematis septimi denominationibus erit

$$S . KV . VG . dM = S . xy . dM = D = 0, \quad S . PK . VG . dM$$

Bb 2

==

$\equiv S.XY.dM \Rightarrow E \equiv 0$. Quoniam bini axes alii debent esse axi SG perpendiculares, fiat $\omega \equiv \cos. LGS \equiv \sin. LGH \equiv 0$, & $\sigma \equiv \cos. LGH \equiv 1$, atque ita LC coincidat cum HG . Tum ut in plano TGL , sive TGH sit axis alius invariabilis TC , debebit esse $S.PQ.RG.dM \equiv S.XY.dM \equiv 0$,
& $S.QR.RG.dM \equiv S.XZ.dM \equiv 0$.

Jam vero si in tertia formula Coroll. II. ejusdem Probl. VII. fiat $\omega \equiv 0$, $D \equiv 0$, $E \equiv 0$, evanescent termini omnes per A, B , & F ducti: & si in secunda formula substitutiones eadem fiant, supererunt termini

$$-\pi \delta B + \pi \delta C + \overline{\delta^2} - \pi^2 . F \equiv S.XZ.dM \equiv 0:$$

atque inde æquationes aliæ ordine eruentur

$$\frac{\delta}{\pi} - \frac{\pi}{\delta} = \frac{B - C}{F}$$

$$\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{\pi}{\delta} . \frac{B - C}{F} = 1$$

$$\frac{\pi}{\delta} = \text{tang. } TGL = \text{tang. } TGH = \frac{C - B \pm \sqrt{(B - C)^2 + 4F^2}}{2F}.$$

Itaque coordinatis corporis ad planum SGH relatis, datisque summis omnibus B, C, F , valores bini habebuntur, qui binos invariabiles axes TC ad priorem axem SG normales & binos angulos TGH definient.

COROLLARIA.

I. Si bini hujusmodi valores tangentis anguli TGH ducantur in se invicem fiet

$$\left(\frac{C - B + \sqrt{(B - C)^2 + 4F^2}}{2F} \right) \left(\frac{C - B - \sqrt{(B - C)^2 + 4F^2}}{2F} \right) = -1$$

quod esse nequit, nisi tangens unius anguli æqualis sit cotangenti anguli alterius, hoc est nisi bini axes hujusmodi, in plano ad SG normali, recto pariter angulo a se invicem distent. Rursus igitur constat in unoquoque corpore saltem tres esse axes invariabiles per gravitatis centrum orthogonaliter transeuntes.

II. Pariter in unoquoque corpore saltem tres erunt axes sibi invicem in centro perpendiculares, circa quos particularum omnium

ro-

rotantium momentum erit vel maximum, vel minimum. Et quidem respectu axis SG , posito $\varpi = 0$, & $\pi = 0$, in priore formula corollarii ejusdem II. Probl. VII. fiet rotationis totius momentum

$S \cdot \overline{Z' + Y'} \cdot dM = B + C$: & si sit alter axis HG , posito $\omega = 0$, $\pi = 0$, momentum erit $A + C$: & respectu axis tertii UG , qui plano SGH insitit perpendiculariter in centro G , erit momentum $A + B$: dataque idcirco æquatione corporis momenta particularum omnium circa aliquem invariabilem axem rotantium determinari facile poterunt.

III. Si dato axe invariabili SG coincident rectæ HG , LG , & præter binos axes SG , HG , in plano HGT normaliter ad SG ducto sit axis alius invariabilis TG , & coordinatis corporis ad planum SGH relatis respectu binorum axium SG , HG , sit $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$. fiet tang. $TGL = \text{tang. } TGH = \frac{C - B}{F} \pm \frac{B \mp C}{F}$.

Accepto itaque inferiore signo erit tangens $TGH = \frac{2C - 2B}{0}$, &

angulus TGH fiet rectus ut antea dictum est. Erit vero etiam alter tangentis ipsius valor 0 : quæ cum sit quantitas indeterminata, pa-

ter rursus quod si in aliquo plano per gravitatis centrum ducto plusquam bini sint axes invariabiles rotationis, rectæ omnes in eodem plano per idem centrum ductæ erunt totidem axes pariter invariabiles.

PROBLEMA XIX.

Data æquatione corporis invenire circa quos axes invariabilis rotatio aliqua haberi possit.

In primis si juxta Theor. VI. pro casu axis cujuscumque invariabilis in formulis Probl. VII. fiat $S \cdot XY \cdot dM = 0$, generalis æquatio habebitur

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega \varpi \cdot \overline{B - A + 1 - 2\varpi^2} \cdot D}{\omega E - \omega F}.$$

Deinde si fiat $S \cdot XZ \cdot dM = 0$ altera habebitur æquatio

$$\frac{\delta - \pi}{\delta} = \frac{\omega^2 A + 2\omega \varpi D + \varpi^2 B - C}{\omega E + \omega F}.$$

Tertio si primæ æquationis valor in æquatione altera substituatur,

$$\text{fiat } \frac{\omega^3 A + 2\omega\varpi D + \varpi^3 B - C + \frac{\omega\varpi \cdot \overline{B-A} + 1 - 2\varpi^3 \cdot D}{\varpi E - \omega F}}{\frac{\omega E + \varpi F}{\varpi E - \omega F}} \\ = \frac{\varpi E - \omega F}{\omega\varpi \cdot \overline{B-A} + 1 - 2\varpi^3 \cdot D}.$$

Quod si insuper fractionum priorum denominatores dueantur in numeratorem tertiae fractionis, posito $\omega^3 + \varpi^3 = 1$, & reductis terminis erit

$$\omega (ED + FC - AF) + \varpi (BE - EC - DF) \\ = \frac{\omega E + \varpi F \cdot \overline{\varpi E - \omega F}}{\omega\varpi \cdot \overline{B-A} + 1 - 2\varpi^3 \cdot D}.$$

Quod si denique fiat $\frac{\varpi}{\omega} = T$, ac sit T tangens anguli SGL , adeoque etiam $\varpi^3 = \omega^3 T^3$, $\omega\varpi = \omega^3 T$, $1 - 2\varpi^3 = \omega^3 - \varpi^3$

$$= \omega^3 \cdot \frac{1 - T^3}{T}, \text{ posterior aequatio in hanc aliam resolvetur} \\ LD + FC - AF + T (BE - EC - DF) \\ = \frac{E + TF \cdot (T^3 E - 2TEF + F^3)}{(T \cdot \overline{B-A} + 1 - T^3 \cdot D)},$$

ductisque in se invicem, atque ordinatis terminis prodibit

$$T (F \cdot \overline{E-D} + DE \cdot \overline{B-C}) \\ + T (E \cdot \overline{E-2F+D} + DF \cdot \overline{B-2A+C} + E \cdot \overline{A-B \cdot B-C}) \\ + T (F \cdot \overline{F-2E+D} + DE \cdot \overline{A-2B+C} - F \cdot \overline{A-B \cdot A-C}) \\ + E \cdot \overline{F-D} + DF \cdot \overline{A-C} = 0.$$

COROLLARIA.

I. Quia aequationis cubicæ una saltem realis est radix, patet primo ex ipsa aequationis inspectione unum saltem esse axem, circa quem si semel incœperit rotatio a viribus centrifugis turbati nequeat. Statuamus planum HGS , ad quem scilicet coordinatæ corporis ut antea referuntur, in fig. 93. sic duci, ut sit SG axis huiusmodi invariabilis, & juxta Theor. VI. sit $Sxy.dM = 0$, $Sxz.dM = 0$, Posito $D = 0$, $E = 0$ primus, secundus, & quartus aequationis cubicæ terminus evanescant, atque in tertio aequationis termino fiet $T \cdot (F - F \cdot \overline{A-B \cdot A-C}) = 0$, sive pro eodem axe invariabili debebit esse $F = \overline{A-B \cdot A-C}$.

II. Cum autem dato uno axe invariabili SG , juxta Probl. XVIII. æquatio, quæ binos alios axes determinat, esse debeat

tang. $TGL = \frac{\pi}{\delta} = \frac{C - B \pm \sqrt{(B - C^2 + 4F^2)}}{2F}$, si valor

quantitatis F ex superiore æquatione accipiat, reducanturque termini omnes, pro binis aliis axibus fiet

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{C - B \pm \sqrt{(B + C^2 + 4A \cdot A - C - B)}}{2\sqrt{(A - B) \cdot A - C}}$$

que idcirco æquatione corporis, etiam si nullus rotationis axis innotescat, ut in Probl. XVIII. assumpsimus, semper tres axes invariabiles se invicem secantes ad rectos angulos, determinari poterunt.

PROBLEMA XX.

Datis tribus axibus principalibus corporis cujuscumque, & data qualibet vi impressa, motum rotationis definire.

Sint modo in fig. 98. tres axes principales corporis cujuslibet propositi AG , BG , UG , & posito ut antea $PK = z$, $KF = y$, $FG = x$, momentum rotatoriae velocitatis circa axem AG sit $S \cdot \frac{y^2 + x^2}{dM} = A + C$, circa BG sit $B + C$, & $A + B$ circa axem tertium plano AGB perpendicularem in centro G . Intelligamus insuper vim omnem, qua motus rotationis gignitur, utcumque ad planum AGB sit obliqua, resolvi in binas alias in puncto H , quarum una $M\phi$ sit plano ipsi perpendicularis, altera $M\Delta$ juxta HA , aut HB perpendicularem rectæ HG dirigatur: nam quæ juxta HG portio totius vis exerceri potest, cum transeat per centrum gravitatis, motum omnem rotationis minime afficiet. Juxta Theor. IV. Lib. I, vi perpendiculari $M\phi$ binæ aliæ perpendiculares pariter substitui poterunt, quarum una $\frac{BH \cdot M\phi}{AB}$ applicetur in puncto A , & ro-

tationem gignat circa axem BG , altera $\frac{HA \cdot M\phi}{AB}$ applicetur in pun-

cto B , & rotationem alteram circa AG gignat. Erit etiam vis prioris momentum $\frac{BH \cdot AG \cdot M\phi}{AB}$, & rotationis velocitas $\frac{BH \cdot AG \cdot M\phi}{AB \cdot B + C}$

mo-

momentum vis alterius $\frac{HA \cdot BG \cdot M\phi}{AB}$, & rotationis velocitas

$\frac{HA \cdot BG \cdot M\phi}{AB \cdot A + C}$. Denique si binæ vires perpendiculares sūt plano ta-

bulæ, puncta A , & B in rotatione utraque infra ipsum planum de-
primi incipient, & velocitates binæ se destruent in recta LG ex par-
te altera axis BG obversa puncto eidem H , eritque

$$\text{tang. } LGB = \frac{HA \cdot BG \cdot M\phi}{AB \cdot A + C} : \frac{BH \cdot AG \cdot M\phi}{AB \cdot B + C} = \frac{HA \cdot \overline{B + C}}{\overline{AG}} : \frac{BH \cdot \overline{A + C}}{\overline{BG}}$$

siidemque substitutis duodecimi problematis speciebus fiet

$$\frac{h}{l} = - \frac{g \cdot \overline{A + C}}{f \cdot \overline{B + C}}.$$

Inde vero solitis reductionibus eruetur

$$l = \frac{f \cdot \overline{B + C}}{\sqrt{(f \cdot \overline{B + C} + g \cdot \overline{A + C})}} = \sin. LGB.$$

Quare eum juxta Theor. II. libri hujus sin. LGB debeat esse ad ra-
dium ut velocitas $\frac{HA \cdot BG \cdot M\phi}{AB \cdot A + C}$ circa axem AG concepta ad ve-

locitatem rotationis circa axem LG compositæ, fiet hujusmodi velo-
citas $\frac{HA \cdot M\phi}{A + C} \cdot \frac{g}{f} \cdot \sqrt{\left(f + g \cdot \left(\frac{A + C}{B + C}\right)\right)}$. Denique cum vi

$M\Delta$ totum corpus rotari debeat circa axem UG plano AGB per-
pendicularem in centro G , & rotationis novæ velocitas debeat esse
 $\frac{HG \cdot M\Delta}{A + B}$, ac sit $\frac{HG}{HA} = \frac{f}{g}$; facta rursus duarum velocitatum divi-

sione habebitur tangens deviationis axis LG ab axe TG rotationis
ultimo compositæ, ac fiet

$$\text{tang. } TGL = \frac{\Delta \cdot \overline{A + C} \cdot \overline{B + C}}{\phi \cdot A + B \cdot \sqrt{(f \cdot \overline{B + C} + g \cdot \overline{A + C})}}$$

CO.

COROLLARIA.

I. Hæc cum sit generalis formula, quæ rotationis motum in quovis corpore, data qualibet vi impressa, & datis tribus axibus principalibus determinat, si in peculiari aliquo casu fiat

$A = C = S \cdot x \cdot dM = S \cdot y \cdot dM$, quod locum habet in solidis revolutione figuræ alicujus planæ circa priorem axem AG genitis, fiet tang. $TGL = \frac{1 \Delta \cdot A}{\phi \cdot \sqrt{(f \cdot A + B + 4g \cdot A)}}$, ut in Probl. XVI.

alia ratione statutum fuerat. Ita si proponatur conus, & juxta Coroll. II. Probl. XV. sit $A = C = \frac{1}{2} p e^2 b$, & $B = \frac{1}{2} p e^2 b'$, fiet tang. $TGL = \frac{\pi}{\delta} = \frac{1 \Delta e^2}{\phi \sqrt{(f \cdot e^2 + \frac{1}{2} b'^2 + 4g \cdot e^2)}}$

II. Si rotationis momenta non circa binos axes BG, UG , sed circa binos BG, AG æquantur, & sit $A + C = B + C$, adeoque $A = B = S \cdot x \cdot dM = S \cdot y \cdot dM$, erit $\frac{h}{l} = -\frac{g}{f}$, &

tang. $LGB = -\text{tang. } HGA$; ac deinde erit

tang. $TGL = \frac{\Delta \cdot A + C}{\phi \cdot A + B} = \frac{\Delta \cdot A + C}{\phi \cdot 2A}$, atque angulus TGL

minime pendebit ex angulis HGA ; & LGB . Id locum habet in solidis revolutione figuræ planæ circa axem UG genitis: unde si proponatur conus, & planum AGB sit axi figuræ perpendiculare, manentibus aliis præcedentibus denominationibus, & posito

$A = B = \frac{1}{2} p e^2 b$, & $C = \frac{1}{2} p e^2 b'$ fiet tang. $TGL = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\Delta \cdot \frac{1}{2} + b'}{\phi \cdot \frac{1}{2} + \frac{b'}{2e}}$

III. Si sit $B = C$, & $A + B = A + C$, hoc est si æquantur momenta rotationis circa axes binos AG, UG , quod locum habet in solidis revolutione figuræ planæ circa axem BG genitis, erit

$\frac{h}{l} = -\frac{g \cdot A + B}{2f \cdot B} = -\frac{g \cdot 1 + A}{2f \cdot B}$, & $\pi = \frac{1 \Delta B}{\phi \cdot \sqrt{(f \cdot B + g \cdot A + B)}}$

Quod si igitur data eadem quantitate, ac directione vis impressæ conus hanc alteram positionem habeat, & sit

Mechanica.

Cc

S.

$$S.y^2.dM = S.\frac{1}{3}.dM = B = C = \frac{1}{10}pe^2b^2, \text{ \& } S.x^2.dM = A \\ = \frac{1}{10}pe^2b, \text{ fiet } \frac{h}{I} = -\frac{g \cdot 1 + 4e^2}{3f \cdot b^2}, \text{ \& }$$

$$\text{tang. TGL} = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\Delta b^2}{\Phi \sqrt{(f^2 b^2 + 4g^2 e^2 + \frac{1}{4}b^4)}}$$

SCHOLION.

Qui species alias planorum, solidorumque corporum considerare, & posterioris hujus problematis, & problematum etiam XIV., & XV. formulas casibus singulis applicare velit, is singulares alias corporum proprietates, & motuum casus detegere, ac de Mechanica univërfa præclare mereri posset: & cum veteribus, ac recentioribus Geometris tantum laudis accesserit, quod sectionum conicarum, logarithicæ, cycloidis &c., solidorumque inde genitorum proprietates enumeraverint; quid ni operæ erit pretium leges alias evolvere momentorum, velocitatum, & axium rotationis? Hoc ego in primis argumenti genus ingenioso cuivis, ac studioso juveni proponerem, qui cum emenso jam Algebræ curriculo, sublimiori Mechanicæ addiscendæ daret operam, qua in re præcipue se exerceat, & quod daret ingenii specimen postularet. Ego enim hisce omnibus investigationibus defatigatus tradita jam, quæ directæ, & simplicior visa est, problematum resolvendorum methodo, & casibus primariis solidorum regularium explicatis, rejectaque in tertium volumen operum theoriæ motuum rotationis ad motum Terræ, aliorumque Planetarum, ac Satellitum applicatione; ad aliam jam Mechanicæ partem proporo, quæ æquilibrium, & motum corporum fluidorum respicit.

LIBER TERTIUS.

DE ÆQUILIBRIO,

ET MOTU CORPORUM FLUIDORUM:

Fluida communes habent corporum omnium proprietates, gravitatem quantitati materiæ proportionalem, vim acceleratricem æqualem semper in æqualibus a centro distantis, æquales accelerationis gradus æqualibus temporibus descendendo acquisitos, easdem omnino leges descensus, atque ascensus verticalis, & projectionis cujuscvis oblique factæ. In omnibus etiam corporibus solidis, aut fluidis specifica gravitas, & pondus speciei illud dicitur, quod exæquatis voluminibus habetur, quodque propterea est densitati proportionale si corpora ex partibus similibus coalescant singula. In hujusmodi autem corporibus, quæ idcirco homogenea appellantur, cum data gravitate specifica absolutum pondus sit proportionale volumini; absolutum pondus universim erit in ratione composita & voluminis simul, & specificæ gravitatis. Scilicet si in corpore aliquo homogeneo densitas, seu specifica gravitas vocetur G , volumen V , pondus absolutum P , in alio autem corpore quantitates hujusmodi respectively designentur litteris g, v, p , erit universim $P : p = GV : gv$, atque inde eruetur $G : g = \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$,

& $V : v = \frac{P}{G} : \frac{p}{g}$, &, quo in casu sit $P = p$, debet esse

$G : g = v : V$.

Hæ cum generatim formulæ ad corpora omnia pertineant, fluida singillatim vocantur illa, quorum minimæ omnes particule cuicumque vi extrinsecus illatæ cedunt, & cedendo moventur facillime inter se. Deprehenduntur utique in fluidis etiam corporibus vires aliquæ exiguæ, quibus exigua aliqua portio impressarum virium obtunditur antequam motus aliquis possit excitari, & quibus sit ut fluida fere omnia, aqua, oleum, vinum solidis corporibus adhærescant, atque in vasis clausa exhibeant concavam su-

Cc 2

per-

perfectiorem, mercurius autem, suis particulis adhærens fortius, recedendo a tuborum lateribus exhibeat superficiem convexam. Qua etiam inter se, & aliis corporibus adhærent aquæ particulæ exigua vis, & quæ inde pendent phænomena, non ad Physicam tantum experimentalem pertinent, ut aquæ ascensus in machina, quæ dicitur funicularis, sed in tota etiam aquarum fluentium doctrina peculiarem considerationem exposcunt, cum adhæsiōne aquarum e catara. dis labentium, aut alia quavis ratione violentius abreptarum deprehendamus superiores aquas, multo antequam ad cataraclas perveniant, sensibilibiter accelerari. Sed primum considerare in hisce investigationibus oportet, quid generatim fluidis omnibus conveniat antequam exiguarum virium habeatur ratio, attractionis, tenacitatis &c., correctionesque illæ adjiciantur, quæ singulis viribus respondent: & generatim fluida a solidis corporibus distingui debent, quod hæc utrumque in globulos divisa, minima, & levigata irregularem aliquam formam tueri possint, illa autem regulariter semper se se conforment, & novis viribus impressis motum aliquem semper concipiant.

Ex hoc principio generalis lex æquilibrīi, & directā principii illius demonstratio potest colligi, quod experiundo agnovit primum Stevinus, quod scilicet fluidi alicujus pressio in datam basim exercita sit altitudini tantum proportionalis, quin ex figura vasis utrumque pendeat. Eam fluidi cujusque corporis definitionem protulit olim Newtonus, retinueruntque nostra hæc ætate eximii authores Ivan, & Bossut. Authores alii celeberrimi quod ignoremus quæ sit minimarum fluidi mollecularum forma, & constitutio, quaque agant ratione inter se invicem, fundamentales æquilibrīi fluidorum, & pressiois leges, tanquam experimentalia principia, ab experimentis, atque observationibus assumere maluerunt: Alembertus quod vis omnis, quæ alicubi superficies fluidi in vase clausi comprimitur, æqualiter diffundatur per partes singulas, & perpendiculariter ad vasis latera exercetur: nonnulli etiam quod fluida homogenea in tubis communicantibus, & utrumque inclinatis ad horizontem ad eandem altitudinem verticalem semper ascendant. Quæ Stevini principium demonstravit primum Galilæus in sermone de solidis fluido insidentibus,

fin=

singularis ratio in speciem illam deductionis ad absurdum factæ resolvitur, qua ostendi solet duo corpora circa datum punctum suspensa moveri amplius non posse ubi excitato motu quantitates motus nonnisi utrimque æquales esse possint, & velocitates in adversam partem conceptæ sint massis reciproce proportionales.

Ad absurdum reductio hæc alia proponi posset. Si conicum, aut angustius quodcumque vas *HCDF*, fig. 99., cum vase cylindrico *ABGE* communicet, utrobique autem fluidum ad eandem horizontalem lineam *AD* assurgat, nec tamen in æquilibrio sit omne, & excitato motu quod ex una parte præponderare intelligitur fluidum cogat fluidum aliud ascendere ex adverso, & strato *MN* in *mn* abeunte stratum aliud *PQ* abeat in *pq*; ut fluidum in suis omnibus partibus continuum, & æque densum maneat, volumen fluidi *MNm* æquale esse debet volumini *PQqp*, & æquale aliud volumen per aliud quodcumque stratum *CD* eodem tempore transire debet. Ducto igitur ex *Q* in *pq* perpendiculari *Qr*, erit $PQ \cdot Qr = MN \cdot Mm$, & $MN : PQ = Qr : Mm$, hoc est velocitates fluidi ascendantis *Qr*, & descendantis *Mm* erunt amplitudinibus stratorum *PQ*, *MN* reciproce proportionales, & quantitas motus in unoquoque strato erit eadem; cumque exæquatis utrobique altitudinibus stratorum numerus in unoquoque tubo sit idem, eadem etiam erit summa quantitatum motus, & nulla habebitur descensus, atque ascensus ratio. In tubis igitur communicantibus moveri fluidum amplius non poterit cum ad eandem libellam, atque altitudinem se se componet.

Simili modo manifestum erit quod si vas quodlibet *CEFD*, fig. 100., fluido aliquo ad *CD* usque repleatur, & basis *EF* dimoveatur usque in *ef*, idem volumen fluidi *EFfe* per stratum quodvis *PQ* transire eodem tempore, atque ex *CD* effundi oportebit. Itaque in particulis omnibus basis *EF* tanto minor erit velocitas *Ee* quanto amplior erit basis, atque in strato quovis *PQ* tanto velocitas erit major quanto erit stratum angustius, quantitas autem motus in unoquoque strato erit eadem, & summa quantitatum motus, seu vis omnis, quæ ad basim dimovendam impendetur, erit numero stratorum horizontalium *PQ*, sive altitudini *LO* proportionalis. Hæc eadem erit vis, qua undique basis *EF* premetur, quæ basim niteretur

ex

ex vase suspensio divellere, quæque aperto orificio aliquo proximas fluidi particulas ad motum sollicitabit: eaque vis distinguenda erit a vi omni, qua omnes fluidi particulae deorsum tendunt, quæque est quantitati materiae proportionalis: experimento autem vis illa dignosci poterit si non quidem fluidi, & vasis pondus bilance exploretur, sed si fixis lateribus *CE*, *DF*, mobilis basis *EF*, filo *LO* producto, lanci alligetur, observeturque quod lanci alteri adijcendum sit pondus ut basis in locum usque *ef* abeat, atque inde pars ea ponderis dematur, quæ in superanda basis, ac laterum frictione impendi debet.

Hicce omnibus satis ostenditur pressionem ab eodem fluido in vasis quibusvis exercitam esse altitudini, & basi proportionalem, atque inde facile potest colligi pressionem fluidorum omnium esse in ratione composita altitudinis, basis, ac specificæ gravitatis. Mirum autem videri debet quod cum hæc omnia recte agnovisset Galilæus, in explicando ascensu aquæ in antliis aspirantibus incertus hæserit, nec nisi a Torricellio, & Viviano in locum antliæ barometro, & mercurio in aquæ locum suffecto animadversum sit in antliis aquam non ultra 32 pedes parisienses, mercurium in barometro ultra pollices 28 raro ascendere, quod sub iis altitudinibus idem sit pondus aquæ, & mercurii, & ponderi æqualis sit pressio aeris qui ex adverso antliæ, & barometri officiis incumbit. Si ratio gravitatum specificarum, seu densitatum aeris, & aquæ statuatur $0.00125 : 1$, sive $1 : 800$, aquæ vero, & mercurii $1 : 13.593$, adeoque gravitates specificæ aeris, & mercurii sint inter se ut $0.00125 : 13.593$, sive ut $1 : 10874$, quemadmodum a Muschenbroekio primum §. 850, Physicæ statutum est; pollices 28 mercurii æquipollebunt ponderi columnæ aquæ pedum 31.7, aeris vero homogenei, & ubique ejusdem, quæ prope terrestrem superficiem est, densitatis pedibus $25372 \frac{2}{7}$. Si alia densitatum aeris, & mercurii assumatur ratio $0.00125 : 14$, sive $1 : 11200$, quam Muschenbroekius idem exhibuit §. 1422, esset altitudo aeris homogenei pedum $26133 \frac{2}{7}$: esset vero altitudo aeris pedum $27766 \frac{2}{7}$, si densitatum ratio sit $1 : 11900$, ut Cotesius olim assumpserat.

Ex iisdem etiam principiis facile potest colligi cur altitudo mercurii in barometris suspensi in locis clausis, apertisque sit eadem: quod phænomeno-

nomenon qui primo Philosophi observarunt opinati sunt suspensionem mercurii in barometris pendere ex aeris vi elastica, quæ paribus a centro, & superficie Terræ distantis æqualiter exerceatur, iique insuper cum pluvio, & procelloso tempore animadvertissent elasticitatem aeris debere imminui, se etiam alterius phænomeni rationem censuerunt attigisse, quo major sereno cœlo, quam pluvia, aut procella imminente altitudo mercurii apprehenditur. At vero ex hucusque dictis colligitur fluidorum pressionem, neque ex elasticitate partium, neque ex absoluto pondere columnæ dato loco incumbentis, sed ex densitate tantum pendere, atque ex altitudine maxima cujusque fluidi: dataque propterea densitate, & altitudine in fluido elastico, & non elastico eadem pressio esse debet, eadem in cubiculo quovis, quod cum tota atmosphæra libere communicet, quodque tanquam pars vasis aliqua adusque maximam altitudinem aeris assurgentis spectari possit. Pluvio autem tempore, ut vapores qui antea pensiles in aere sustinebantur, resoluti in guttulas aquæ decidant, aer omnis debet rarefcere, & minorem gravitatem specificam, cui minor altitudo mercurii respondeat, in dato loco sibi comparare: unde imminutæ altitudinis mercurii pluvio, & procelloso tempore non alia erit causa, quam quæ pluvix, & procellæ causa est. Cumque insuper, quæ in barometris aliquando intra horas aliquot habetur pollicis unius variatio pollicibus fere $1\frac{3}{4}$ aquæ respondeat, quæ est dimidia circiter altitudo pluvix apud nos annis singulis decidentis; patet horariæ, & diurnæ etiam cujusque pluvix quantitatem præ variatione mercurii in barometris suspensi nimis exiguam esse, potioresque alias condensationis, & rarefactionis causas in aere esse oportere, & actione aliarum hujusmodi causarum fieri quod descæat a vaporibus aeris major potius evadat densitas, ac pressio, & major quæ inde oritur suspensi mercurii altitudo.

Sed aliud etiam phænomenon insigne est, quod a prima barometri inventione Florentinis Philosophis innotuit, quoque observatum est supra terrestrem superficiem altius assurgendo mercurii in barometris suspensi altitudinem minorem fieri. Hoc idem phænomenon post Newtonum Philosophos æque, ac Mathematicos exercuit, cum illi quidem altitudinis barometricæ, distantiarumque a superficie, &

cen-

centro Terræ differentias multiplicatis observationibus explorarent, hi vero ex legibus gravitatis, & pressionis derivare vellent leges densitatis aeris, & ex legibus densitatis formulas quasdam colligere, quarum ope saltem quam proxime supputare possent quæ variationibus barometricis distantiarum differentiæ respondeant. Investigationes omnes hujusmodi, quæque aliorum inventis addenda, aut corrigenda nobis videntur esse, in altero subsequente capite exponentur. In prioribus autem hoc capite a generalibus fluidorum corporum considerationibus exordientes, generales æquilibrîi, ac pressionis leges directè demonstrare, atque inde colligere studebimus theoriam gravitatum specificarum, singula autem appositis exemplis, & evolutis præcipuis casibus Hydrostaticæ, ut vocant, practicæ illustrabimus.

CAPUT PRIMUM.

DE PRESSIONE FLUIDORUM.

THEOREMA I.

Si fluidi cujuscvis superficies in punctis singulis sit gravitatis directioni perpendicularis, erit fluidum omne in æquilibrio.

In primis enim si fluidum aliquod in vase *CEFD* clausum, fig. 101., curvæ alicujus continuæ *COD*, aut rectæ unius ad gravitatis directionem *OL* in puncto *O* inclinatæ formam superius referat; ducta tangente *Oo*, & perpendiculari *Ol*, completoque rectangulo *LIOo*, vis *OL* in binas alias *Ol*, *Oo*, resolvetur, quarum posterior juxta fluidi superficiem agendo motum aliquem gignet ex *O* in *C*: & cum fluidi particulæ vi cuicumque extrinsecus illatæ cedant, & cedendo moveantur facillime inter se; non antea motus desinet quam ubi tantum perpendiculares vires in particulis singulis supererunt. Idipsum utrimque fieret si gravitatis directio *OL*, fig. 102., ad utramque superficiem partem *OC*, *OD* inclinaretur; productis enim lateribus *OC*, *OD*, & completo parallelogrammo *LIOo*, binæ vires *Oo*, *Ol*, in quas resolvitur vis *OL* motum aliquem semper gignerent, nisi contrariæ, & æquales essent, quod fieri nequit nisi duo latera *OC*, *OD*

in

in unam abeant lineam rectam, eamque recta OL perpendicularem. Dato autem quod extrema fluidi superficies in punctis singulis perpendicularis sit directioni gravitatis, ductisque quocumque aliis parallelis superficiibus, ac stratis quibuslibet excerptis, particulae omnes in unoquoque strato aequae altæ in æquilibrio erunt inter se, atque additis utcumque stratis etiam fluidum omne erit in æquilibrio.

COROLLARIA.

I. Si gravitatem ex locis singulis ad Terræ centrum dirigi intelligamus, fluida omnia Terræ affusa superficie sphericam exhiberent descriptam circa idem centrum. Ostendemus autem sub loco, quod habita vis centrifugæ, quæ ex motu diutino oritur, ratione, & spectata vi gravitatis, quæ in particulis singulis ad alias omnes particulas dirigitur, æquilibrio fluidorum haberi debet sub forma alicujus sphaeroidis circa polos compressæ, & elatæ circa æquatorem: ac deinde aliis observationum subsidii ostendemus minorem Terræ semiaxim, qui per polos transit, assumi posse Parisiensem hexapedarum 3265909, æquatotis semidiametrum 3280108, differentiam utriusque 14199. Ita vero cum differentia semiaxium præ semiaxe majore non sit nisi pars $\frac{1}{33}$, cumque exigua hujusmodi quantitas ad usus hydrostaticos nil referat, assumi poterit superficiem, ad quam fluida terrestria se se conformant, maria, lacus, stagnantes liquores omnes, sphericam esse, & mediocrem sphaeræ radium esse quam proximè hexapedarum 3273000, aliquanto minorem quam Picartus, & Mariottus in suis de libellatione tractatibus statuerant.

II. Igitur æquilibrii linea, quæ ex puncto aliquo F , fig. 103; ad punctum aliud quodcumque Q duci potest, est arcus FQ circuli maximi FQR , qui transeat per centrum Telluris A . Arcus hujusmodi dicitur vera horizontalis linea, seu linea veræ libellæ puncti F ; quod quæ in arcu FQ sunt puncta eandem habeant distantiam a centro Terræ, quodque canali quolibet ex F ad Q ducto arcus FQ lineam æquilibrii determinet. Recta autem FN , quæ horizontalem veram tangit in puncto F , dicitur horizontalis apparens, seu linea libellæ apparentis, quod si distantia punctorum F , N exigua sit, tangens pro circulari arcu assumi possit. Erraret autem qui ex F ad punctum N collimando juxta rectam FN , quæ perpendicularis est

Mechanica.

Dd

di-

directioni FA gravitatis in puncto F , censeret puncta F , & N ad eandem libellam pertinere, cum punctum N sit altius, seu magis a centro distans, & sit NQ differentia distantiarum.

III. In tractibus non ita magnis, ad quos usque libellatio produci solet, differentia hujusmodi facile determinabitur, quod ex natura circuli sit $FN = NQ + NR = NQ + \frac{NQ^2}{QR}$, neglecta-que differentia eadem præ Terræ diametro assumi possit $FN = NQ + \frac{NQ^2}{QR}$, & $NQ = \frac{FN^2}{QR} = \frac{FQ^2}{QR}$, & sit $NQ : MP = FN : FM = FQ : FP$,

atque deviatio veri horizonis ab apparente augeatur in duplicata ratione distantiarum a puncto F . Quo dato ut numeri ad nostræ regionis usus accomodentur, statuamus distantiam FQ esse brachiorum Mediolanensium 1000, & cum brachium idem ad pedem Parisiensem se habeat quam proxime ut 11 : 6, ad hexapedam vero ut 11 : 36, & sit propterea mediocri Terræ radius brachiorum nostrorum 10711617, & diameter RQ sit 21423234; fiet pro distantia eadem deviatio NQ punctorum 6.72. Quod si proponatur distantia alia, quævis FM , sive FP , deviatio MP illico habebitur puncta illa 6.72 ducendo in FP : ut si distantia FM assumatur brachiorum 500, erit deviatio MP

MP punctorum 1.68, atque ad distantiam brachiorum 1000. erit deviatio unciarum 3, atque insuper punctorum 2.88.

IV. Universim autem deviatio omnis habebitur si distantie cuiuslibet propositæ accipiat pars $\frac{1}{1000}$, & puncta 6.72 per quadratum partis ejusdem multiplicentur. Simplicem hanc regulam tabulæ illi vollem substitui, qua Picarrus in tractatu jam memorato veri, & apparentis horizonis distantiam pro singulis hexapedis 50 distantie a puncto dato supputavit. Nam & mediocri Telluris radio accuratius determinato, ut jam monuimus, corrigenda esset tabula, & ad distantias intermedias alius instituendus esset calculus: ea autem regula ad distantiam quamlibet propositam differentia omnis illico habebitur, & si libella de more inversa observentur puncta quævis N , in tangente eadem NFn posita, accipiendo differentiam restarum NQ , nq patebit illico quæ puncti unius supra alterum sit elevatio. In tractibus autem minoribus, ubi tangeas cum circulari arcu con-

fun-

auditur, & gravitatis directiones in particulis singulis parallelæ sunt inter se, negligi poterunt differentiæ omnes, quæ ex rotunda Telluris forma proficiscuntur, eademque erit horizontalis vera & apparens, ac fluida in vasis quibuscumque clausa non erunt in æquilibrio nisi cum extimam superficiem planam, & parallelis iis directionibus perpendicularem referent.

THEOREMA II.

Pressiones fluidorum in quibuscumque vasis quiescentium sunt in ratione composita horizontalis basis, quæ premitur, altitudinis fluidorum eorundem, ac specificæ gravitatis.

Si proponatur vas aliquod, quod curva quavis *AED* inferius terminetur, fig. 104., & fluidum vasi affusum in horizontalem rectam *AD* superius desinat, juxta Theorema primum erunt particule omnes in æquilibrio, adeoque vires earundem omnes in adversam partem exercitæ compensabunt se invicem, ac destruent. Idipsum fiet in vase alio *BGC*, neque alia erit æquilibrii conditio, quam quod superficies *BC* perpendicularis sit directioni gravitatis. Quod si igitur vas *AEDCGB* ex differentia utriusque *AED*, *BGC* conflueret intelligatur, in eo etiam vires omnes se destruent, atque erit fluidum omne in æquilibrio, si utrobique ad eandem horizontalem lineam *AD* affurgat. Quæ pariter cum sit conditio vasis cujusque alterius, in quo fluidum ad eandem altitudinem se se componat, si data portione vasis *CDEG*, & data vi, qua stratum horizontale *EG* sursum urgetur, variari intelligatur portio alia *AEGB*, & abeat in *MEGN*, vi eadem semper idem stratum urgeri ex adverso necesse erit, ut priore vi elisa totius fluidi æquilibrium tueatur. Manifestum est autem in vase recto, & prismatice *MEGN* pressionem esse absoluto ponderi proportionalem, sive esse in ratione composita specifici ponderis, & voluminis, volumen autem esse in ratione composita basis, & altitudinis. Itaque etiam in vase quolibet *AEGB* vis, qua premetur basis *EG*, erit in ratione composita ejusdem basis, & altitudinis fluidi superincumbentis, ac specificæ gravitatis.

COROLLARIA.

I. Igitur fluidorum pressio in datam basim horizontalem exercita non erit quidem absoluto ponderi, sed ponderi tantum specifico, &

Dd 2

altri-

altitudinī maximæ proportionalis, dataque insuper altitudine maxima & dato specifico pondere, ac variata utcumque vasis figura, & lateribus convergentibus utcumque, vel divergentibus pressio manebit eadem. Quod cum generatim de vasis quibuscumque valeat, si proponatur tubus quicumque *EGHF*, fig. 105., qui cum tubo altiore *EAG* communicet, & fluido in *A* usque repleatur, ad pressionem omnem metiendam in puncto *F* non vera quidem fluidi directe incumbentis altitudo *FIH* accipienda erit, sed altitudo omnis *FC*, quæ ex dato puncto *F* usque ad horizontalem *AC* per punctum aliud superius *A* ductam pertingit. Quod non in Aerometria tantum, sed in Hydro-metria etiam præcipuum theorema est, cum & hinc pateat aeris pressionem, & mercurii suspensi altitudinem in locis clausis, apertisque eandem esse oportere, & pateat etiam aquarum fluentium pressionem, & quæ ex pressione oritur velocitatem non ex vera altitudine aquarum dato loco incumbentium, sed ex altitudine maxima aquarum, quibuscum libera habeatur communicatio loci propo-siti, pendere.

II. Hinc patet insuper in singulis particulis strati cujusvis horizontalis, cui fluidum ad datam usque altitudinem immineat, eandem pressionis vim, in stratis autem inferioribus, & parallelis majorem, minoremque in superioribus esse oportere: quo in sensu debet intelligi, quod passim dici solet, fluidorum pressionem æqualiter ad partes omnes exerceri. Ex hac ipsa pressionis in stratis singulis æqualitate sequitur quod nullum pressionis sensum ab aere circumambiente experiamur. Cum enim sensatio omnis ex variis organicarum partium motibus oriatur, ut a Newtono jam in Coroll. IX. Prof. XX. Lib. II. Princip. Mathem. notatum est, cumque insuper aeris pressio in punctis singulis strati cujusvis horizontalis sit eadem, ac differentia pressionis, & altitudinis aeris a capite ad pedes usque præ tota altitudine aeris homogenei, & æquiponderantis debeat omnino negligi, aeri inclusa animantia quæcumque sint fient utique densiora, atque in minus volumen abibunt si possint comprimi, non tamen externam formam immutabunt, nec situm, positionemque internarum partium inter se, & nulla inde sensatio oriri poterit. Eandem ob causam sit quod leviora etiam animalcula in aqua ad quæcumque

pro-

profunditatem libere quaquaversum moveantur; ut observatum olim a Boyleo fuerat.

III. Patet denique summam pressionum in tota perimetro strati ejusvis horizontalis, aut sectionis in tubo aliquo factæ, simul sumptarum, esse in ratione composita perimetri ejusdem, & altitudinis fluidi superincumbentis, atque in sectionibus circularibus esse in ratione composita diametri, & altitudinis. Quare si tubum quemlibet rotundum ex annulis circularibus, & æque altis consurgere intelligamus, ut eadem in singulis habeatur firmitas, debet esse crassities proportionalis simul diametro, & altitudini fluidi prementis, diameter autem debet esse in ratione directa crassities, & altitudinis reciproca: atque ita cum ex Parentii experimentis tubus plumbeus diametri pollicum 12, & linearum 6 crassities par sit sustinendæ columnæ aquæ altitudinis 60 pedum; ut sub diametro 6 pollicum par fiat 100. aquæ pedibus sustinendis requiretur crassities linearum 5. Si tubi diversæ materiei fiat, cum ratione illa diametri, & altitudinis componenda inverse erit ratio tenacitatis, seu cohærentiæ tuborum: atque ita cum vis cohæisionis 28 circiter vicibus in ære major quam in plumbo sit, tubis ex ære confectis sufficet $\frac{1}{28}$ crassities, quæ in tubis plumbeis supputaretur: & cum vires cohæisionis sint in ære, & ferro inter se ut 2:3, in tubis ferreis sufficient duæ tertiæ partes crassities tubi ærei. Tabulas integras exhibuit Parent in Actis Parisiensibus anni 1707, & Belidor Cap. III. Lib. III. Architecturæ Hydraulicæ. Simpliciter autem hac regula crassities, & diameter tuborum pro casu quolibet supputari poterit, ubi instituto semel experimento innotescat quæ vis cohæisionis in plumbo, ferro, aut ære sit.

THEOREMA III.

Pressio, quæ in superficiem ejusvis vasis a fluido aliquo exercetur, perpendiculariter ad superficiem ipsam dirigitur in punctis singulis, æquaturque omnis integræ superficiæ ductæ in distantiam centri gravitatis ab horizontali plano per summam fluidi altitudinem ducto.

Primo enim si vis, quæ a fluido in latus aliquod *Gg* vasis ejusvis *BEGFD* exeritur, fig. 106., ad latus idem obliqua esset, in binas vires resolvì posset, perpendicularem unam, & alteram parallelam.

parallelam: parallelæ autem vires nisi æquales, ac contrariæ in particulis singulis sint omnes, ac destruant se se invicem, motum aliquem fluidi gignerent ad eam partem, ubi vires potiores essent: atque ita viribus parallelis se compensantibus, & fluido ad æquilibrium deducto solæ perpendiculares vires supererunt in punctis singulis. Jam vero ex præcedente theoremate manifestum est vim pressionis in unaquaque fluidi particula proportionalem esse altitudini maximæ fluidi supra horizontalem lineam, quæ per eandem particulam traducitur: Quod si igitur puncta G, g adeo proxima accipiantur, ut pressionem in G, g , & altitudines GC, gc inter se æquales censi possint, pressio lateris exigui Gg erit ut numerus minimarum ipsius partium in communem altitudinem ductus, sive ut $Gg \cdot GC$, atque ita lateris gg' pressio erit ut $gg' \cdot gc$, &c. Ita vero ad metiendam pressionem omnem accipienda erit summa factorum omnium hujusmodi, quæ eadem est summa momentorum omnium superficiei fundi ad horizontale planum per BD ductum relatæ, quæque etiam, si in superficie omni gravitatis centrum sit R , æquatur superficiei ductæ in distantiam RO a plano ipso. Patet igitur utraque pars theorematum.

COROLLARIA.

I. Data igitur portione vasis ELF , & data altitudine maxima; ac specifica fluidi gravitate, variatisque utcumque lateribus, pressio in portionem ipsam exercita manebit eadem, & æquabitur superficiei propositæ ELF ductæ in maximam fluidi altitudinem supra gravitatis centrum, quod intra superficiem eandem signari posset. Id alii auctores perperam ex eo colligunt quod summa pressionum sit ut summa filamentorum omnium fluidi GC, gc &c., quodque filamentorum numerus in latere Gg' sit Gg , atque ita in latere alio quovis sit integræ longitudini proportionalis: cum potius Cc sit numerus filamentorum hujusmodi adjacentium lateri Gg , & CO numerus omnium, quæ integræ longitudini GL respondent. Inde igitur petenda est demonstratio, quod fluido ad æquilibrium deducto pressionis vis perpendiculariter ad interiorem vasis superficiem in punctis singulis debeat dirigi, & proportionalis sit altitudini maximæ fluidi prementis; quodque ad habendam pressionum summam summa productorum omnium partis cujuscunque, quæ premitur, & altitudinis debeat accipi.

Si

II. Si inclinatio plani EF , fig. 107., successive variari intelligatur, & plano in locum Ef abeunte eadē maneat quantitas fluidi superincumbentis $EFDA$, $Efda$, sint autem RO , ro distantie centri gravitatis a superficie fluidi AD , ad ; erunt pressiones binę in idem planum exercitę $EF.RO$, $Ef.ro$: & si angulo Aef ultra quemcumque limitem imminuto infinita evadat altitudo fluidi, crassities vero infinite parva, & idem adhuc productum utriusque, & quantitas fluidi maneat, infinita evadet pressio: quę eadem paradoxī alterius Hydrostatici species est, qua vase prismatico $EADF$, fig. 108, in acutum aliud $EadF$ abeunte, & data fluidi quantitate, auctaque per gradus singulos altitudine, pressio in eundem fundum EF exercita ad infinitum usque augeri posset. Observandum est autem continuam illam quantitatis cujuspiam imminutionem, quę in Geometria, & Algebra nullos abstractos limites agnoscit, physice in particulas illas definire, in quas ultimo fluidum resolveri potest, quęque cum non nisi finitę possint esse, secluso infinitę pressionis casu, non aliud exhibent phænomenon quam quod pressio ex altitudine maxima non vero ex pondere fluidi prementis pendeat.

III. In vase autem prismatico, & ad horizontem recto $EADF$ pressio cujusvis lateris erit ut latus ipsum per dimidiam altitudinem ducto, quę est distantia centri ab excima superficie: & in quadrato verticaliter erecto dimidia erit, quam ubi fluido ad eandem altitudinem subsidente quadratum idem in locum fundi horizontalis transeat: & in quatuor cubi lateribus supra alterum latus erectis, affuso fluido, duplo major erit pressionum summa, quam sit fundi totius pressio, quod idem in cylindro etiam habebitur, cujus altitudo æqualis sit diametro baseos. Qui in infinitesimali calculo se exercere volet, superficiebus curvilineis propositis, inventaque earum quadratura, ac centro gravitatis, determinare poterit quam singulę pressio nem ab interiore, aut exteriori fluido sustineant. Ad praxim quandoque intererit, quod pressio ab aquis stagnantibus in portas rectangulares, & verticales exercita dimidia sit quam quę in æqualem fundi horizontalis partem exerceretur.

THEO.

DE PRESSIONE
THEOREMA IV.

Pressio, quam fluidum circumfufum in solidum quodcumque exercet, æqualis est ponderi fluidi sub eodem immerfi corporis volumine contenti, & omnis simul juxta verticalem illam dirigitur, quæ per centrum gravitatis solidi ejusdem corporis transiret si effet fluido in partibus singulis homogeneous.

Si in fluido omni *EADF*, fig. 109., quod usque ad horizontalem *AD* assurgat, accipiat portio quævis *MN*, ipsius pondus æquale erit pressioni fluidi circumpositi: secus si binæ vires ponderis & pressioni utcumque inæquales essent inter se, motu aliquo excitato, non amplius effet fluidum in æquilibrio. Statuamus portionem ipsam, servato eodem volumine, partium ordine, & gravitate specifica durere, atque in solidam massam abire. Idem adhuc manebit pondus, eadem fluidi circumfusi pressio, quæ antea, & solidum immersum adhuc erit in æquilibrio. Jam vero solidum *MN* absoluta vi ponderis deorsum tendit, & si gravitatis centrum sit *R*, vis, quæ ex gravitate partium omnium consurgit, juxta verticalem lineam *RQ* debet dirigi. Æqualis igitur, & contraria erit vis, quæ consurgit ex pressionibus omnibus fluidi circumpositi, & qua solidum sustinetur in æquilibrio, cumque eadem semper summa pressionum manere debeat, si manente volumine *MN*, & mutata utcumque, internarum partium dispositione solidi densitas utcumque augeatur, vel imminuatur; semper quæ a fluido in solidum demersum pressio exercetur æqualis erit ponderi fluidi sub eodem volumine contenti, & juxta eandem verticalem lineam dirigeitur, quæ transiret per centrum gravitatis solidi si effet fluido homogeneous.

COROLLARIA.

I. Si solidum demersum gravitatem specificam cum fluido communem habeat, in locum fluidi succedendo ad quamcumque altitudinem pensile sustinebitur: & si pondus absolutum quidem æquale habuerit ponderi fluidi sub æquali volumine contenti, ob inæqualem autem densitatem, & variam partium dispositionem gravitatis centrum in eadem verticali linea *RQ* non habuerit, quæ transit per centrum gravitatis *R* solidi alterius *MN* fluido circumfuso homogenei; æquales vires in eadem recta non opponetur sibi invicem, neque

que omnino se destruent, & morus aliquis solidi habebitur quousque duo gravitatis centra in verticali eadem sint posita, & binæ habeantur non æquales dumtaxat vires, verum etiam contrariæ. Quæ æquilibrii conditio cum æque obtineri possit ubi centrum gravitatis solidi propositi superius, aut inferius sit centro solidi alterius homogenei, & æqualis ponderis, ac voluminis; ea erit utriusque casus diversitas, quod in priore quidem si centrum gravitatis solidi e verticali RQ dimoveatur, & abeat in locum r , pressiois vi adhuc agente ex Q in R , & vi ponderis ex r in q centrum idem solidum obverso ad infimum locum descendet, & alio quovis motu excitato ob eandem rationem locum eundem infimum semper, priorem autem, ac superiorem locum nunquam recuperabit.

II. Solidum specificè gravius in leviori fluido immersum gravitatis specificæ excessu descendet ad fundum vasis, & eam ponderis partem amittet, quæ æqualis erit pressioni fluidi totius circumambientis, sive etiam ponderi fluidi sub æquali volumine contenti. Quare si idem solidum specificè gravius lance suspensum in fluidis diversis successive immergatur, explorenturque portiones ponderis in fluidis singulis amissæ, eæ rationem gravitatum specificarum, & absoluta etiam pondera exhibebunt fluidi cujusque, quod volumen solidi exæquet. Accuratiorem gravitatum specificarum tabulam pro fluidis omnibus exhibuit Desagulicrius in Lectione XII. Quod si accipiantur diversa solida pondere æqualia, & in quibus propterea gravitates specificæ sint reciproce ut volumina, eaque successive immergantur in eodem fluido; cum partes ponderis amissi sint proportionales volumini solidi cujusque, quod in fluidi locum succedit, exhibebunt ipsæ proportionem reciprocam gravitatum specificarum. Hoc modo gravitatem specificam corporum solidorum exploravit primum Metcennus, ac deinde Peritus recognovit: deprehensum est autem quod æqualibus semper voluminibus acceptis si pondus auri sit 100, erit pondus mercurii $71\frac{1}{2}$, plumbi $60\frac{1}{2}$, argenti $54\frac{1}{2}$, cupri $47\frac{1}{2}$, ætis ciprii 45, ferri 42, stanni communis 39, stanni puri $38\frac{1}{2}$, aquæ $5\frac{1}{2}$ &c.

III. Solidum specificè levius in graviore fluido excessu pressiois sursum urgebitur ad usque extimam superficiem, & ea tantum sui parte demergetur, sub cujus volumine acceptum fluidum solido

Mechanica,

Ee

su;

superinnatanti æquiponderabit: unde in hoc etiam casu exæquatis ponderibus solidi superinnatantis, & fluidi e loco pulsī, erit totum volumen solidi ad volumen partis immerse ut gravitas specifica fluidi ad specificam solidi gravitatem. Cum vero corporum pondera universim sint in ratione composita gravitatis specificæ, ac voluminis, cumque pondera corporum leviori fluido superinnatantium æquantur ponderi fluidi sub volumine partis immerse, atque insuper fluidi pondus sit proportionale volumini; si proponantur solida ejusdem voluminis, erunt gravitates specificæ proportionales voluminibus partium demersarum: & in solidis ejusdem gravitatis specificæ volumina partium demersarum erunt totis corporum voluminibus proportionalia. In his vero adhuc corporibus ad quietem absolutam necesse erit ut duo simul gravitatis centra, & quod in unoquoque corpore, & quod in demersa parte, si esset fluido homogenea, posset accipi, in eadem verticali linea sint posita: secus continuis oscillationibus corpus in eum locum se se recipiet, in quo & gravitatis centrum sit infimum, & sit in eadem verticali linea, quæ transit per centrum partis demerse.

IV. Quod igitur in fluido aliquo solidum corpus descendat, aut pensile in extrema superficie fluidi subsidat, neque ex figura solidi corporis, neque ex profunditate fluidi subiecti pendet, sed tantum ex differentia ponderum absolutorum, quæ habentur sub æquali volumine solidi, & fluidi corporis: quod primum Archimedis theorema nitide demonstratum ab objectis omnibus vindicavit Galilæus in sermone jam memorato. Institutis enim experimentisprehendit metalla, & alia quævis graviora corpora, ubi etiam ad lamellarum tenuissimarum, aut filorum formam reducantur, descendere si in aqua undequaque immergantur, eamque ob causam tantum pensilia sustineri cum supra extimam superficiem leniter reclinantur, quod descensu primum incæpto, ob naturalem partium tenacitatem non illico aer e lateribus possit affluere, & aggere quasi facto aggregatum simul ex lamina, aut filo metallico, atque ex strato aeris aliquo infra aquæ superficiem sit positum. Archimedes resolutio Hieronis problemate theoriam gravitatum specificarum omnino invenit, atque ad alia inde problemata resolvenda progressus est oscillationis, & quietis eorum solidorum fluido alicui superinnatantium: Horum autem problematum resolutio

cum

cum ex principio illo pendeat, quod in corollario antecedente indicavimus, & pro casibus etiam simplicioribus trianguli, aut reſtanguli ad æquationes ſatis compoſitas deducat; Hieronis problema, quod in tota Hydroſtatica præcipuum eſt, breviter reſolutum, ac correctum modo exhibebimus.

PROBLEMA I.

Datis ſpecificis gravitatibus duorum corporum; quæ miſcentur; & mixti corporis, quod inde exſurgit, datoque hujus abſoluto pondere, abſoluta illorum pondera determinare.

Sit pondus corporis mixti A , & gravitas ſpecifica vocetur a , ac ſit propterea volumen corporis $\frac{A}{a}$. Sit etiam X pondus unius ex ſis cor-

poribus, quæ miſcentur, gravitas ſpecifica b , volumen $\frac{X}{b}$. Erit $A - X$

pondus corporis alterius, & ſi gravitas illius ſpecifica vocetur c , erit volumen $\frac{A - X}{c}$. Tum vero ſi intelligamus mixtione volu-

mina non immutari, & mixti totius volumen æquari ſummæ voluminum in binis corporibus, quæ miſcentur, debet eſſe

$$\frac{A - X}{c} + \frac{X}{b} = \frac{A}{a}; \text{ unde illico eructur}$$

$$X = \frac{b \cdot A}{b - c} \left(1 - \frac{c}{a} \right).$$

Quod ſi autem volumen $\frac{A}{a}$ majus ſit ſumma voluminum pro-

poſitorum, gravitas etiam ſpecifica mixti corporis erit minor, quam ſi mixtione volumen non augetur, aſſumptiſque quantitativibus iſdem, quæ antea, ac poſito quod m , & n ſint aliæ conſtantes quantitates, fiet $\frac{A - X}{c} + \frac{X}{b} = \frac{A \cdot 1 - m}{a - n}$: ac contra ſi mixtione volumen im-

minuat, augeturque ſpecifica mixti gravitas quantitativibus m , & n ſigno contrario acceptis fiet $\frac{A - X}{c} + \frac{X}{b} = \frac{A \cdot 1 + m}{a + n}$. Univerſim

igitur erit $\frac{A - X}{c} + \frac{X}{b} = A \cdot \left(\frac{1 \mp m}{a \mp n} \right)$: atque inde eructur

Ecce

X

$$X = \frac{b \cdot A}{b - c} \left(1 - \frac{c \pm cm}{a \mp n} \right).$$

COROLLARIA:

I. In priore igitur casu erit $\frac{A}{a} : \frac{X}{b} = b - c : a - c$, &

mixti corporis volumen ad volumen unius ex iis corporibus, quæ miscentur, se habebit ut differentia gravitatum specificarum corporis utriusque ad differentiam gravitatum corporis mixti, & alterius ex iis corporibus quæ miscentur. In casu autem ab Hierone proposito coronæ ex auro, atque argento constat cum gravitates specificæ auri, & argenti sint inter se ut $100 : 54\frac{1}{2}$, seu proxime ut $19 : 10\frac{1}{2}$, si gravitatum ratio in auro, & corona assumatur fuisse $19 : 17$, atque hæc ratio accipiat loco $b : a$, illa loco $b : c$; prodibit $X = \frac{10}{17} A$, statuendoque insuper quod pondus coronæ A fuerit librarum 5; erit pondus auri X librarum $4\frac{10}{17}$, pondus argenti immixti $A - X$ partis $\frac{10}{17}$ unius libræ.

II. Quod si autem statuamus auri, & argenti volumina simul mixtione augeri, superiore signo accepto potius debebit esse

$$X = \frac{b \cdot A}{b - c} \left(1 - \frac{c + cm}{a - n} \right) = \frac{b \cdot A}{b - c} \left(1 - \frac{c}{a} + \frac{cm}{a} - \frac{cn}{a} \right),$$

quod scilicet quantitates m , & n semper exigue sint, earumque producta possint negligi, & dividendo $-c + cn$ per $a - n$ terminis $-\frac{c}{a} + \frac{cm}{a}$ non nisi terminus $-\frac{cn}{a}$ adjungi debeat. Clarif. Hahn

n dissertatione de efficacia mixtionis in mutandis corporum voluminibus, quæ anno 1751. Lugduni Batavorum edita est, experimentum retulit 136. granorum argenti purissimi, ac totidem auri purissimi, cum mercurio digesti, ac deinde ignis vi ab eo liberati, quæ simul fusa incrementum voluminis fere $\frac{1}{10}$ exhibuerunt. Erat enim volumen mixti ad summam voluminum auri, & argenti ut 136911 : 134506.

III. Quæ igitur ab Archimede primum prolata est celeberrimi problematis resolutio non omnino accurata censi poterit, quod volumina auri, & argenti non augeri quidem mixtione, sed eadem manere adhuc, quæ antea, assumpserit Archimedes. Qui etiam in hac

hac hypothesi calculus institueretur artificis fraudem majorem prodere-
ret quam vere fuerit: auri enim ad coronam adhibiti absolutum pon-
dus in hac hypothesi prodiret tantum $\frac{b \cdot A}{b-c} \left(1 - \frac{c}{a}\right)$, cum vere

debuerit $\frac{b \cdot A}{b-c} \left(1 - \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \frac{m-n}{a}\right)$. At cum in casu ab

Hierone proposito non nisi commixti argenti portionis suspicio esset, &
paribus etiam acceptis argenti & auri portionibus variatio omnis vo-
luminum non sit nisi $\frac{1}{n}$, patet ab Archimede problema tam accu-
rate solum esse quantum eonditio, & easus problematis postulabat.

IV. Qui casibus aliis similibus duorum corporum volumina an-
te, & post commixtionem comparare velit inter se, ex prima hu-
jus problematis æquatione illico colliget quæ compositi totius gra-
vitas specifica esse debeat, si voluminis utriusque summa maneret ea-
dem. Nam si pondus unius corporis sit B , gravitas specifica b , volu-
men $\frac{B}{b}$, pondus alterius corporis C , gravitas specifica c , vo-

lumen $\frac{C}{c}$, & specifica mixti totius gravitas vocetur a ; volumini-

bis exæquatis debebit esse $\frac{B}{b} + \frac{C}{c} = \frac{B+C}{a}$, atque inde eruetur

$a = bc \cdot \frac{B+C}{cB + bC}$. Quod si instituto experimento gravitas mixti corpo-

ris major, aut minor deprehendatur quam sit summa ponderum per
voluminum summam divisa; hoc ipso manifestum erit volumen cor-
poris imminutum fuisse in primo casu, & in casu altero fuisse au-
ctum.

SCHOLION.

Montanarium summi ingenii, ac diligentis Philosophum ex no-
stratibus primum fuisse, qui repetitis experimentis inquireret an va-
ria inter se metalla commiscendo haberetur aliqua voluminis variatio;
in diariis litteratorum Italix vulgatum est. Apud extreros id ipsum
jam ab Hookio, & Glaubero tentatum fuerat, quorum primus den-
sitatem cupri permixto stanno, quod levius metallum est, auctam
deprehendit, alter vero deprehendit cuprum cum stanno simul col-
li-

liquatum, pondere nihil fere imminuto ultra quartam voluminis partem decrevisse. Reaumurius experimentis fluidorum corporum diversæ indolis institutis quandoque nullam variationem voluminis, quandoque imminutionem aliquam mixtione obtinuit. Ipsius experimenta in Actis Parisiensis Academiæ anni 1733. relata sunt. Montanarii experimenta Musschenbroeckius, Hooekii s' Gravefandius, Gualberi Junkerius retulit. Casus alios fluidorum corporum permixtorum inter se invicem Petitus, alios Hambergerus addidit. Longam experimentorum seriem in fluidis diversæ generis, atque in metallicis corporibus a se diligentissime institutam retulit David Hahn in memorata dissertatione.

In plerisque fluidorum mixtionibus, quas author hic celeberrimus exploraverat, imminutionem aliquam voluminis, condensationemque totius mixti haberi invenit, ut cum aquam oleo vitriolico, aut spiritum vini aquæ immiscuit. In quibusdam tamen aquæ, & vini mixtionibus aliquando eadem summa voluminis, aliquando incrementum aliquod post mixtionem prodit: quod idem pariter contigit cum spiritus vini, & oleum citri diversa dose, ac proportionem miscerentur inter se. Metallis etiam inter se mixtis aliquando eadem, aliquando major, aut minor summa voluminum post mixtionem deprehensa est. Ita biscentum plumbi granis, & totidem mercurii acceptis imminutio voluminis facta est $\frac{1}{4}$: bis centum acceptis granis mercurii, & stanni malaccensis $\frac{1}{4}$: granis 135, cupri japanici, & 1350 stanni anglici $\frac{1}{4}$. Granis 200 stanni, & totidem plumbi inter se commixtis illud voluminis incrementum prodit, quod supra notatum est, & quod in celeberrimo antiquitatis problemate defectum aliquem corrigendum esse indicaret nisi in casu ab Hierone proposito adeo exigua correctio sit, ut possit omnino negligi.

Analogum alium mixtionis casum, ac plane singularem exhibuit ætate hac nostra D. Priestley, cum varias, ut ipse vocabat, aeris species considerando, quæ ex corporibus diversimode educi possunt aerem fixum, qui ope spiritus vitrioli, aut spiritus salis marini educitur, aerem nitrosum, qui educitur ope spiritus nitri, aerem inflammabilem, acidum, alkalinum &c; aerem quidem fixum, & acidum deprehendit graviore esse communi aere, aerem inflammabilem multo leviozem, nitrosum, & alkalinum ejusdem fere gravitatis specificæ aeris

com

communis: singulas vero has aeris species inter se, & cum aere communi immixtas gravitatis specificæ, ac voluminis variationes alias subire, ut undique in æquilibrio compositæ reducantur ad eandem communis aeris elasticitatem. Ita cum duas tertias partes aeris communis, & unam nitrosi aeris accepisset Priestlejus, easque trans mercurium simul permiscuisset, deprehendit volumen aeris totius permixti & in æquilibrio cum atmosphæra omni composito esse dumtaxat $\frac{2}{3} + \frac{1}{7}$, ac propterea vires elasticas, quæ inversam proportionem

voluminum sequuntur, ante & post commixtionem sub toto prior volumine esse debuissè ut $1 : \frac{2}{3} + \frac{1}{7}$, sive ut 21 : 17. In alio

etiam Priestleji experimento voluminis, elasticitatisque imminutio, quæ permixtione communis, & nitrosi aëris habebatur, fuit circiter novæ partis.

Experimenta cum trans mercurium instituta sint, cumque aerem fixum, nitrosum, acidum ab aqua absorberi quidem aliqua ex parte non vero a mercurio exprimentis aliis compertum sit, nullum jam amplius dubium relinquitur quod contractionis totius ratio non ex consumatione quadam, sive, ut vocabant etiam nonnulli, destructione aeris, sed ex imminutione tantum elasticitatis, cum partes aeris heterogenæ miscerentur inter se, debeat repeti. Illud etiam contendit experimentis aliis Priestlejus quod cum datæ nitrosi, & spirabilis aeris quantitates a communi aere separatæ ope mercurii, aut aquæ, permixtæque inter se invicem in minus volumen abeunt contractio voluminis eo major est quo magis aer, qui nitroso adjungitur, respirationi fuerit idoneus. Quare aeris salubritatem, seu potius meliorem aeris aptitudinem ad respirandum metiri docuit author idem variis gradibus contractionis voluminis, quæ habetur nitrosi, & communis aeris permixtione, atque instrumentum etiam proposuit, quo varii contractionis gradus metiri possent. Instrumentum autem illud Priestlejanum, sive, ut vocant Eudiometrum, ad simpliciorum formam, & commodiorem usum certe reduceretur, si tubo vitreo ad Barometri formam constructo, demptoque superius aere ut mercurius ad datam altitudinem subsidat, & ex inferiore parte, quæ infra superfici-

perficiem mercurii in subiecto vase stagnantis demersa sit, binis vasculis recurvis, datam rationem amplitudinis inter se habentibus, communis, nitrosusque aer affundatur, & specie utraque aeris altius avolante, mercurius in tubo ad datam aliam altitudinem deprimitur. Mercurius vero in hujusmodi experimentis præferendus videretur aeri quod magnam aeris copiam ab aqua, nullam a mercurio absorberi deprehensum sit, atque ita variis mercurii suspensi gradibus unicum tantum elementum metiri possit contracti aeris voluminis, imminutæque elasticitatis, cui varii respirabilitatis aeris gradus respondeant.

Quamprimum ego experimenta hujus generis recognoscere, atque iterare cœpi, singulas aeris factitii species non alia ratione inter se invicem differre censui, quam quod partes diversas corporum, e quibus educuntur, & spirituum assuorum permixtas habeant, neque antea ad communem aerem reducantur quam cum partes illas heterogeneas amiserint. Quod cum ex sapore, odore, & materie illa potissimum, quæ fermentatione aeris diversæ indolis plerumque solvitur, manifeste colligi animadverterem, neque etiam Priestlejo concedi posse intelligebam atmosphæram omnem terrestrem, quam late patet, ex quavis aeris factitii specie, atque ex evaporationibus diversorum corporum primitus resultasse. Cumque etiam aerem fixum, nitrosumque, vitriolicis, atque acidis particulis admixtum vitæ, & respirationi animalium minus idoneum esse ultro agnoscerem; experimentis attentius perpenfis, atque inter se comparatis dubitare cœpi num varii salubritatis aeris gradus ex varia contractione voluminis, quæ sit nitrosi communis acri permiscendo, certa ratione aliqua æstimari possent. At cum dubiis hisce omnibus examinandis, & physicæ aeris analysi accuratius tradendæ alii apud nos Philosophi, & in exteris etiam regionibus sedulo incumbere, singillatim investigare volui quæ ex Geometria, atque ex Algebra in hac Aerometriæ parte subsidia peti possent, & dato quod varii gradus salubritatis aeris, ut Priestlejus contendebat, variis iis aeris contractionibus respondeant, quæ sive quo calculo, & quibus formulis voluminis contractio, & imminutio elasticitatis aeris ex altitudine mercurii, aut aquæ in verticali tubo suspensæ posset determinari.

CA-

CAPUT SECUNDUM.

227

DE ÆQUILIBRIO AERIS, ET MERCURII.

PROBLEMA II.

Data quantitate, & elasticitate aeris, qui ad superiorem barometri partem transeat, invenire altitudinem mercurii, & data variatione elasticitatis invenire altitudinis variationem.

Sit A longitudo barometri, C altitudo mercurii, qui cum exteriore aere æquibretur, & sit B pars longitudinis, quam aer intrusus occupare posset si eandem haberet exterioris aeris densitatem, & elasticitatem, inquiraturque altitudo D , ad quam propterea mercurius reduci potest. Quia portio aeris B per volumen $A - D$ expanditur, vires autem elasticæ, quibus aer nititur se se expandere, tanto magis imminui debent quanto majus aeris jam expansi volumen est, erit $A - D : B$ ratio elasticarum virium ante, & post expansionem aeris: & quia vis elastica naturalis aeris æqualis est vi ponderi totius columnæ aeræ superincumbentis, seu ponderi mercurii sub altitudine C contenti, erit $\frac{B \cdot C}{A - D}$ differentia altitudinis mer-

curii quæ ob aerem barometro intrusum, atque expansum habebitur: Quare cum hæc eadem differentia sit $C - D$, binis terminis æquatis, ordinata æquatione, & radice una extracta, quæ ad problematis casum pertinet, eruetur

$$D = \frac{1}{2} (A + C - \sqrt{(A - C)^2 + 4BC}).$$

Posito autem $B = (A - D) \cdot \left(\frac{C - D}{C} \right)$, si B denotet

summam voluminum in utraque aeris specie, quæ ad superiorem barometri partem avolare intelligitur, denotet autem E imminutionem voluminis, quæ mixtione haberi debet, ut ad eandem communis aeris vim elasticam mixtus aer reducatur, & sit F incrementum altitudinis mercurii quod habetur ob imminutionem illam voluminis, & vis elasticæ intrusi aeris, scribendo $B - E$ loco B , & $D + F$ loco D , fiet:

Mechanica.

Ff

B

$$B - E = (A - D - F) \left(\frac{C - D - F}{C} \right) \\ = (A - D) \left(\frac{C - D}{C} \right) - \frac{F(C + A - 2D - F)}{C}.$$

subduoquoque utrumque valore quantitatis B , & loco D substituto valore alio qui extractione radicis prodit, eructur

$$E = \frac{F}{C} (A + C - 2D - F) \\ = \frac{F}{C} (\sqrt{A - C} + 4BC) = F);$$

COROLLARIA:

I. Prior formula eadem est, quam in Coroll. I. Propof. XXIV. Lib. II. Phoronomiæ tradiderat Hermannus, & qui singulas species simul & denominandi rationes comparare volet, eandem etiam deprehendet quem primo invenerat Jacobus Bernoullius in Tractatu de Gravitate Aetheris. Si fiat $A = 30$, $C = 28$, $B = 1$, fiet $D = 23\frac{1}{2}$ circiter: & si sit $B = 2$, fiet $D = 21\frac{1}{2}$. Si quantitas intrusi aeris B præ tota altitudine mercurii C , & præ superiore tubi parte $A - C$ omnino exigua intelligatur, ut in particulis aeris mercurio non bene expurgato admixtis, & altius avolantibus contingit; statui poterit $\sqrt{(A - C) + 4BC} = A - C + \frac{2BC}{A - C}$, atque ita

eructur $D = C - \frac{BC}{A - B}$: scilicet differentię altitudinum mercurii

erunt numero particularum aeris quam proxime proportionales.

II. Altera autem formula Priestlejanis experimentis applicari facile poterit. Nam si assumamus salubritatem aeris, seu potius meliorem aeris aptitudinem ad respirandum proportionalem esse quantitati E , qua volumen integrum B communis, ac nitrosi aeris simul permixti, ut cum communi aere in æquilibrio sit, imminuitur, & longitudo tubi assumatur A , & sit C altitudo mercurii libere suspensi, D altitudo, ad quam volumine aeris B intruso, & nulla mixtione habita reduceretur, F vero altitudinis variatio, quæ ob mixtionem voluminis habetur, salubritas aeris erit proportionalis quantitati

E

$F \left(1 + \frac{A - 2D - F}{C} \right)$: & non universim quidem, sed in iis

dumtaxat casibus, in quibus altitudinis variatio adeo exigua sit, ut possit negligi ipsius quadratum, erit salubritas aeris in ratione simplici differentiae altitudinis mercurii.

III. Si divisionis initium assumamus illud, in quo volumen aeris *B* imminutionem nullam subit mixtione, & fermentatione, ut ubi deficit volucrum respiratio, & ubi propterea mercurius ob aeris mixtionem altius non ascendit; salubritatis gradus in minore ratione augebuntur quam mercurii altitudo supra limitem illum excreseat: atque ab altitudine illa incipiendo, quæ in scala assumpta unitatis loco assumatur, si gradus etiam salubritatis aeris exprimantur unitate, scilicet si posito $F = 1$ sit $E = \frac{C + A - 2D - 1}{C} = 1$, pro casu alio

quolibet proposito gradus salubritatis aeris proportionales erunt quantitati $F \left(\frac{A + C - 2D - F}{A + C - 2D - 1} \right)$: ac denique si sit $D = 0$,

hoc est si volumen intrusi aeris exæquet interiorem omnem tubi capacitatem, erunt gradus iidem *E* proportionales quantitati

$F \left(\frac{A + C - F}{A + C - 1} \right)$: & posito $A = C = 18$, ad quem nu-

merum pollicum mercurius apud nos in humilioribus locis ascendit; salubritas aeris proportionalis erit quantitati $\frac{F}{55} (16 - F)$; vel etiam

55

quantitati $F - \frac{1}{11} \cdot F$: atque ita si tubo adhibito longitudinis pollicum 18, altitudo mercurii *F* deprehendatur alicubi decies major, quam fuerit alio in loco aliquo, salubritas aeris non erit major nisi vicibus $8 \frac{1}{11}$.

IV. Prior etiam formula $D = \frac{1}{2} (A + C - \sqrt{A^2 - C^2 + 4BC})$ involvere poterit determinandæ altitudini, ad quam mercurius ascendet si nitroso, & communi aere per totam tubi longitudinem *A* permixto sit *B* volumen, quod ea mixtione habita æquilibrium cum exteriori aere tueri posset. Ita si posito $A = 30$, $B = 18$, & duabus tertiis partibus communis aeris, & tertia parte aeris nitrosi

Ff 2

24

ad replendum tubum intrusa, & mixtione habita volumen residuum aeris sit pars $\frac{2}{3}$ voluminis prioris, ut fert allatum Priestleii experimentum, & sit propterea $B = 30 \times \frac{2}{3}$, substitutis, ac reducis numeris altitudo D prodibit circiter trium pollicum. Si summa voluminum, quæ ante mixtionem communis, & nitrosi aeris habebatur, minuat parte tantum $\frac{1}{3}$, & sit $B = 30 \times \frac{2}{3}$, fiet altitudo D , ad quam mercurius in tubo eodem subidet, circiter unius pollicis cum dimidio.

V. Si eodem tubo longitudinis 30 pollicum, seu pedum $1\frac{1}{2}$ ad experimentum adhibito aqua mercurio substituat, altitudo C statuenda erunt pedum circiter 32, ad quos aqua debet ascendere ut æquilibrium cum atmosphæra omni constituat. Hac autem facta substitutione si prior idem statuatur casus quod specie utraque aeris permixta integrum volumen B , ut cum exteriore aere æquibretur, fiat tantum $\frac{2}{3} A$, seu pedum $1\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$; altitudo aquæ D prodibit paulo minor semipede: atque in casu altero quod sit $B = 2\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ fiet D quartæ partis circiter unius pedis. Si communis aer fixo, ut vocant, aeri admixtus in vacuum tubi capacitatem transeat, & aliqua voluminis imminutio ex eo tantum oriatur, quod aliqua aeris fixi portio ab aqueis particulis absorbeat, hac eadem formula definiri poterit differentia altitudinis, quæ quantitati absorpti aeris respondebit. Alia ad hanc Physicæ experimentalis partem amplificandam, atque illustrandam spectantia facile ex iisdem principiis colliget qui experimentis Geometriæ studium adjunxerit.

PROBLEMA III

Si gravitas constans sit, & densitas aeris sit proportionalis ponderibus comprimentibus, densitatis rationem, variationemque altitudinis mercurii in barometris suspensi pro data quavis supra terrestrem superficiem altitudine determinare.

Sit centrum telluris A , fig. 100., radius AF , superficies Ff , & sit atmosphære altitudo FO , accipianturque æquales altitudinis partes, & utcumque exigue CD , DE . Cum voluminibus exæquatis massæ proportionales sint densitatibus, densitas autem aeris statuatur proportionalis ponderibus comprimentibus, erit pondus aeris CD ad pondus aeris DE ut pondus omne superincumbens puncto C ad pondus su-

superincumbens puncto D : & si pondus columnæ aeris CO vocetur P , & sit p pondus particulæ exiguæ CD , p' vero pondus particulæ alterius DE , erit $P : P + p = p : p'$, & componendo erit $P : P + p = P + p : P + p + p'$; nimirum positis æqualibus CD , DE pondera super incumbencia, & densitates aeris in C , D , E erunt in proportionem continuæ. Quod idem cum esse debeat aliis æqualibus particulis quot. cumque ab E ad F usque acceptis, cumque accedendo ad terrestrem superficiem pondus columnæ aeris superincumbentis, & altitudo mercurii in barometris suspensi in eadem ratione augeri debeant; distantii a loco superiore O in progressionem arithmetica crescentibus, densitates aeris, & altitudines barometricæ crescent in progressionem geometrica: hoc est distantie singulæ a puncto O erunt logarithmi altitudinum mercurii. Quare si altitudo mercurii in superficie terræ vocetur B , & sit b altitudo in alio quolibet loco E , erit, $OF : OE = \log. B : \log. b$, assumptaque constante quantitate A , & posita $FE = 1$, erit $OF = A. \log. B$, $OE = A. \log. b$, & $OF - OE = FE = 1 = A. \log. \frac{B}{b}$.

COROLLARIA.

I. Si densitas aeris sit accurate proportionalis ponderibus comprimentibus, densitas aeris imminutis ponderibus ultra limitem quemvis decrescet, & altitudo atmosphæræ FO evadet infinita, atque ut aliquis densitatis, & altitudinis aeris sit limes, densitas omnis statuenda erit proportionalis ponderibus comprimentibus addita constante aliqua quantitate, quæ ultimam aeris densitatem, ubi nullum sit pondus comprimens, definiat. Jam vero constans hæc quantitas omnino exigua esse debet, cum aer omnis in antlia Pneumatica ad eam usque tenuitatem deducatur, ut negligi densitas, & cum fluido æthereo aer confundi possit: cumque pro differentiis ponderum non ita magnis, ad eas usque altitudines supra terrestrem superficiem ascendendo, in quibus gravitas adhuc constans potest censi, densitas sit ponderibus comprimentibus satis accurate proportionalis, ut ferunt notissima apud Physicos Mariotti experimenta; satis accurata ea regula censi poterit, quam primo Hallesius tradidit in Transactionibus Philosophicis anni 1686., quod scilicet locorum elevatio-

tionibus supra terrestrem superficiem in progressionē arithmetica crescentibus densitates aeris, & altitudines mercurii decrescant in progressionē geometrica.

II. Formulam autem illam considerando. $\gamma = A \cdot \log. \frac{B}{b}$, quæ

ex regula eadem colligitur, manifestum est data aliqua altitudine γ ; datisque in utroque extremo altitudinibus barometricis B , b quantitatem A determinari posse, ac data postmodum hac constante quantitate problematis, dataque insuper altitudine mercurii b ad aliam quamlibet loci propositi elevationem, determinari posse elevationem, & altitudinem aliam quamcumque γ . Igitur datis tribus observationibus altitudinis barometricæ in plana terræ superficie, ad datam loci alterius elevationem, exempli gratia in vertice alicujus turris, atque ad elevationem aliam quæ metienda proponatur; ex primæ quidem, & secundæ observationis comparatione determinabitur quantitas constans problematis, ex hac vero quantitate, & primæ, ac tertiæ observationis comparatione altitudo montis determinabitur. Simplicio rem hanc trium observationum regulam regulis aliis substituendam esse censerem, quibus Halleyus, aliique authores altitudinem montium non nisi ex binis observationibus barometricis determinandam esse docuerunt, at datam insuper intellexerunt rationem densitatis aeris, & mercurii, quæ observationum earundem tempore non nisi observationibus aliis posset determinari.

III. Cum instituto accurate experimento altitudo mercurii in plano majoris templi Mediolanensis deprehensa sit pollicum Parisiensium 27, & linearum 11, 2, hoc est lin. 335, 2, ac manente eodem thermometri, & caloris gradu brachiis Mediolanensibus 126 altius ascendendo supra tholum prodierit differentia lin. 3, 2, & altitudo omnis 332; pro minoribus quidem differentiis elevationum supra terrestrem superficiem assumi poterit, mercurio ad altitudinem pollicum circiter 28 subsidente variationi unius lineæ brachia nostra 39½ circiter, seu pedes Parisenses 72, & pollices 2 respondere. Pro majoribus autem altitudinibus cum logarithmis Briggianis sumptis sit $\log. 335, 2 = 2, 5253040$, $\log. 332 = 2, 5211381$, & $\log. \frac{335, 2}{332}$

332
==

$= 0,0041659$: atque insuper cum brachium Mediolanense ad Parisiensem pedem se habeat satis proxime ut $11:6,003$, & brachia nostra 126 consticiant Parisienses pedes $230,8845$; erit pro eadem aeris temperie quantitas constans $A = \frac{2308845000}{41659} = 55422\frac{1}{2}$.

41659

Pro editionibus igitur locis aliis propositis in quibus adhuc constans vis gravitatis censeretur possit, data altitudine mercurii suspensi b , & logarithmo numeri 235 , 2 per numerum linearum altitudinis δ divisi in numerum $55422\frac{1}{2}$ ducto, habebitur numerus pedum parisiensium, qui elevationem loci propositi supra terrestrem superficiem definiet.

IV. Ut autem accuratior sit calculus, mercurii observationes eodem tempore, eodemque barometri genere instituendæ erunt, atque insuper erit curandum ut in eadem aeris temperie ad verticem, & pedem montium, eodem scilicet thermometri, & caloris gradu instaurantur. Cum enim experimentis possit explorari quæ in mercurio voluminis variatio diversis caloris gradibus respondeat, cumque altitudines barometricæ ad eundem caloris gradum satis proxime reduci possint, non video quam ratione caloris, & frigoris in omnem atmosphæram actio, & quæ inde pendet elasticitatis, & densitatis aeris variatio supputari possit: & ne altitudinis correctiones, reductionesque ex variationibus huiusmodi pendentes vagis dumtaxat, & incertis regulis committamus; potius curandum erit ut repetitis sæpius ad verticem, & pedum montis experimentis, ea simul comparentur, quæ pares, quam fieri potest, caloris circumstantias exhibeant. Ut vero regulas alias evolvamur, quibus altitudines montium ex duabus tantum altitudinibus barometricis, data ratione densitatis aeris, & mercurii, determinari solent, & quæ tot jam difficultates, ac dubia observatoribus aliis regulæ iniecerant, generales leges densitatis centralis cujuscvis corporis, & atmosphære circumambientis pro hypothesi qualibet vis centripetæ investigabimus.

PROBLEMA IV.

Data lege vis centripetæ, & posito quod Planetæ alicujus densitas

si-

fitas sit proportionalis ponderibus comprimentibus addita constante aliqua quantitate, invenire legem densitatis.

Sit radius sphaeræ fluidæ $AO = r$, fig. 111, $OM = x$; $Mm = dx$: sit etiam D fluidi densitas, & g gravitas absoluta in superficie sphaeræ O , & in alio quolibet loco M sit gravitas $\frac{g r^n}{(r-x)^n}$;

ac denique sit π densitas in loco eodem M , & dx differentia densitatis in locis M , & m , differentia autem ponderis $g r^n \pi dx$. Si densitas $(r-x)^n$

omnis sit ponderi proportionalis addita constante aliqua quantitate C , & variatio densitatis sit proportionalis differentiæ ponderum comprimentium, erit $gD + C : g r^n \pi dx = D : d\pi$,

atque inde euetur $\frac{d\pi}{\pi} = \frac{g D r^n dx}{g D + C \cdot (r-x)^n}$: & si C denotet con-

stantem aliam quantitatē, sumpto integrali, & pro logarithmorum modulo accepta unitate erit

$$\log. \pi = C' + \frac{g D r^n}{n-1 \cdot g D + C \cdot (r-x)^{n-1}};$$

At posito $x = 0$ in loco O sit $\log. D = C' + \frac{g D r^n}{n-1 \cdot g D + C}$

Itaque loco C' substituendo $\log. D = \frac{g D r^n}{n-1 \cdot g D + C}$ fiet etiam

$$\log. \pi - \log. D = \log. \frac{\pi}{D} = \frac{g D r^n}{n-1 \cdot g D + C} \left(\left(\frac{r}{r-x} \right)^{n-1} - 1 \right);$$

& si E sit numerus, qui pro logarithmo habet unitatem, fiet denique

$$\frac{\pi}{D} = E^{\frac{g D r^n}{n-1 \cdot g D + C} \left(\left(\frac{r}{r-x} \right)^{n-1} - 1 \right)}.$$

COROLLARIA.

1. Si sit $n = 1$, hoc est si gravitas sit inverse ut distantia a cen-

centro, fiet in priore æquatione $\frac{d\pi}{\pi} = \frac{gDr dx}{gD + C} \cdot \frac{1}{r-x}$, &

$\log. \pi = C' - \frac{gDr}{gD + C} \cdot \log. \frac{r}{r-x}$; & cum sit $C' = \log. D + \frac{gDr}{gD + C} \cdot \log. r$, fiet etiam $\log. \frac{\pi}{D} = \frac{gDr}{gD + C} \cdot \log. \frac{r}{r-x}$; scilicet

logarithmi densitatis π auctæ accedendo ad centrum erunt ut loga-

rithmi distantæ a centro inverse sumptæ, & si distantæ $r - x$ sumantur in progressionem geometricam decrecentem, densitates π crescent in ratione geometrica: quod a Newtono traditum theorema est in Prop. XXI.

Lib. II. Princip. Erit etiam universim $\frac{\pi}{D} = \frac{r}{r-x} \frac{gDr}{gD + C}$, & in cen-

tro ipso, posito $r = x$, densitas fiet infinita, ut in casu alio quolibet exponentis n positivi, & gravitatis accedendo ad centrum crescentis in ratione aliqua distantæ inverse sumptæ.

II. Si sit $n = 1$, hoc est si gravitas sit reciproce ut quadratum distantæ, evadet $\log. \frac{\pi}{D} = \frac{gDr x}{gD + C} \cdot \frac{1}{r-x}$; & si aliæ a centro di-

stantiæ sint $r - x'$, $r - x''$ &c., atque analogæ densitates π' , π'' &c., erit pariter $\log. \frac{\pi'}{D} = \frac{gDr x'}{gD + C} \cdot \frac{1}{r-x'}$, $\log. \frac{\pi''}{D} = \frac{gDr x''}{gD + C} \cdot \frac{1}{r-x''}$ &c.,

reductisque terminis, posito $\frac{gD}{g \cdot D + C} = a$, fiet $\log. \frac{\pi'}{D} = \log. \frac{\pi}{D}$

$= \log. \frac{\pi'}{\pi} = a \frac{(x' - x) \cdot r}{(r-x)(r-x')}$, & $\log. \frac{\pi''}{\pi'} = a \frac{(x'' - x') \cdot r}{(r-x')(r-x'')}$.

Quod si igitur accipiat $\frac{x' - x}{r-x} = \frac{x'' - x'}{r-x'}$ hoc est si distantæ ac-

cipiantur in progressionem harmonicam, erit $\log. \frac{\pi'}{\pi} = \log. \frac{\pi''}{\pi'}$;

hoc est logarithmi densitatum erunt in progressionem arithmetica; & densitates ipsæ in progressionem geometricam: quod aliud theorema a Newtono traditum est in Propof. XXII.

III. Si gravitas sit directe ut distantia a centro, quæ ratio
Mechanica, G g in

in sphaera homogenea habet locum, hoc est si sit $n = -1$, erit

$$\frac{d\pi}{\pi} = \frac{gD \cdot r - x \cdot dx}{gD + C} \cdot \frac{1}{r} \text{ \& log. } \pi = C' + \frac{gD}{gD + C} \cdot \frac{rx - \frac{1}{2}x^2}{r}$$

cumque posito $x = 0$ fiat $\log. D = C'$, si fiat insuper $r - x = \frac{1}{2}$,
 erit etiam $\log. \pi = \frac{gD}{gD + C} \cdot \frac{2rx - x^2}{2r} = \frac{gD}{gD + C} \cdot \frac{r^2 - \frac{1}{4}}{2r}$. Quod

si igitur aliae a centro distantiae sint $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ac sit similiter
 $\log. \pi' = \frac{gD}{gD + C} \cdot \frac{r^2 - \frac{1}{4}}{2r}$, & $\log. \pi'' = \frac{gD}{gD + C} \cdot \frac{r^2 - \frac{1}{16}}{2r}$,

reductis terminis patebit, posito $\log. \frac{\pi'}{\pi} = \log. \frac{\pi''}{\pi}$, hoc est acceptis

densitatibus in progressionem geometricam, esse oportere $2\frac{1}{2} \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \frac{1}{16}$, hoc est quadrata distantiarum esse in progressionem arithmetica: quod theorema Hermannus attigit in Coroll. VI. Propos. XXVI. Lib. II. Phoronomiae.

PROBLEMA V:

Data lege vis centripetae, & posito quod atmosphaerae densitas sit proportionalis ponderibus comprimentibus addita constante aliqua quantitate, invenire atmosphaerae densitatem.

Sit radius planetae r , atmosphaerae R , distantia loci propositi a centro $R - x$, densitas atmosphaerae in superficie Planetae D , gravitas absoluta g , A altitudo fluidi homogenei æquiponderantis toti atmosphaerae, gAD absolutum pondus: atque ad distantiam $R - x$ a centro sit gravitas $\frac{gr^2}{(R-x)^2}$, densitas autem π . Erit

$\frac{gr^2 \pi dx}{(R-x)^2}$ differentia ponderis, quæ respondebit differentiae altitudinis

dx . Quare in eadem hypothesi densitatis proportionalis ponderibus comprimentibus addita constante aliqua quantitate, erit

$$gDA + C: \frac{gr^2 \pi dx}{(R-x)^2} = D: d\pi,$$

$$\text{\& log. } \pi = C' + \frac{gDr}{n-1 \cdot gDA + C \cdot (R-x)^{n-1}};$$

$$\text{\& quia posito } x = R - r \text{ fit log. } D = C' + \frac{gDr}{n-1 \cdot gDA + C}.$$

iisdem problematis alterius reductionibus eruetur

$$\log. \frac{\pi}{D} = \frac{gDr}{n-1 \cdot gDA+C} \cdot \left(\left(\frac{r}{R-x} \right)^{n-1} - 1 \right)$$

$$\frac{\pi}{D} = E^{\frac{gDr}{n-1 \cdot gDA+C}} \left(\left(\frac{r}{R-x} \right)^{n-1} - 1 \right).$$

COROLLARIA.

I. Si quantitas constans C adeo parva intelligatur ut possit negligi, atque, ut ferunt Mariotti, aliorumque experimenta, densitatis variatio proportionalis sit variationi ponderum comprimentium, ac distan iis τ a superficie Planetæ sumptis fiat

$\tau = R - x - r$, & $R - x = r + \tau$; formula omnis evadet

$$\frac{\pi}{D} = E^{\frac{r}{n-1 \cdot A} \left(\left(\frac{r}{r+\tau} \right)^{n-1} - 1 \right)};$$

& si fiat insuper $n=0$, erit $\frac{\pi}{D} = E^{\frac{-\tau}{A}}$, & $\log. \frac{\pi}{D} = -\frac{\tau}{A}$,

sive etiam $A \log. \frac{D}{\pi} = \tau$: posito autem $n=2$ erit

$$\frac{\pi}{D} = E^{\frac{-\tau}{A(r+\tau)}}.$$

II. Primo igitur cum $\frac{r}{r+\tau}$ sit quantitas minor unitate, & sit propterea $\frac{\tau}{A \cdot (r+\tau)} < \frac{\tau}{A}$, densitas $\frac{\pi}{D}$ recedendo a Planetæ superficie mi-

nor fiet si gravitas per totam altitudinem constans sit, quam si minuatur gravitas in duplicata ratione auctæ distantie a centro: ut etiam patet ex quo alius ascendendo plus ponderis comprimentis deficere debeat in priore hypothesi quam in secunda. Deinde vero in hypothesi gravitatis constantis cum sit $A \cdot \log. \frac{D}{\pi} = \tau$, altitudines

supra Planetæ superficiem proportionales erunt logarithmis, qui rationem densitatis atmospheræ in superficie ipsa Planetæ, atque in pro-

posita qualibet altitudine definient, ut supra etiam dictum est.

III. Posita insuper $n = 0$, si altitudo atmospheræ z assumatur infinita, prodibit $\pi = \frac{1}{E^\infty}$, scilicet densitas in extrema atmospheræ

ræ regione evadet infinite parva. At si sit $n = 1$, in hypothesi eadem infinite altitudinis, fiet $\pi = \frac{1}{EA}$. Generatim etiam si sit $n = 1$ quantitas

positiva, erit $\left(\frac{r}{r+z}\right)^{n-1}$ quantitas infinite parva, eaque neglecta præ

unitate paradoxum quodam emergeret, quod atmospheræ densitas in infinita altitudine esset finita. At observandum est quod si densitas in superficie Planetæ finita sit, in hypothesi quavis gravitatis in majoribus distantis decrefcentis, posita $z = \infty$ fieri debet $\pi = 0$, & $d\pi = 0$, cumque ita prior analogia problematis evadat $gDA : D = -\frac{gr \pi dz}{(r+z)^2}$: $d\pi = 0 : 0$, analogiæ eidem, & reductio-

nibus subsequens non erit locus, & paradoxum omne evanescet ;

PROBLEMA VI.

Iisdem positis pro data qualibet altitudine supra terrestrem superficiem invenire altitudinem Mercurii in Barometris suspensi.

Si altitudo mercurii prope terrestrem superficiem totius atmospheræ æquiponderantis vocetur B , & sit absolutum pondus $gB = gAD$; atque ad distantiam z ab ipsa superficie altitudo Mercurii vocetur b , eadem autem distantia præ tota distantia a centro adeo sit parva ut differentia ponderis in punctis singulis possit negligi, atque absolutum pondus Mercurii censeri possit $\frac{gr b}{(r+z)^2}$, ac denique atmospheræ den-

sitates D , & π proportionales sint ponderibus comprimentibus gB ; & $gr b$, addita constante quantitate C , atque ita fiat

$$\pi : D = \frac{gr b}{(r+z)^2} + C : gB + C ; \text{erit etiam}$$

$$b = \left(\frac{gB + C}{g} \right) \left(\frac{r+z}{r} \right)^2 : \frac{\pi}{D} - \frac{C \cdot (r+z)^2}{gr}$$

At

At vero in formulis problematis præcedentis, posito $gB = gDA$,
 esse debet $\frac{\pi}{D} = E \frac{g^{Dr}}{n-1 \cdot gB+C} \left(\left(\frac{r}{r+1} \right)^{n-1} - 1 \right)$.

Hac igitur substitutione facta prodibit

$$b = \left(\frac{gB+C}{g} \right) \left(\frac{r+1}{r} \right)^n \cdot E \frac{g^{Dr}}{n-1 \cdot gB+C} \left(\left(\frac{r}{r+1} \right)^{n-1} - 1 \right) - C \cdot \frac{(r+1)^n}{gr^n}.$$

COROLLARIA:

I. Si aeris densitas statuatur proportionalis ponderibus compri-
 mentibus, & fiat $C = 0$, evadet $b = B \cdot \left(\frac{r}{r+1} \right)^n \cdot \frac{\pi}{D}$, & $\frac{\pi}{D}$

$= E \frac{Dr}{B \cdot n-1} \left(\left(\frac{r}{r+1} \right)^{n-1} - 1 \right)$; & si fiat insuper $r = -r$;
 hoc est si atmosphæram omnem intelligamus traductis canalibus
 continuari ad centrum usque, prodibit

$$\frac{\pi}{D} = E \frac{Dr}{B \cdot n-1} \left(\left(\frac{r}{0} \right)^{n-1} - 1 \right), \text{ \& } b = B \cdot 0^n \cdot \frac{\pi}{D}. \text{ Quare in}$$

hypothesi gravitatis constantis posito $n = 0$, fiet

$$\frac{\pi}{D} = E \frac{Dr}{B} \left(\frac{0}{1} - 1 \right) = E \frac{Dr}{B}; \text{ \& cum quantitas quælibet}$$

utcumque exigua ad potestatem exponentis 0 evecta æqualis sit uni-

tati, fiet $b = B \cdot E \frac{Dr}{B}$. Si sit n major unitate, densitas $\frac{\pi}{D}$ ad

centrum fiet infinita, & erit altitudo mercurii $b = 0$, $\frac{\pi}{D} = 0$, $\frac{1}{0} = 0$;

quod paradoxo alterius speciem præferret. At cum $g^n \cdot b$ non

exprimat pondus mercurii in barometris suspensi nisi gravitas $\frac{g^n}{(r+1)^n}$ per

totam altitudinem b ubique eadem invariabiliter cense-
 ri possit, ba-

rometro ad centrum usque translato, aut in modicis tantum a centro ipso distantis patet rursus analogiæ, & calculis præcedentibus amplius non esse locum.

II. Quod si insuper in hypothesi eadem gravitatis constantis, & posito $n=0$, pro modulo logarithmorum ut antea accipiarur unitas, quia altitudines Mercurii in barometris suspensi B , & b proportionales sunt densitatibus D , & π , erit $\log. \frac{D}{\pi} = \log. \frac{B}{b} = \frac{\gamma}{A}$, & $\log. b = \log. \frac{B\pi}{D} = \log. B - \log. D = \log. B - \frac{\gamma}{A} = \log. B - \frac{D\gamma}{B}$.

Quod si vero logarithmi accipiantur ex tabulis Briggianis, in quibus modulus est $\frac{1}{2.302585} = 0.43429448$, in priore integratione valorem $\log. \frac{\pi}{D}$ per modulum ipsum dividendo fiet

$$I. \log. \frac{B}{b} = 0.43429448 \cdot \frac{\gamma}{A} = 0.43429448 \cdot \frac{D\gamma}{B}$$

$$II. \log. b = \log. B - 0.43429448 \cdot \frac{D\gamma}{B} = \log. B - \frac{D\gamma}{2.302585 \cdot B}.$$

III. Data ratione densitatis aeris, & Mercurii in loco quovis proposito, datisque simul altitudinibus barometricis in vertice, & ad pedes montis alicujus, altitudo montis, & vicissim data altitudine montis, & altitudine barometrica ad basim inveniri poterit quæ altitudo mercurii ad verticem esse debeat. Ita si proportio densitatum aeris, & mercurii ea assumatur, quam primo statuit Muschenbroekius, scilicet $0.00125 : 13.593$, sive $1 : 10874$, & mercurii altitudo sub æquatore, & in ipsa maris libella assumatur juxta Bouguerii experimenta lin. 337., & in vertice montis Pichincha lin. 191.; erit altitudo A aeris homogenei hexapedarum 4241., & montis altitudo $\gamma = \frac{A \cdot \log. B}{b} = 2409$. Quod si alia densitatum ratio $0.4343 \cdot \frac{B}{b}$

assumatur $0.00125 : 14$, sive $1 : 11200$, quam postmodum Muschenbroekius idem exhibuit, prodiret altitudo montis hexap. 2481., & adhuc major prodiret altitudo si ratio densitatum aeris, & mercurii juxta Cotefii experimenta assumeretur $1 : 11900$. Bouguerius altitudinem

dinem montis Pichincha invenit hexap. 2435. Posita vero hac montis altitudine, & altitudine barometrica ad basim lin. 337, altitudo omnis in vertice fieret in priore quidem hypothefi densitatum paulo minor lin. 190, & in altera paulo minor 193, quos inter numeros experimentum fere erat medium.

IV. Simili modo si altitudines barometricæ ad montem *le Puy de Dôme* ex Cassini observationibus Massiliæ, & in vertice montis *Mouffet* ex Plantadii, atque ad pedes, & in vertice montis Pici Teneriffæ insulæ ex notis Feuillei experimentis assumantur; aeris homogenei, montium altitudines juxta tres illas, quas indicavimus, proportionales densitatum aeris, & mercurii erunt ut in tabula sequente.

Altitudo mercurii, aeris homogenei, montis. Altitudo montis.

<i>le Puy.</i>	ad pedes in vertice lin. 324 $\frac{1}{2}$.	285 $\frac{1}{2}$.	{	I. hex. 4084.	522 $\frac{1}{2}$.	juxta Cassinum hexapedarum 557.
				II.	4206 $\frac{1}{2}$.	538 $\frac{1}{2}$.
				III.	4469.	572.
<i>Mouffet.</i>	338.	257.	{	I.	4254.	1235. juxta Cassinum 1253.
				II.	4381.	1272. Lambertum 1228.
				III.	4655.	1351. Plantadium 1289.
<i>Pici.</i>	334.	209.	{	I.	4205.	2971. Feuilleum 2193.
				II.	4330.	2030. Bouguerium 2054.
				III.	4600.	2157.

V. Cum in priore observatione ad pedes montes Pichincha, & ad verticem instituta sit log. $\frac{337}{191} = 0.2466$, atque in observatio-

nibus aliis sit log. $\frac{324.5}{285.5} = 0.0556$ &c., manifestum est obser-

vatum montium altitudinem non adhuc accurate satis prodire quatuor notis prioribus, quæ differentiam eorundem logarithmorum exhibent, hexapedarum numerum exprimendo, demendoque partem trigessimam: quam aliam altitudinum supputandarum methodum Bouguerius proposuerat in Actis Parisiensis Academiæ anni 1753. Patet insuper trigometricas eorundem montium mensuras cum institutis calculis convenire quantum fert aliqua mensurarum earundem incertitudo, præcipue vero diversa ratio densitatum aeris, & mercurii, quæ in cal-

calculus assumitur. Et cum immutato caloris gradu aer, & mercurius diversimode condensentur, expandanturque, & alia fiat ratio densitatum, patet denique quod si in locis singulis instituto experimento altitudines barometricæ, & simul etiam hujusmodi ratio exploraretur, locorum eorundem altitudines, aliorumque omnium, in quibus thermometri gradus, & aeris temperies maneret eadem, accurate supputari possent, altitudinem aeris homogenei inferiori loco incumbentis ducendo in differentiam logarithmorum altitudinis mercurii, quæ in inferiore, & superiore loco deprehenditur, & per logarithmorum modum dividendo.

A P P E N D I X.

DE ALTITUDINIBUS

MONTIUM DÎMETIENDIS:

TRibus hîc problematis posterioribus generales formulas exposuimus, quæ atmosphæræ densitatem, & mercurii altitudinem definiunt, & singulas ita evolvimus ut paradoxa omnia evanescerent, quæ summus, ingeniosusque Mathematicus in spectimine Analytico de altitudinibus barometricis Ticini edito proposuerat. Usus etiam formularum in dimetienda montium altitudine ita ostendimus ut difficultates omnes præcaveremus, quibus alii Philosophi complures censuerunt analysim omnem problematis a trigonometrica montium mensura nimium dissidere, rejectaque omnino theoria practicas quasdam regulas pro altitudine montium accuratius determinanda ex collatione observationum elicere conati sunt. Vidimus autem supputatam montium altitudinem, & mensuras trigonometricas satis inter se invicem convenire quantum fert varia ratio densitatum aeris, & mercurii, quæ observationum institutarum tempore haberi poterat. Clariss. de Luc cum barometro, & thermometro accuratissime constructo, ac diviso observationum instituendarum methodum perfecisset, observationesque instituisset ipse quamplurimas, practicam methodum elevationis loci cujuslibet propositi ex barometricis altitudinibus

ac-

accuratius supputandæ, fusius exposuit, quæ huc redit. Primo ipse ad æstimandam temperiem mercurii in barometro suspensi thermometro Reaumurii usus est, in quo ab aqua ebulliente ad glaciem usque non quidem 80 gradus, sed 96. numeravit, in quo scilicet glaciæ gradus erant — 12, aquæ ebullientis + 84. Deinde ad temperiem aeris æstimandam thermometro alio usus est, in quo ab aqua ebulliente ad glaciem numeravit gradus 186. Thermometro hoc altero gradus $16\frac{1}{4}$, priore autem gradus 12 supra glaciæ limitem indicante; & mercurio in barometris ad altitudinem pollicum 29, sive linearum 348 subsidente in ima valle prope Selevam Genevæ montem deprehendit ipse hexapedis 12, 497. fuisse ascendendum ut altitudo mercurii evaderet dumtaxat linearum 347. Erat propterea in eo experimento densitas aeris ad mercurii densitatem in eadem ratione quæ est linearum unius ad hexapedas 12, 497, sive ut 1 : 10797, 408. In experimento alio, quod supra in Coroll. III. Probl. III. retulimus, cum differentia linearum 3,2 altitudini brachiorum 126, seu pedum Parisiensium 230,8845 apud nos responderet, erat densitatum ratio quam proxime 1 : 10390.

In illo autem observatoris celeberrimi experimento cum sit $\log_{10} \frac{10}{9} = 0,0012497$, cumque ita acceptis logarithmis Briggianis singulari quodam casu eadem notæ numericæ habeantur, quæ numerum hexapedarum elevationis loci exprimunt; erit quantitas constans problematis 10000, & altius ascendendo, pro eodem aut saltem proximis caloribus gradibus, quatuor notæ numericæ priores differentiarum logarithmorum alterius altitudinis barometricæ expriment semper numerum hexapedarum, quibus loca alia quælibet supra imam vallem affurgunt. Pro alio autem quovis caloribus gradu binas regulas altitudinum corrigendarum author idem adiecerat: primam, ut pro singulis gradibus prioris thermometri infra, aut supra illum gradum, qui experimenti tempore habebatur, addantur, aut subducantur partes totidem $\frac{1}{3}$ unius linearum ex observata mercurii altitudine: secundam ut accepta logarithmorum differentia, pro singulis gradibus alterius thermometri infra, aut supra divisionis initium, in infimo & summo loco deprehensis, ex altitudine supputata partes totidem bis millesimæ subducantur, vel addantur. Hisce regulis altitudines locorum sic cor-

Mechanica.

H h

re-

rexit, ut in singulis observationibus error vix aliquando 20 pedum prodierit, medioque accepto in tribus prioribus observationum stationibus error $14 \frac{1}{11}$, $6 \frac{1}{7}$, & 6 pedum, in aliis vero stationibus duodecim pedum 4 dumtaxat fuerit, nec nisi magis inde aberraverint observationes, quæ circa ortum Solis ventoso aere instituebatur. Qui post autorem ipsum similibus observationibus incubuerunt Philosophi, nonnulli quidem regulas omnes observationibus satis conformes esse, alii vero non nisi casu aliquo conformes, & quandoque differentis majoribus aberrantes deprehenderunt. Prior autem regula, quæ variam mercurii dilatationem caloris vi genitam, correctionesque exhibet altitudinis barometricæ, non nisi ab experimentis deprompta est, ac repetitis in loco alio quolibet experimentis ubi opus esset ad alium quemvis thermometri gradum posset accomodari. Regula alia, quæ variationem pressionis, & densitatis in atmosphæra omni, correctionesque altitudinis loci cujuslibet propositi inde ortas respicit, non video quam ratione in locis singulis pro data caloris, & frigoris differentia determinari possit: & cum ignota sit caloris, & frigoris in atmosphæram actio, nulla omnino ratione ex aliis theoriæ principii posset colligi.

Si ex serie omni observationum, quas D. de Luc in quindecim stationibus Selevæ ejusdem montis instituit, seligantur illæ, in quibus differentia graduum thermometri in inferiore, & superiore loco minor occurrebat, citra alias correctiones locorum supra imam vallem elevationes satis accurate exhiberi poterunt priores quatuor dumtaxat notas numericas accipiendo differentiarum logarithmorum utriusque altitudinis barometricæ. Quod facile patebit iis, qui in Clarissimi Authoris opere observationes illas excerpent, in quibus minor erat graduum differentia in utroque thermometro superiore, atque inferiore, nec nisi exiguæ esse poterant correctiones differentis caloris debitæ. Deprehendent enim omisiss hujusmodi correctionibus differentiam altitudinis observatæ, atque altitudinis ex prioribus iisdem notis numericis supputatæ in decima statione fuisse pedum dumtaxat 13, in undecima pedum 16, atque in tredecim aliis stationibus differentiam infra pedes 10 constituisse. Simili igitur ratione si alio in loco quovis explorata sit ratio densitatum aeris, & mercurii, atque observatis sæpius altitudinibus

ba-

barométricis in superficie terræ, atque ad propositam quamvis elevationem, observationes illæ seligantur, comparenturque inter se, quæ & eodem tempore, & eadem aeris temperie, aut minoribus saltem caloris & frigoris differentiis institutæ sint, proposita loci elevatio supra terrestrem superficiem satis accurate definiri poterit quin ullis aliis correctionibus sit opus. Ut vero densitatum ratio innotescat observationis loco, ac tempore similiter videndum erit ad quam usque altitudinem ascendere oporteat ut in barometro habeatur variatio unius lineæ, aut alio aliquo experimenti genere eadem determinanda erit ratio. Ita vero hæc alia methodus supputandæ montium altitudinis in priorem methodum illam recidet, quam in Coroll. II. Probl. III. proposuimus, qua scilicet datis tribus observationibus barometricis in plana terræ superficie, ad notam aliquam altitudinem, atque ad altitudinem aliam propositam, ex primæ, & secundæ observationis comparatione erui debet quantitas constans problematis, quæ rationem illam densitatum aeris, & mercurii involvit, atque ex comparatione primæ, & tertiæ observationis proposita loci elevatio determinatur. At insuper considerandum est in definienda montium altitudine, atque in majoribus aliis altitudinibus æstimandis errorem aliquot hexapedarum negligendum omnino esse, neque ipsas quidem mensuras trigonometricas, quæ ex correctionibus refractionum, & mensura angulorum pendent, ad hos usque certitudinis limites produci posse, neque opus esse ut hæc omnia minutius, ac scrupulosius ad calculum revocentur.

CAPUT TERTIUM.

DE MOTU FLUIDORUM

E VASIS PROSILIENTIUM.

PHÆNOMENON I.

Altitudinem jactus in fontibus salientibus ab horizontali linea per superficiem fluidi stagnantis in vase, aut receptaculo quovis, unde jactus sufficitur, traducta aliquantulum deficere, & eoquidem magis quo major fuerit altitudo fluidi aperto foramini

Hh 2

su-

superincumbentis, jamdiu observatum est. Præcipua experimenta; quæ Mariottus diligentissime a se instituta retulit parte quarta de motu aquarum ita in unicam tabulam possunt conjici.

Experimenta.	Altitudo aquæ			Foraminis diameter.	Altitudo jactus.		
	ped.	5. poll. o.	lin. 6.		ped.	4. poll.	11.
I.		5.	6.		5.	3.	
II.		12.	4.		12.	$\frac{1}{2}$.	
III.		24.	5.		22.	10.	
IV.		24.	5.		22.	2.	
V.		26.	1.	10.	23.	9.	
VI.		26.	1.	3.	22.	0.	
VII.		34.	$11\frac{1}{2}$.	6.	31.	9.	
VIII.		34.	$11\frac{1}{2}$.	3.	28.	0.	

Hiscæ omnibus experimentis inter se comparatis videri posset jactuuum differentias esse quam proxime in ratione reciproca diametro- rum, & in ratione directâ duplicata altitudinum fluidi prementis. Cum vero pro diametris uno pollice majoribus nullam amplius crassio- rum, graciliorumque jactuuum differentiam deprehendisset Mariottus, quæ diametrorum variationibus responderet, cumque in priore illo experimento sub altitudine pedum quinque jactus differentia fuerit unius pollicis; generalem regulam statuit quod numerus pollicum, quibus altitudo jactus ab altitudine fluidi prementis deficit, æquetur quadrato quintæ partis numeri pedum altitudinis ejusdem fluidi. In allatis omnibus experimentis rotundum erat foramen, & jactus di- rectio a verticali linea aliquantulum aberrabat. At insuper observa- tum est in jactu omnino verticali, paribus fluidi prementis altitudi- nibus, minorem esse jactus ejusdem altitudinem, quam in jactu ali- quantulum inelinato. Ita in experimentis aliis, quæ a D. Bossut accu- ratissime instituta sunt, quæque ipse retulit in Sect. I. Cap. V. Par. II. Hydrodynamicæ, cum altitudo aquæ supra foraminis circularis cen- trum in vase constanter esset pedum 11, foramen autem in superio- re parte tubi horizontalis diametri pollicum $3\frac{1}{4}$ aperiretur; altitudi-

lines

nes jaetus verticalis , & aliquantulum inclinati pro varia foraminis diametro erant ut sequitur

Foraminis diameter.		Altitudo jaetus verticalis .				Jaetus inclinati		
Linearum	1.	ped. 10.	poll. o.	lin. 10.		10	4.	6.
	4.	10.	5.	10.		10	7.	6.
	8.	10.	6.	6.		10	8.	o.

Toricellius ad calcem libri secundi de motu projectorum , cum de aquarum motu differeret , defectum altitudinis jaetus partim resistentiæ aeris tribuit , partim etiam ipsimet aquæ , quæ dum e fastigio relabitur deorsum subsequentes guttulas impedit , ac retardat , nec finit amplius ad illud usque fastigium pervenire . Hoc manifeste patere dixit quando opposita manu foramen penitus occludatur , deinde aperiatur citissime retracta manu : videbuntur enim priores , ac præeuntes guttulae altius ferri quam sit postmodum culmen aquæ relabi , & deorsum fluere incipientis . Impedimento relabentium particularum defectum jaetuum tribuerunt etiam s' Gravesande , Kästner , & Bossut , qui idipsum patere dixit quod jaetu aliquantulum inclinato altitudo major habeatur . At vero non nisi exiguum phænomeni hujus partem resistentiæ aeris tribui posse ex aliis experimentis constat , quæ §. II. Hydraulicæ a Wolfio relata sunt , quod scilicet aquæ in vacuo salientes non utique in tor raniolos , ac guttulas dividantur , ut in libero aere , sed neque ad majorem altitudinem ferantur . In guttulis primo erumpentibus singulare aliud phænomenon quandoque occurrit , qui saltus momentaneus dicitur , atque ex aeris actione pendet : scilicet aeris particulæ quandoque ante orificium a superincumbente fluido compressæ , cum referato orificio se expandant , & exteriorem aerem momento arceant , guttulas ipsas ad majorem altitudinem ferri sinunt . Ex minoribus foraminibus ob solam asperitatem , & resistendum laterum , quæ ad totam altitudinem foraminum majorem rationem habeat , jaetus minores effici ex eo patet quod nisi foramina sint valde exigua , sub eadem prementis aquæ altitudine , nulla amplius deprehenditur altitudinis jaetuum differentia .

PHÆNOMENON II.

Toricellius ex eo quod fluida ex apertis orificiis salientia ad eandem fore prementis fluidi libellam , & altitudinem assurgant , colli-

li-

ligere sibi visus est velocitatem partiæ cujusque in unoquoque orificio eam esse, quæ ex tota fluidi supra orificium altitudine libere decidendo acquiri posset, quæque esset in ratione subduplicata altitudinis. At cum conjectura hujusmodi fortasse sibi minime satisfacisset, & jactus omnis non tantum ex velocitate particularum primo erumpentium, sed ex successiva etiam prementis fluidi in salientes particulas actione pendere videatur, id ipsum confirmare voluit Torricellius Madiotti experimento, qui cum lateri vasis cylindrici altitudinis pedum quatuor, & diametri duorum pedum sexdecim æqualia foramina circularia inculpsisset, deprehendit quantitates aquæ æquali tempore ex singulis erumpentes proportionales esse radicibus distantiarum centri foraminis cujusque a superiore aquæ prementis superficie. Alia hujusmodi experimenta post Madiottum Gulielminus, & Mariottus eodem semper exitu instituerunt: nostra vero hac ætate tot alia addiderunt D.D. Bossut, & Michelotti, eaque tam accurate, atque in vasis tam magnis habita ut nihil videatur amplius in hac Physicæ Experimentalis parte desiderari.

D. Bossut ab altitudine unius pedis usque ad altitudinem pedum 15, D. Michelotti sub altitudinibus pedum 7, 12, 21 experimenta sua instituit: & ille quidem ostendit quantitates aquarum æquali tempore effluentium esse quam proxime radicibus altitudinum proportionales: hic vero cum aquarum æquali tempore effluentium quantitates per velocitatem altitudini fluidi prementis debitam divisisset eundem semper numerum obtinuit. At insuper collatione experimentorum omnium innotuit quantitatem aquæ dato tempore effluentis minorem esse quam si ex eodem foraminæ ea cum velocitate efflueret, quæ libere decidendo per totam fluidi prementis altitudinem acquiri posset. Ita in experimentis iis, quæ D. Bossut retulit Cap. IV. Par. II., quantitas aquæ uno minuto effluentis ex circulari foramine diametri unius pollicis sub altitudine pedum 4 erat pollicum cubicorum 5436, & pollicum 8135 sub altitudine pedum 9, qui pollicum numeri sunt inter se quam proxime ut 2:3. Erat autem foraminis illius area pollicum quadratorum $\frac{1}{4} \times 3$, 14159: & quia quo tempore corpus per altitudinem pedum 4, seu poll. 48 decedit pollices 96 ultima lapsus velocitate percurreret, erit pollicum cubicorum $24 \times 3, 14159$ aquæ

aque quantitas, quæ eo tempore ex vase constanter plano sub altitudine pedum 4 posset effluere. At insuper unius minuti secundi tempore decidit corpus ex altitudine pedum 15, 1, cujus radix est proxime 3,886. Cum igitur descensuum tempora sint ut radices altitudinis, erit pollicum $\frac{4}{3} \times 24 \times 3,14159 \times 3,886$ quantitas aquæ, quæ uno minuto secundo temporis ex eo foramine, eaque sub altitudine posset effluere, & quæ uno minuto primo efflueret pollicum cubicorum circiter 8793.

Numeri hujusmodi 5436, & 8790 sunt inter se quam proxime ut 5 : 8. Ubi rotundi foraminis diameter erat dumtaxat dimidii pollicis, quantitas aquæ sub altitudine pedum 4 uno minuto primo effluentis erat pollicum 1553, cum instituto similiter calculo ob velocitatem altitudini eidem debitam debuisset esse pollicum circiter 2197 $\frac{1}{2}$. Hi alii numeri sunt inter se quam proxime ut 5 : 7. Pro varia amplitudine foraminum, & crassitie lamellarum, quibus foramina e latere inculpta erant, adaptatis exterius, aut remotis tubis cylindricis, conicis, prismaticis, prodierunt rationes aliæ quantitatis aquæ dato tempore effluentis ad quantitatem, quæ paribus aliis circumstantiis posset effluere ubi effluxus velocitas, cum sit semper in ratione subduplicata altitudinis, esset omnino illa, quæ per altitudinem omnem libere decidendo conciperetur. Et quidem major aquæ effluentis quantitas habebatur ubi foramen in crassiore lamina inculptum erat: major ubi exterius tubus aliquis datæ longitudinis aptaretur, ultra quem limitem effluxus contrario ordine imminuebatur: major adhuc si interior ad modum infundibuli tubus alius adjiceretur: major si interior tubus pyramidalis esset, aut conicus, quam si cylindricus, aut prismaticus: maxima vero si cycloidale infundibulum aptaretur, quæ singularis est Cl. Michelotti observatio,

PHÆNOMENON III.

Newtonus in Propof. XXXVI. Lib. II. Princip. observavit venas fluidorum ex aperto quovis vasis foramine erumpentium paulo infra foramen contrahi, contractionisque rationem eam attulit, quod non omnes fluidi particulæ perpendiculariter vasis foramen subeant, sed e lateribus undique confluentes, convergentesque ferantur obliquis motibus, & cursum deorsum flectentes in venam ipsam conspiciunt.

Ut

Ut contractionem omnem definiret Newtonus paravit laminam planam pertenuem in medio perforatam, & foraminis diametrum statuit partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis perpendiculari lapsu, & acceleratione redderetur angustior, lateri vasis effixit laminam, ut aquæ effluxus inciperet secundum lineam horizonti parallelam. Effluxu autem incepto, ad distantiam quasi dimidii digiti a foramine deprehendit venæ diametrum ad foraminis diametrum se habere ut 21 : 25. Unde cum eadem aquæ quantitas eo celerius moveri debeat, quo per angustius spatium pertransit, cumque areæ ciculares sint inter se ut quadrata diametrorum, velocitas aquæ per sectionem venæ contractæ, & per foramen transeuntis inter se erunt ut 625 : 441, vel proxime ut $1\frac{2}{3} : 1$, sive ut 7 : 5, vel etiam ut radix binarii numeri ad unitatem.

Daniel Bernoullius Part. VII. Sect. IV. Hydrodynamicæ institutis aliis experimentis rationem illam diametrorum venæ contractæ, & foraminis satis accuratam esse deprehendit ubi exiguum foramen, & vas satis amplum esset, eademque maneret fluidi in vase prementis altitudo quo tempore experimenta instituebantur. Experimenta etiam, quæ ad præcedens aliud phænomenon retulimus, rationem eandem 5:7 exhiberent in minoribus foraminibus, in amplioribus 5:8. Quod si igitur ob directionum obliquitatem consideremus fluida non ultimo quidem, ac libere ex illo foramine effluere, quod in vasis fundo aperitur, & in quo obliqui particularum singularum motus se impediunt, sed ex ipsa venæ contractæ sectione, pro vera foraminis area accipiendo $\frac{1}{2}$, aut $\frac{1}{3}$ partes illius areæ, quæ in experimentis Phænomeni secundi supputata est, & rationem quantitatum fluidi æquali tempore exeuntis illam habebimus, quæ est subduplicata altitudinis, & eandem simul habebimus quantitatem absolutam, quæ velocitati libero lapsu per integram altitudinem conceptæ responderet. Insuper si velocitates fluidi in sectione venæ contractæ, & in ipso foramine sint inter se ut 1 : $\frac{1}{\sqrt{2}}$, atque in sectione venæ ea sit velocitas, quæ per

integram altitudinem cadendo acquiri posset, ea tantum erit foraminis velocitas, quæ per dimidiam altitudinem cadendo posset acquiri.

New-

Newtonus etiam citato in loco animadvertit quod si in fundo vasis cylindrici aperiatur foramen aliquod, & aqua effluere incipiat, non omnis quidem aqua in vase *FXZC*, fig. 112., agitati potest, sed e lateribus *DCZ*, *EFX* quiescere, in medio autem ad modum infundibuli debet descendere, & cataraſtam veluti *FEDC* supra foramen *EF* efficere. Cataraſtam autem ſimiliter poſſe exhiberi cenſuit ſi cylindrus glaciei *PFCE* uniformi cum motu perpetuo descenderet, & partes ejus liqueſcerent quam primum attingunt ſuperficiem *FC*, & in aquam converſæ deſuant. Ita particulas omnes in loco quovis conſideravit tanquam ſi vere ex tota altitudine vasis deſluerint: & cum ob fluidi continuitatem eadem aquæ quantitas per ſeſiones omnes *FC*, *BA* tranſire debeat, ſint autem ſeſiones circulares ut quadrata diametrorum, velocitates vero ſint ut radices altitudinum, conſtantem eſſe cenſuit quantitatem $HA \cdot HT^{\frac{1}{2}}$, & quantitatem pariter $HA \cdot HT$: quo jam curva *DAC* hyperbolicæ eſſet generis. At præter quam quod alius videtur caſus fluidi *FEDC* in libero aere deſcendentis, & in vase *FXZC* moti, nec linea aliqua *CAD* eſſe poſſit limes, ac terminus fluidi omnino quieſcentis *CDZ*, & data velocitate moti inter *CAD*, & *FBE*; accedit Danielis Bernoullii experimento compertum eſſe particulas ceræ hispanicæ admixtas aquæ, aperto foramine, verticaliter fere ad fundum vasis deſcendere, nec niſi prope fundum per curvas ſenſim, obliquasque lineas inſecti ad foramen ipſum, & nullam omnino Newtonianæ cataraſtæ ſpeciem exhibere. Licet igitur ſummæ elegantia, & ingenioſa ſint quæ Newtonus citato in loco, & Newtoni veſtigiiſ inſiſtens adjecerat Mac-Laurinus, hypothetica potius quam phænomenis fluidorum e vasis effluentium conſentanea videntur eſſe.

Recte etiam Dom. d'Alembert in ſuo de Fluidis tractatu animadvertit quæ circa motum fluidorum ex apertis foraminibus effluentium tradi ſolent binis hypotheſibus inniti omnia, quod excitato motu ſtrata fluidorum in vase quolibet deſcendentium inter ſe parallela ſint, eandemque velocitatem ſervent in punctis ſingulis, cum potius in ſuperiore parte gurgitem veluti efforment. His alias etiam hypotheſes addiderunt authores alii: Varignonius, Hermannus, Grandus quod eadem in fluido quieſcente, & utcumque moto ſit preſſio Daniel

Mechanica.

li

Ber.

Bernoullius quod in fluidis e vase erumpentibus, æque ac in solidis libere decidentibus, centrum gravitatis tantum descendat quantum converso fursum motu posset ascendere, quod principium Leibnitius conservationis virium vivarum appellabat, Hugenius vero æqualitatis inter descensum actualem corporum, & ascensum potentialem. Idcirco cum quæ ad fluidorum æquilibrium pertinent accurate possint demonstrari, quæ pertinent ad motum fluidorum non nisi hypothefibus perstricta, dubia, & incerta sunt. Ipse etiam Celeberrimus Eulerus, qui tomo XIV. Academiæ Petropolitanz theoriâ motus fluidorum ad sublimiorem analysin revocavit, generales quidem formulas exhibuit, quibus particulæ cujusvis motus pro data quavis virium acceleratricium lege, datisque singulis velocitaribus ad ternas coordinatas orthogonales relatis analytice definiretur, sed quæ revera sint leges ipsæ, ac velocitates minime determinavit, nec qui sit formularum usus ostendit, & §. LXXI. expresse monuit nihil in iis haberi quod applicari possit fluminibus. Tomo autem XV. cum fusius de motu fluidorum lineari egisset nullum pariter formularum usum, & applicationem exhibuit, & monuit etiam initio linearem motum non nisi in tubis infinite angustis haberi.

Ego cum universum considerem excitato motu particulas omnes fluidi velocitate, & pressione sua in se invicem agere, eamque quaquaversum propagare, omnia autem motus problemata tanto complicatiora sint quanto major est numerus corporum in se agentium, ac plures conditiones, atque elementa problematum; fluidorum motum veluti casum quemdam concipio infinitorum corporum in se agentium, qui cum nonnisi infinitis æquationibus accurate definiiri possint Geometriæ, atque Analyseos artem, ac vires superet. At etiam extra limites Mathematicæ certitudinis quam plura sunt, quæ licet omnino nequeat demonstrari, sunt tamen physice, aut moraliter certa. In corollariis Theor. XI. Lib. I. vidimus jam ad hanc physicam certitudinem reduci physicam gravitatis theoriâ, & leges ipsas liberi descensus corporum. Videbimus modo quam ratione ad eundem certitudinis gradum reduci possint generales leges fluidorum ex apertis vasis effluentium, aut in majoribus receptaculis libere decurrentium, atque inde practicas regulas eruemus, quæ licet non omnino accuratæ sint

sint, aquarum tamen erogationem, divisionemque non omnino incertam, ac dubiam iudicio vulgarium hominum, & consuetudini relinquant.

THEOREMA V.

Si fluidum effluat e vase constanter pleno, & pressio fluidi in vase contenti eodem semper modo exerceatur incepto primum, & continuato postmodum effluxu, velocitates particularum omnium erunt in ratione subduplicata altitudinum fluidi prementis.

Si vasa datam altitudinem singula, suffecto utcumque fluido quod affluit, servantur constanter plena, apertisque in fundo æqualibus foraminibus fluidum effluere incipiat; vis omnis, & quantitas motus fluidi primo exeuntis manifeste erit pressioni fluidi in vase superstitis, qua gignitur, proportionalis: & cum quantitas motus sit in ratione composita velocitatis, & quantitatis fluidi æquali tempore exeuntis, & fluidi quantitas proportionalis sit velocitati, pressio autem proportionalis sit altitudini fluidi alterius superincumbentis, erit initio motus quadratum velocitatis particularum omnium effluentium altitudini simplici proportionale. Quod si igitur cum gravitas continua sit, eodemque modo agat in corporibus quiescentibus, & motu utcumque continuato, intelligamus pressionem fluidi quiescentis, quæ ex gravitate oritur, eandem esse ac in fluido undique moto; effluxus velocitas erit semper in ratione subduplicata altitudinis.

COROLLARIA.

I. In ipso igitur motus initio manifestum videtur quod Varignonius in actis Parisiensibus anni 1703., Hermannus in Propos. XXXII. Lib. II. Phoronomiæ, Grandus in Propos. I. Lib. II. de motu aquarum universim assumpserant, quantitates motus esse ut eorundem cause genitrices, has causas esse pressiones fluidorum superincumbentium, pressiones vero proportionales esse altitudinibus. Si foramen exiguum sit, & quantitas aquæ effluentis præ illa, quæ in vase superest, possit omnino negligi, fluidum etiam in vase contentum spectari poterit tanquam quiescens, eadem adhuc incepti effluxus, & continuati erit ratio. At si foramen aliud quodcumque proponatur, non eadem fluidi in vase moti, ac quiescentis conditio fortasse videri poterit, & dubitari poterit fortasse num inferiores particule veloci-

tate sua preffionibus particularum superiorum quasi se subtrahant, & necessario hypothesis illa assumenda erit quod pressio, & gravitas in corporibus quiescentibus, ac motis eadem ratione semper exerceatur.

II. Eo igitur reducitur quæstio fluidorum effluentium, quo leges corporum libere decidentium a Galilæo deductæ fuerant, ut scilicet assumatur hypothesis simplicior quod pressio, & gravitas eadem semper ratione agant in corporibus quiescentibus, ac motis, videaturque num hujus hypotheseos consecutaria cum observatis naturæ phænomenis conveniant: tum enim naturæ legibus accensenda erit hypothesis. Jam vero si aperto orificio fistula, aut tubus recurvus adapteatur ut jactus verticaliter dirigatur, manente altitudine fluidi in vase prementis, constans est altitudo jactus: & si digito obturetur foramen, ultimo exeuntes guttulæ eandem habent guttularum præcedentium altitudinem: quod satis est ut pateat motu preffionem non immutari. Itaque certe jam statui potest velocitatem fluidi exeuntis semper esse in ratione subduplicata altitudinis, quæ etiam erit ratio quantitatis fluidi dato tempore exeuntis, omnino ut ferunt experimenta, quæ ad secundum phænomenon retulimus.

III. Universim vero quantitas fluidi exeuntis erit in simplici ratione temporis, & altitudinis subduplicata: & cum fluidorum pressio æqualiter ad partes omnes exerceatur, ut in Coroll. II. Theor. II. notatum est, perinde erit siue in fundo, siue e latere vasis aperiatur foramen: ac denique cum juxta Corollarium primum in vasis libere communicantibus pressio altitudini maximæ respondeat, si vas aliquod irregularem formam quamcumque habeat, aut plura simul componantur, quæ libere inter se communicent, pro exprimenda velocitatis ratione non nisi maximæ altitudinis radix accipienda erit. Quod igitur Daniel Bernoullius in exemplo Probl. I. Sect. VIII. Hydrodynamicæ, & D. Bossut in Prop. IX. Cap. I. Par. II. assumpserat velocitatem fluidorum ex uno in alterum vas per foramen infinite parvum transeuntium esse in ratione subduplicata altitudinis fluidi, qui cuique foramini proxime incumbit, non valet nisi foramina sint infinite parva, nec libera sit vasorum communicatio, & vasa tanquam sejuncta spectari possint, ut expresse etiam ab iisdem authoribus notatum est. Huc pertinet sequens problema.

PRO-

PROBLEMA VII.

Si verticales tubi DB , KG , fig. 113., traductio ab uno ad alterum horizontali tubo DC communicent inter se, & fluidum in priore tubo altitudinem DA constanter servet, in altero autem tubo KG aperiat foramen N ; invenire ad quam usque altitudinem NE fluidum supra foramen ipsum possit ascendere.

Quia effluxu incepto eadem fluidi quantitas, quæ ex horizontali tubo DC advenit, per apertum foramen transire debet, erunt velocitates reciproce proportionales sectionibus, & si horizontalis tubi sectio sit m , foraminis autem n , erit velocitatum ratio $n:m$. Jam vero in tubo DC motus omnis pendet ex differentia pressionum, quæ in erectis tubis, atque in adversas partes exercentur: & si in tubo KE fluidum usque ad GE assurgat, ducaturque horizontalis FC , velocitas fluidi per inferiorem tubum transeuntis erit in ratione subduplicata altitudinis FA . Ut pateat quæ fluidi ex foramine effluentis velocitas esse debeat, ducta horizontali alia NL , junctaque recta BG , intelligamus proponi vas $ADKEGB$, & superficiem fluidi prementis esse $ABGE$. Juxta Theor. II. pressio erit proportionalis altitudini LA , & juxta Theor. V. velocitas erit in ratione subduplicata altitudinis ejusdem. Cum igitur manifestum sit durescente, aut sublato etiam fluido intermedio $BMCG$ eandem adhuc pressionem in N esse oportere, velocitas fluidi ex foramine effluentis erit semper ut radix altitudinis LA . Itaque erit in tubo horizontali, atque in ipso foramine

velocitatum ratio $FA^{\frac{1}{2}} : LA^{\frac{1}{2}}$, eritque propterea
 $FA:LA = n^2:m^2$, & $LA:FL = m^2:m^2 - n^2$, sive erit
 $FL = NE = \left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right) \cdot LA$.

COROLLARIA.

I. Si sit m^2 major quam n^2 , & $\frac{n^2}{m^2}$ sit minor unitate, fluidum supra apertum foramen ad altitudinem illam subsidet, quæ altitudine maxima fluidi in vase prementis sit minor in ratione $m^2 - n^2 : m^2$. Si fiat $m^2 = n^2$, quæ fluidi quantitas ex horizontali tubo adveniet, ea ex foramine aperto effluet, neque altius supra illud assurgat. Si n major sit quam m ,

m^2

m , negativa fiet altitudo fluidi, & neque foramen omne ab effluente fluido replebitur. *Æque* autem valebunt singula ubicumque in tubo KE statuatur foramen N , nec continuato effluxu alia esse poterit velocitatis ratio, quam ob variam frictionem laterum horizontalis, & verticalis tubi, atque ob variam directionem motuum, quibus singulæ fluidi particule ad foraminis centrum confluant.

II. Si pressio omnis penderet ex altitudine fluidi proxime incumbentis foramini, & velocitas omnis esset in ratione subduplicata altitudinis tantum NE , esset etiam $NE:FA = m':n'$, & $NE:LA = m':m' + n'$, atque inde erueretur $NE = \frac{m'.LA}{m' + n'}$ quam mihi olim

æquationem problematis Massiliæ propositi amicus quidam communicaverat. In ea vero absurdum esse animadverti quod semper aliqua haberi debeat altitudo fluidi supra foramen utcumque amplius sectione tubi horizontalis, & utcumque e latere tubi ejusdem in K positi. Quæ cum absurdi species non amplius supersit si velocitas assumatur proportionalis radici altitudinis totius LA , altero exemplo ostendi velocitatem fluidorum ex apertis vasis effluentium esse in ratione altitudinis maximæ subduplicata.

THEOREMA VI.

Dato quod pressio exerceatur semper æqualiter in fluido quiescente, ac moto, & dato insuper quod directiones motus se invicem non turbent, velocitas fluidi ex aperto vasis foramine effluentis ea erit, quæ libere decidendo per totam altitudinem prementis fluidi acquiri posset.

Cum juxta antecedentem propositionem velocitas fluidi e vase exeuntis sit in ratione subduplicata altitudinis, ac sit proportionalis velocitati, quæ libere cadendo per totam vasis altitudinem acquiri posset; si aliquo in casu binæ hujusmodi velocitates inter se æquantur, eæ erunt etiam in casu alio quolibet sibi invicem æquales. Jam vero casus æqualium velocitatum, & quæ fluidum e vase erumpit, & quæ ex tota vasis altitudine decideret, manifeste habetur cum altitudo vasis est infinite parva, & fluidum e vase erumpendo vere ex altitudine ipsa dilabitur. Habetur pariter cum in vase constanter pleno quæ in axe jacent fluidi particule continuato effluxu a summo
ad

ad infimum stratum transeunt quin directionum obliquitate a particulis circumjacentibus accelerari, aut retardari in descensu possint. Id generatim etiam, ac directe ostendi potest. Nam si vis acceleratrix gravitatis vocetur g , & sit t tempus lapsus per totam altitudinem fluidi prementis, & v velocitas quæ lapsu eodem ob solam vim gravitatis acquiri posset, juxta priores motus notiones, ac formulas debet esse $gt = v$. Quod si insuper numerus particularum omnium foramini incumbentium sit n , & summa pressionum omnium ng , velocitas vero, quæ primum a particula quavis effluente acquiritur, vocetur V , cum infinitus numerus sit n , non alia erit expressio temporis infinite parvi quam $\frac{t}{n}$: cumque vis omnis acceleratrix in tempus

ducta æquetur semper velocitati, quæ eodem tempore acquiritur, erit $V = ng \cdot \frac{t}{n} = gt = v$. Itaque si in fluido primum quiescente,

ac deinde moto eadem semper sit pressio, neque aliqua velocitatis variatio inde oriatur, quod varis directiones motus se invicem afficiant; velocitas fluidi effluentis ea erit semper, quæ libere decidendo per totam prementis fluidi altitudinem posset acquiri.

COROLLARIA.

I. Ex hac ipsa demonstrandi ratione manifestum est velocitatem tempore infinite parvo acquisitam a particulis effluentibus finitam esse, quod scilicet infinitus sit numerus prementium particularum, & quantitas infinita per aliam infinite parvam multiplicata finitam quantitatem exhibeat. Ita cum omnis paradoxii species evanescat, patet etiam demonstrationem non nisi in binis hypothesebus procedere, quod pressio moti, & quiescentis fluidi sit eadem, quodque excitato motu ob directionum obliquitatem advenientium particularum velocitates per totum foraminis circuitum se invicem non afficiant: & cum prior hypothesi tanquam physice certæ spectari possit, non alia erit velocitatis ab indicata lege aberratio, quam quæ ex ipsa obliquitatum directione incepto, & continuato motu progignitur: ac denique cum impossibile sit varietates inde ortas ad calculum revocare, experimento determinandum supererit qua ratione velocitas omnis residua ob variam impressi motus directionem varietur. Vidimus autem rationem hujus-

hujusmodi constantem experimentis omnibus deprehendi, atque in minoribus foraminibus esse 7:5, seu proxime $\sqrt{2}:1$, in majoribus fere 8:5.

II. In eadem etiam hypothesi directionum parallelarum cum motus quantitas, ac vis strati e vase effluentis æquari debeat areæ foraminis ductæ in velocitatem, quæ libere decidendo ex tota vasis altitudine acquiri posset, cumque æquali motus quantitate, ac vi in adversam partem sili exitus omnis fluidi, & pressio, ac pondus fluidi totius in vase contenti sustineri debeat; vis strati effluentis æqualis erit ponderi cylindri qui aperto vasis foramini incumbit: ac denique cum vis fluidi in planam aliquam superficiem ad rectos angulos incurrentis æquiparari possit vi fluidi ex vase aliquo, atque ex foramine ejusdem amplitudinis, eadem cum velocitate, & parallelis directionibus effluentis; universim etiam vis ictus directi, ac perpendicularis æqualis erit ponderi cylindri fluidi, cujus basis superficiæ percussæ æquetur, altitudo autem sit illa, ex qua libere decidendo velocitas fluidi percurrentis acquiri posset.

III. Cum eadem fluidi effluentis velocitate, eodem tempore lapsus per totam vasis altitudinem, spatium duplæ altitudini æquale describi possit, quantitas fluidi eodem tempore effluentis ex vase constanter pleno æquabitur cylindro fluido, cujus basis sit ipsum vasis foramen, & altitudo sit dupla altitudo vasis. Newtonus in Coroll. II. Prop. XXXVI. Lib. II. Princip. huic quantitati motus æqualem esse censuit vim, qua totus fluidi motus generari potest, eandemque aucthores alii censuerunt esse vim fluidi in planam solidi corporis superficiem directe incurrentis, & resistentiam solidi corporis in fluido moti. Videtur autem vim ictus non toti quantitati motus fluidi dato tempore exilientis, sed vi exilientis strati comparandam esse, qua vi in contrariam partem impressa totus fluidi motus sili, & pondus fluidi in vase contenti sustineri possit. Experimenta, quæ a D. Krafft Petropoli instituta sunt, ac recensentur To. VIII. Academiæ, vim ictus minorem exhibent, quam quæ duplæ eidem altitudini respondet: experimenta autem alia anno 1775. Lutetiæ a D. D. Alembert, Condorcet, Bossut diligentissime instituta exhibent vim ictus proxime æqualem ponderi cylindri fluidi, cujus basis superficiæ percussæ æquetur,

tur; & altitudo ea sit per quam icus velocitas acquiri possit?

PROBLEMA VIII.

Idem positis, & dato insuper quod velocitates in singulis paralleli cujusvis strati particulis sint amplitudini strati reciproce proportionales, velocitatem particularum effluentium determinare.

Sit altitudo fluidi $HO = x$, $Hh = dx$, fig. 114., & sit vis gravitatis acceleratrix g , elementum temporis dt , velocitas autem cujuslibet strati $BAab$ vocetur v , atque elemento eodem temporisaugeatur quantitate dv . Ob solam vim gravitatis g elemento temporis dt esset incrementum velocitatis gdt , & velocitas omnis $v + gdt$, vel etiam $v + gdt + dv$: cumque stratorum aliorum omnium actione velocitas strati $BAab$ fiat $v + dv$, debebit esse $gdt - dv = 0$, atque ob $dt = \frac{gdx}{v}$ erit $\frac{gdx}{v} = dv$, atque in tota altitudine HO ,

erit $\int \frac{gdx}{v} = \int \frac{dv}{v} \cdot dx$. At si sit insuper y area sectionis BA , n area

foraminis ED , & u velocitas, quæ in foramine ipso habetur, in hypothesis assumpta debebit esse $v = \frac{nu}{y}$, & $dv = \frac{nydu - nudy}{y^2}$,

atque his factis substitutionibus erit problematis æquatio

$$\int \frac{gydx}{nu} = \int \frac{nS \cdot du \cdot dx}{y} - \int \frac{n \cdot S \cdot udy \cdot dx}{y^2}$$

cumque ob continuitatem fluidi eadem fluidi quantitas eodem tempore per stratum quodvis transire debeat, & quantitas ydx pro constante assumi possit, ac pariter cum velocitas omnis u , & velocitatis elementum du in foramine ED relate ad stratum quodcumque $BAab$ sit eadem; his etiam quantitatibus habitis pro constantibus æquatio hac alia ratione disponi poterit

$$\int \frac{gydx}{nu} \cdot S \cdot dx = \int \frac{ndu \cdot S \cdot dx}{y} - \int \frac{nuydx \cdot S \cdot dy}{y^2}$$

Cum igitur juxta elementa differentialis calculi sit

$$S \cdot \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2y} + C, \text{ \& hæc quantitas debeat evanescere cum in}$$

ipso foramine sit $y = n$, erit

$$\int \frac{gx \cdot ydx}{nu} = \int \frac{ndu \cdot S \cdot dx}{y} - nuydx \cdot \left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{2n^2} \right)$$

ac denique si summis per totam altitudinem TO acceptis area y designetur stratum superius FC , ordinatis terminis erit

$$2gx \cdot y dx = u \cdot y dx - n^2 u \cdot \frac{dx}{y} + 2n \cdot u du \cdot S \cdot \frac{dx}{y}, \text{ sive etiam}$$

$$2gx = u - \frac{n^2 u^2}{y^2} + \frac{2n^2 u du}{y dx} \cdot S \cdot \frac{dx}{y}.$$

COROLLARIA:

I. Qui species simul comparare volet æquationem antecedentem eam esse deprehendet, quam D. Alembert tradiderat in Probl. I., & IV. Par. II. de *Æquilibrio Fluidorum*. Generale autem Alembertii principium est quod si corporibus, aut particulis quibuslibet A, B, C &c. utcumque in se agentibus imprimantur motus a, b, c , &c., & motus a in binos alios a', a'' resolvatur, quorum a' in corpore A superfit, alter vero a'' actione aliorum corporum destruat, atque ita pariter sint b', c' &c. motus, qui in corporibus B, C &c. superfunt, b'', c'' &c. qui destruantur; systema omne corporum, aut particularum quarumlibet in se agentium impressis dumtaxat motibus a'', b'', c'' &c. manere deberet in æquilibrio. In casu nostro oportet ut stratum quodvis motibus $gdt - dv$ impressis maneat æquilibrio: ac propterea esse debet $S \cdot gdt \cdot dx = S \cdot dv \cdot dx$. Ita vero generale illud principium, ut fluidis in vase contentis applicari potest, in priores formulas accelerati motus resolvitur $gdt - dv = 0$, quæ habent locum si particulæ singulæ ob solam vim gravitatis singillatim in motum agerentur.

II. Posita vero hac alia æquatione $gdt = dv$, cum sit $dt = \frac{dx}{v}$,

erit etiam $gdx = vdv$, cumque in strato quovis indeterminato velocitas sit v , in foramine autem u , erit integrando

$$gx = \frac{v^2}{2} (u^2 - v^2) = \frac{v^2}{2} \left(u^2 - \frac{n^2 u^2}{y^2} \right); \text{ ac denique si sit } \frac{1}{2} \text{ alti-$$

tudo illa, ex qua libere decidendo velocitas eadem u acquiri possit, ac sit propterea $2gx = u^2$, fiet etiam reducis terminis $\frac{1}{2} =$

$$\frac{y^2 x}{y^2 - n^2} \cdot \text{Æquationem eandem Joannes Bernoullius in sua Hydraulica}$$

illico obtineat considerando, quod cum fluidum ex tota vasis amplitudine FC ad foramen ED transeundo gurgitem veluti $MBEDAN$ efformet, fig. 113., vi omni strati cujuslibet $BAab$ vis alia substitui poterit, quæ in strato superiore FC agat, atque in ratione eadem amplitudinis strati augeatur. Ita enim loco vis $BA.gdx$, quæ in strato BA agat, substitui poterit vis $FC.gdx$, quæ agat in strato FC , & summa virium omnium erit $FC.gx = FC.S.vdv$.

III. Si area n foraminis præ tota vasis amplitudine possit negligi, erit $\tau = x$, & velocitas fluidi effluentis ea erit, quæ libere decedendo per totam prementis fluidi altitudinem acquiri posset. Idipsum etiam colligitur ex præcedente alia æquatione $\tau gx = u^2 - \frac{n^2 u^2}{y^2}$

+ $\frac{2n^2 u du}{y dx} . S. \frac{dx}{y}$, si negligatur quantitas n^2 . Si τ vocetur adhuc

altitudo illa, ex qua velocitas fluidi effluentis acquiri possit, & sit ut antea $\tau g \tau = u^2$, & $g d\tau = u du$; hac alia æquatione generatim eructur $\tau = \frac{y^2 x - \frac{n^2 d\tau}{y} . S. \frac{dx}{y}}{y^2 - n^2}$ ac pariter si sit constans altitudo

τ , & sit $d\tau = 0$, & vas constanter plenum intelligatur, erit $\tau = \frac{y^2 x}{y^2 - n^2}$. Posito igitur quod velocitas in singulis strati ejusdem par-

ticulari sit eadem, & directiones parallelas habeat, altitudo velocitati fluidi effluentis debita major erit tota prementis fluidi altitudine in ratione $y^2 : y^2 - n^2$, nec nisi obliquitate directionum fiet, quod effluxus velocitas potius sit minor quam quæ toti altitudini vasis responderet.

PROBLEMA IX.

Positis omnibus quæ antea, & dato insuper quod gravitatis centrum totius fluidi, effluxu incepto tantum descendat quantum converso fursum motu libere posset ascendere, velocitatem effluxus determinare.

Sit ut antea altitudo fluidi $TO = x$, fig. 114., area strati superioris $FC = y$, atque aperto foramine ED fluidum omne continuum maneat, & sit eadem fluidi eodem tempore ex foramine ED , &

Kk 2

per

per stratum FC transeuntis quantitas $EDde = FCcf = ydx$. Sit etiam M massa fluidi $fcZX$, & b distantia centri gravitatis a basi ZX . Addito superius strato ydx , & momentorum summa per massarum summam divisa esset distantia centri gravitatis fluidi totius $FCZX$ a basi $ZX = \frac{b.M + x.ydx}{M + ydx} = b + \frac{xydx - bydx}{M}$ adjecto

autem inferius fluido $EDde$, distantia centri gravitatis massæ totius $fcZDdeEZ$ a strato fc simili modo erueretur

$\frac{x - b.M + x.ydx}{M + ydx} = x - b + \frac{bydx}{M}$, distantia vero ejusdem centri a basi ZX evaderet $b - \frac{bydx}{M}$. Itaque fluido $FCZX$ in

$fcZDdeEZ$ transeunte esset distantiarum hujusmodi differentia, sive descensus omnis centri gravitatis $\frac{xydx}{M}$.

Sit igitur altitudo illa, ad quam usque possent ascendere particule omnes strati alicujus propositi areæ m ea cum velocitate, quam dato tempore descendendo in vase concipiunt. Quia velocitates in sectionibus singulis sunt areis reciproce proportionales, altitudines autem ascensus sunt proportionales quadratis velocitatum; erit $\frac{m^2}{y^2}$ altitudo de-

bita velocitati strati alicujus indeterminati areæ y : & summa omnium altitudinum, ad quas simul particule omnes possent ascendere esset $\frac{S.m^2}{y^2} \cdot ydx$, sive $\frac{m^2}{y^2} \cdot S.\frac{dx}{y}$, atque ascensus centri gravitatis esset

$\frac{m^2}{M} \cdot S.\frac{dx}{y}$. Jam vero si continuato motu, auctaque velocitate, post

datum elementum temporis fieret $\dot{y} + d\dot{y}$ altitudo debita velocitati illius strati areæ m , esset $\frac{m^2}{M} \cdot S.\frac{dx}{\dot{y}}$ incrementum altitudinis, ad

quam centrum gravitatis posset ascendere. Continuato autem motu, & deficiente superius strato ydx , summæ ascensuum particularum omnium deficeret quantitas $\frac{m^2}{y^2} \cdot ydx$: & si area foraminis sit n , &

$\frac{m^2}{n^2}$ altitudo debita velocitati particulæ cujuscvis fluidi $EDde$, effluen-

te fluido summa altitudinum ascensus augetur quantitate $\frac{m^2 \int y dx}{n^2}$

atque esset incrementum ascensus centri gravitatis

$m^2 \int \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{y^2} \right) y dx$. Addendo igitur $\frac{m^2 d\int S \cdot dx}{M y}$, summam

que ascensuum exæquando quantitati descensus $\frac{xy dx}{M}$ haberetur

$$\text{æquatio } xy dx = \frac{m^2 \int y dx}{n^2} - \frac{m^2 \int \frac{dx}{y}}{y} + \frac{m^2 d\int S \cdot dx}{y}.$$

COROLLARIUM.

Si velocitas particularum e foramine *ED* effluentium ut antea vocetur *u*, & sit propterea $\frac{nu}{m}$ velocitas indeterminati illius strati

areæ *m*, fiet $2g\int = \frac{n^2 u^2}{m^2}$, & $gd\int = \frac{n^2 u du}{m^2}$, ac factis hisce substi-

tutionibus eadem quæ antea erueretur æquatio

$$2gx = u^2 - \frac{n^2 u^2}{y^2} + \frac{2n^2 u du}{y dx} \cdot S \cdot \frac{dx}{y}.$$

Ingeniosam hanc methodum descensus centri gravitatis exæquandi altitudini ascensus, ut vocabat ipse, potentialis ad determinandam velocitatem fluidorum e vase erumpentium adhibuit primum Daniel Bernoullius, & fundamentale Hydrodynamicæ universæ principium statuit. Singulare est autem æquationes easdem & Danielis, & Joannis Bernoullii, & Alembertii principiis analyticis prodire, & velocitates fluidorum prodire semper radicibus altitudinum proportionales, quemadmodum ex physicis aliis principiis collegimus. Quibus omnibus cum satis pateat qua lege fluida ex apertis vasorum foraminibus erumpant, videndum supererit in hoc capite quæ aliæ in machinis præcipuis leges ascensus, velocitatisque esse debeant.

PROBLEMA X.

Si cylindro *XBCY*, fig. 115., æqualibus semper angulis circumvolvatur spira *DHIVU* interius excavata, revolvaturque cylindrus ex *H* in *D* circa axem *OZ*, invenire qua axis, & bafcos *CDB* ad horizontem inclinatione, & quo spiræ tractu aqua ex orificio *D* ingressa descendere, & ad inferius cylindri latus *HB* possit se se recipere.

Sit

DE MOTU FLUIDORUM

Sit BDH angulus, quem spiræ, aut cochleæ arcus quicumque DEH cum basi CDB , & cum circulis aliis parallele ad basim ductis efficit, & sit CBA angulus, quem basis, & ZMB quem axis ad horizontem BM efficit. Manifestum est quod si arcus DEH aliquantulum inclinetur ad horizontem, & usque ad orificium D infra aquæ superficiem demergatur, aqua interius implebitur usque ad punctum æque altum K , & continuata cochleæ revolutione eadem aquæ quantitas circa inferius cylindri latus XB se se recipiet, ac successive transeundo in arcus alios KI , IV , &c., atque a basi recedendo semper, supra horizontem feretur altius. Sit in fig. 117. $FNEG$ circulus parallele ad basim sectus, & parallele sint diametri CB , FG , ac tangens EP ad circulum in puncto quovis E ducta cum diametro FG concurrat in puncto P , quæque ad exiguum cochleæ arcum Ee , qui ex E incipit, tangens alia EeR ducitur, cum linea horizontali, quæ per P transit concurrat in puncto R . His positis manifestum est insuper quod si angulus PER , quem binæ tangentes PE , RE , seu quem exiguus circuli arcus cum exiguo arcu spiræ Ee efficit in puncto E , minor fuerit angulo EPQ , quo idem circularis arcus inclinatur ad horizontem, aqua in plano inclinato Ee descendet, & limes descensus in E habebitur cum binis angulis æquatis recta ER fiet horizonti parallela. Sit m sinus, &

$\frac{m}{\sqrt{(1-m^2)}}$
tangens anguli PER , quem exigui iidem arcus circuli, & spiræ simul efficiunt, seu quo spiræ cylindro circumvolvitur; ac sit n sinus, & $\frac{n}{\sqrt{(1-n^2)}}$ tangens anguli FPQ , quo sectionis diameter FG ,

& sectio ipsa FEG inclinatur ad horizontem, junctaque OR , & ad diametrum FG , ex E ducta perpendiculari LE , fiat

$OE = 1$, $OL = x$, $EL = \sqrt{(1-x^2)}$. Erit LE horizonti parallela, eritque $\sqrt{(1-n^2)}$ ad n ut PL ad rectam, quæ in puncto L perpendiculariter ad planum FEG , & usque ad horizontale planum per P ductum erigitur: huic autem perpendiculari æqualis erit EQ , quæ perpendiculariter ad planum idem FEG , & usque ad concursum ejusdem plani horizontalis ducitur. Erit itaque $EQ = \frac{n \cdot PL}{\sqrt{(1-n^2)}}$

eaque

eaque cum sit etiam perpendicularis plano PEO , & in plano ERP jaceat, ad punctum P subtendet angulum EPQ cujus tangens erit $\frac{EQ}{PE}$

$$= \frac{n \cdot PL}{\sqrt{(1-n^2)} \cdot PE} = \& \text{ cum denique ob similia triangula } OLE, PLE$$

esse debeat $\frac{PL}{PE} = \frac{LE}{OE} = \sqrt{(1-x^2)}$, fiet etiam tangens hujus-

modi $\frac{n \sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-n^2)}}$, atque in ipso descensus limite exæquata tan-

gente $\frac{m}{\sqrt{(1-m^2)}}$ fiet $\sqrt{(1-x^2)} = \frac{m \sqrt{(1-n^2)}}{n \sqrt{(1-m^2)}}$, atque inde

$$\text{eruetur } x = \frac{\pm \sqrt{(n^2 - m^2)}}{n \sqrt{(1 - m^2)}}.$$

COROLLARIA.

I. Primo igitur si circulus FEG in ipsa cylindri basi accipiat, erit $\frac{2m \sqrt{(1-n^2)}}{n \sqrt{(1-m^2)}}$ chorda omnis zEL , qua basis submergi debebit

infra aquæ superficiem ut aqua in cochleæ orificium ingredi, atque in priore arcu possit descendere, neque omnino chorda evanescere, atque ad aquæ descensum tota basis infra aquæ superficiem submergi poterit, nisi sit $m=0$, quo in casu spira non nisi circularis baseos peripheriæ circumvolveretur, aut nisi sit $\sqrt{(1-n^2)}=0$, & $n=1$, quo in casu basis verticalis esset, & cum basi cylindrus omnis in aqua submergeretur. Ita vero cum aliqua baseos pars supra aquam extare debeat, orificium alternis vicibus & aquæ, & aeri patebit, & continuato motu arcus aere, & aqua pleni per totam cochleæ longitudinem sibi invicem succedent, & jactus ex superiore parte non erit continuus. Authores alii quod neque basis infra aquam demergi, neque aqua omnino debeat repleti cochlea ex eo colligunt quod aer exterior divisionem aquearum particularum, ac descensum in inclinatis cochleæ lateribus, motumque omnem impediret. Id vero ex præcedente formula colligitur manifestissime.

II. In æquatione alia $x = \frac{\pm \sqrt{(n^2 - m^2)}}{n \sqrt{(1 - m^2)}}$ duplicato signo

duplex casus habebitur abscissæ OL , & ordinatæ circuli zEL , quæ de-

descensus limitem definit, citra, & ultra centrum ex æquo acceptum; & posito $n = m$ fiet $x = 0$, & unicus casus habebitur diametri parallele ad horizontem, & perpendiculariter ad FG ductæ: posito autem $m > n$, cum scilicet angulus spiræ ad basim major erit angulo basis ad horizontem, imaginaria erit quantitas $\sqrt{(n^2 - m^2)}$; & nullus amplius problemati erit locus. Has ipsas formulas, quas modo ex solis Geometriæ principiis eduximus, differentialis calculi subsidio exhibuit Daniel Bernoullius Sect. IX. Hydrodynamicæ: hæc vero sufficiunt ut recte perspiciatur quibus conditionibus, & quam ob causam in Archimedis cochlea descendendo aqua ascendat, atque inventi nobilissimi pateat ratio. Fusius de hoc ipso argumento egerunt Eulerus To. V. Novorum Commentariorum Academiæ Petropolitane, & Hennert in dissertatione quæ ab Academia Berolinensi præmium obtinuit.

III. Si fiat $m = \sqrt{(1 - n^2)}$ & semirectus statuatur angulus quem spira ad basim efficit, ac sit insuper $\frac{\sqrt{(1 - n^2)}}{n} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

quæ apud Vitruvium cochleæ constructio erat, angulus BCA , cujus hæc sit tangens, prodibit $36^\circ 52'$, angulus vero CBA , quo cochleæ basis inclinatur ad horizontem, erit $53^\circ 8'$: erit etiam $EL = \frac{m\sqrt{(1 - n^2)}}{n\sqrt{(1 - n^2)}}$
 $= \frac{\sqrt{(1 - n^2)}}{n} = \frac{1}{2}$, qui cum sit sinus anguli $48^\circ 35'$, sinu ad superiorem partem accepto erit $97^\circ 10'$ arcus quo extra aquam basis extare poterit, $162^\circ 50'$ quo infra aquam demergetur. Quam anno 1756 Lugduni Batavorum constructam D. Hennert To. V. Elem. Matheseos §. 246. memoravit cochlea tribus helicibus intervallo arcus 120° a basi assurgentibus, & $11^\circ 55'$ ad basim inclinatis constabat, basis vero ad horizontem angulo 30° inclinabatur, cochleæ axis 60° , eratque longitudo cochleæ pedum Parisiensium $14\frac{1}{2}$, radius baseos pedum 2.91, & aquæ quantitas, quæ uno minuto primo inde habebatur, pedum cubicorum 273, multo major scilicet quam quæ amplioribus etiam antiis aspirantibus suppeditari soleat.

Data ratione diametri superioris, & inferioris, & data altitudine antliæ aspirantis determinare altitudinem, ad quam aqua interius singulis emboli tractionibus elevari potest.

Exhibeat fig. 118. aspirantem antliam TK , ut communiter apud nos solet constitui, & sit tubi inferioris AC , qui aspirationis dicitur; altitudo c , radius r , atque in superiore tubo CS sit radius R , & altitudo IT , per quam embolus F deprimitur, atque elevatur, vocetur a , ac fiat minima emboli a basi CB distantia $CI = b$, altitudo Ax , ad quam aqua in tubo inferiore elevata jam intelligitur $= x$, altitudo aquæ aV , quæ alia emboli tractione adjicitur $= y$. Posito radio ad peripheriam ut $1 : p$ erit cylindrus $IS = \frac{1}{p} pR^2 a$; $CH = \frac{1}{p} pR^2 . b$, $AB = \frac{1}{p} pR^2 . c - x$, $aP = \frac{1}{p} pR^2 . y$, & spatium, quod aere replebitur, embolo in IH posito, & aqua usque ad ak elevata erit $\frac{1}{p} pR^2 . b + \frac{1}{p} pR^2 c - x$, erit vero $\frac{1}{p} pR^2 . a + b + \frac{1}{p} pR^2 c - x - y$ spatium quod acri supererit aqua usque VP , & embolo usque ad TS elevato. Quod si igitur sit A altitudo aquæ, quæ æquilibrium cum atmosphæra omni constituit, $A - x$ vis interioris aeris dum aqua usque ad ak peringit, quia vires aeris sunt in ratione inversa voluminum, in novo emboli, & aquæ ascensu debebit esse $A - x : A - x - y = R^2 . a + b + r^2 . c - x - y : R^2 . b + r^2 . c - x$, aut si fiat $\frac{R^2}{r^2} = m$, extremis, ac mediis terminis in se ductis

$(A - x - y) (m . a + b + c - x - y) = (A - x)(mb + c - x)$
& cum primo aqua intra antliam ascendere incipit, posito $x = 0$, erit $A - y = A \left(\frac{mb + c}{m . a + b + c - y} \right)$, extractaque radice prodibit

$= \frac{1}{2} (A + c + m . a + b) \pm \frac{1}{2} \sqrt{((A + c + m . a + b)^2 - 4 A m a)}$
 $= \frac{1}{2} (A + c + m . a + b) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(A + c + 1mb . A + c - 1ma . A - c + m^2 . a + b^2)}$
Omisso igitur superiore signo, quo ascensus aquæ prodiret major altitudine tota A , & negativa radice accepta, quæ ad problematis casum pertinet, determinari poterit altitudo prioris ascensus y ; ac deinde hanc ipsam quantitatem scribendo loco x , ex prioræ æquatione cruetur altitudo alia y , ad quam altera tractione emboli ascen-

Mechanica.

L 1

det

det aqua, ac rursus scribendo $x + y$ loco x habebitur in tertia emboli tractione ascensus aquæ, & successive.

COROLLARIA.

I. Ex generali hac æquatione manifestum est quod cum in antliis nostris sit semper $2maA - c < A + c + m^2 \cdot a + b$, & valvula etiam ad aquæ superficiem AK translata, & posito $c = 0$, $m = 1$ sit semper $A + mA \cdot b - a + m^2 \cdot a + b$ quantitas positiva; radicali signo nunquam imaginaria quantitas exprimeretur, & aqua intra antliam prima tractione emboli semper ascender. Quod si inquiratur in qua antlia ad valvulam usque E una tractione emboli ascensus aquæ haberi possit, quam antliæ speciem Pitotus, & Parentius perfectam appellabant, posito $y = c$, fiet in priore æquatione $A = y - \frac{A(mb + y)}{ma + mb}$,

atque inde eruetur $y = \frac{maA}{A + ma + mb}$, & exæquatis utriusque tubi

diametris, ac posito $m = 1$ fiet $y = \frac{aA}{A + a + b}$. Si in generali nostra

æquatione fiat $m = 1$ peculiaris casus habebitur, quem Pitotus consideraverat in Actis Parisiensis Academiæ anni 1735. In posteriore autem hoc casu Pitotus æquationem exhibuit tantum $y = \frac{aA}{a + b}$ quod

elevato embolo non quidem aerem omnem KT , sed BT tantum per spatium BT expandi intellexerit.

II. Si valvula eadem E usque ad aquæ stagnantis superficiem AK translata, quod fieri quandoque solet in valvulis coriaceis, ut madafæ semper occludendo foramini, atque impediendo aquæ regressui inserviant, requiratur quo in casu, & qua posita diametrorum AK , CB ratione aqua ultra limites altitudinis y ferri nequit; cum descendente embolo aer interior ad eandem vim exterioris aeris comparari debeat, quæ æquivalet ponderi columnæ aquæ A , cumque elevato embolo, & aqua interior ad eandem altitudinem subsidente vis interioris aeris evadat $A \left(\frac{R^2 b + r^2 \cdot c - y}{R^2 \cdot a + b + r^2 \cdot c - y} \right)$, pro eodem casu debeat

esse

esse $A = y + A \left(\frac{mb + c - y}{m \cdot a + b + c - y} \right)$, atque inde eruetur

$y = \frac{1}{2}(c + m \cdot a + b) - \frac{1}{2}\sqrt{(c + m \cdot a + b)^2 - 4Ama}$, quæ est formula a D. Bossut tradita §. 126. Hydrodynamicæ, eaque si quantitatem imaginariam minime involvat, ac sit possibilis defectuosam antliam, & elevandæ aquæ imparem esse indicabit. Ut si sit $A = 32$, $c = 25$, $b = 0$, $a = 2$, $m = 4$, erit $25 + 8 > 4 \times 32 \times 8$ & realis erit æquatio, & aqua in antlia proposita ascendere nequaquam poterit: posito autem $m = 6$, & numeris aliis ut antea assumptis erit $25 + 12 < 4 \times 32 \times 12$, neque amplius eidem casui subsidentis aquæ erit locus.

III. Si valvula E tubo CK ad superiorem partem aptata, & supra valvulam ipsam aqua ad altitudinem $y - c$ jam elata intelligatur, inquiraturque quo in casu repetitis emboli tractionibus non possit altius assurgere; cum vis interioris aeris depresso embolo sit A , & embolo elevato $A \left(\frac{b + c - y}{a + b + c - y} \right)$, erit pro casu eodem æquatio

$A = y + A \left(\frac{b + c - y}{a + b + c - y} \right)$, atque inde eruetur æquatio alia

$y = \frac{1}{2}(a + b + c) - \frac{1}{2}\sqrt{(a + b + c)^2 - 4Aa}$, ut etiam ex corollario antecedente colligeretur si fieret $m = 1$. S sit $b + c = y$, & aquæ superficiem attingat embolus, sublato omni interiore aere incipiet aqua cum embolo simul ascendere, ac deinde eo descendente supra valvulam F feretur, & singulis emboli tractionibus erit volumen aquæ ascendentis TH : ut si embolus diametrum habeat unius pedis, & per altitudinem pariter pedis unius trahatur; quia cylindrus cubo inscriptus ad cubum ipsum se habet ut peripheria circuli ad quadruplam diametrum, sive ut 314 : 400, erit aquæ ascendentis quantitas partium $\frac{22}{7}$ pedis unius cubici. Quia vero dato aquæ volumine, & dati emboli ascendentis velocitate, eo velocius aqua ad ascensum impelli debet, quo area valvulæ, per quam transit, est angustior, vis quæ ad deprimentum embolum impendetur erit directè ut emboli velocitas, atque ut area illa reciproce.

APPENDIX.

DE MACHINIS HYDRAULICIS.

Cochleam ab Archimede, dum in Ægypto degeret, inventam; & ab Ægyptiis ad agros Deltæ insulæ e proximo flumine irrigandos feliciter fuisse adhibitam scripsit Diodorus Siculus Lib. I. Cap. IV., ac subdidit Lib. V. eam in Hispania quoque ad avertendas aquas e profundioribus metallorum fodinis exitui usum fuisse. Vitruvius Cap. XI. Lib. X. Architecturæ eam Cochleæ constructionem tradidit, quam in Corol. III. Probl. X. indicavimus, in qua scilicet semirectus erat spiræ ad basin angulus, atque in fig. 116. debebat esse $CA : BA = 3 : 4$. Alias Cochleæ constructiones proposuerunt authores alii, & quæ in Actis Parisiensis Academiæ anni 1736. a Pitoto tradita est eo redit, ut triangulum rectangulum ejus latus unum æquale sit longitudini cylindri propositi, basis vero sit ipsa cylindricæ basos peripheria in directum toties accepta quot spiræ in cochlea per omnem cylindri longitudinem numerari debent, cylindro proposito circumvolvatur, signeturque trames hypothenusæ in triangulo eodem ductæ: is enim erit trames, ac locus spirarum Cochleæ. Machinæ autem totius rationem physicam, ac theoriam, quam primo ex legibus motus derivare cœperat Daniel Bernoullius, amplissime evoluit Eulerus in Commentariis Petropolitane Academiæ.

Ego Archimedis Cochleam spectare soleo tanquam quod maxime ingeniosum Hydraulicæ inventum est: at vero ob minorem machinæ ejusdem usum satis hic esse duxi si quæ ad intelligendam phænomeni totius rationem, atque ad limires ascensus aquæ assignandos possunt sufficere breviter explicarem, ac Bernoullianum problema solis Geometriæ elementaris subsidiis resolverem. Cochlea enim non nisi pro aqua ad modicam altitudinem evehenda uti possemus: & si per majorem aliquam altitudinem cochleæ multiplicentur, & ita ad invicem neantur omnes ut quæ inferior est cochlea superiores omnes in motum agat, & aqua ex una in aliam transeat; ob ipsam partium compositionem fiet usus machinæ difficilior. In regionibus nostris ubi aquæ ex fossis, atque amnibus velocioris cursus educendæ, atque
ad

ad modicam altitudinem evehendæ sunt, rota capsulis ligneis instructa potius quam cochlea adhiberi solet: rota autem ad majorem altitudinem quam cochlea aquam comode elevari monuit Vitruvius citato in loco. Quæ a Bartholomæo Ferracino magni ingenii artifice prope Bassanum anno 1740. primum constructa, ac deinde anno 1748. resecta est machina tribus cochleis constabat, quæ septem rotarum ope Medoaci fluminis impetu in motum actæ erant omnes, & aqua ex una in aliam traducta ad altitudinem pedum Venerorum 35 irrigando prædio inserviebat. Ea vero omnis machina post Ferracini mortem fluminis impetu abrepta est, nullumque ipsius vestigium superesse, cum Bassanum Medoaci visendi causa venissem, a pluribus dictum accepi.

Utilissimum, ac præcipuum Hydraulicorum veterum inventum est triplex antliarum genus aspirantium, prementium, & compositarum, quas oculis exhibent figuræ 119., & 120., ut a recentioribus Hydraulicis ad commodiorem usum, simplicioremque, ac solidiorem constructionem deductæ sunt Belidorus To: II. Architecturæ Hydraulicæ quæ ad antliarum cujusque generis constructionem pertinent singula explicavit, & leges etiam ascensus aquæ analyticis formulis determinare aggressus est. At vero quæ ad praxim pertinent felicius a Belidoro explicari solent quam quæ ad physicam, & analyticam theoriam: & opificium quidem antliarum tam accurate, ac perspicue docuit author idem ut nihil habeam quod ad normam artificum hic addi debeat: theoriam vero ex quibusdam principiis derivavit, quæ erronea jam esse ostendit Pitotus in Actis Parisiensis Academiæ anni 1735., quæque cum recensere singula, ac refutare amplius non vacet, in suspensionem tamen tyronibus adducenda erant ne commendata jam practica operis illius parte principiorum Mechanicorum fallacia incaute deciperentur. Pitotus citato in loco, atque in Actis annorum 1739, & 1742, ac plures alii deinde auctores recte, ac copiose antliarum theoriam tradiderunt. Quæ in Probl. XI. habentur formulæ & generalem exhibent solutionem problematis, & peculiaribus aliis quæstionibus resolvendis sufficerent, quæ circa aspirantes antlias proponi possent, & satis indicant quibus in casibus, & qua lege aquæ in antliis hujusmodi ascensus pateat, & quæ ad optimam earundem constructionem præcipue spectent. Præstaret scilicet ut prior valvula supra aquæ superficiem emineat, & embolus usque
ad

ad valvulam ipsam pertingat, & altera superior valvula sit amplior quantum fuit solida emboli constructio, & impediendi regressus aquæ, & aeris conditio. Postremum hoc in antliis etiam prementibus, ac compositis locum habet, in quibus data aquæ quantitas dato tempore ultra valvulam *F*, fig. 118., tanto velocius impelli debet quanto angustior est valvula. Quod autem primo loco monitum est exigeret etiam ut valvulæ metallicæ coriaceis substituerentur. Id optime apud nos præstant artifices nonnulli, qui embolum, & antliam omnem sic ex metallo construunt ut neque ob majorem attritum sit motus emboli difficilior, neque ob communicationem aeris vis machinæ, & aquæ ascendens copia deficiat.

Hanc veterem Crebifii antliam ut ad hanc constructionis industriam, atque usum facilitatem, ac diuturnitatem recentiorum artificum studio deducta est, ego aliis omnibus ejusdem generis inventis præferre soleo, & vix aliud quidpiam ad aquam aeris vi elevandam posse inveniri censeo quod sit perfectius. Mihi autem Crebifii antlia præ aliis omnibus antliarum speciebus commendanda potissimum videretur esse: quod in illa quidem juxta axem emboli, ubi major est firmitas, & ubi æquales utrimque adjacent resistentiæ, applicetur vis omnis, atque ideo machina sit solidior: quod in illa etiam quæ supra embolum assurgit aqua singulis emboli tractionibus elevari debeat, quæ & inferior est vi aeris circumpositi, & valvularum ope sustineatur, cum ubi excusso verticaliter tubo supra inferiorem valvulam trahatur aqua, & excussione sæpius repetita cogatur altius ascendere, aqua omnis sustineri debeat: & quod denique in posteriore hac antliæ specie idem qui in machina funiculari incommodum habetur, ut scilicet majore celeritate ad elevandam aquam sit opus, cum in Crebifiana antlia utrumque incæpto, remisso, ac continuato motu, quacumque emboli velocitate hauriatur aqua. Quæ etiam maxima aquæ copia ad extinguenda incendia, ad agrorum irrigationem, ad potum urbium quandoque Crebifianis antliis suppeditatur, vetus illud inventum ubique gentium jam a bis mille annis receptum maxime commendat. In extinguendis autem incendiis, cum maxime intersit ut aquæ ad locum datum continuatus semper sit jactus, receptaculo quodam aeris intra antliam relicto provisum est, in quo cum aer pressione ejcctæ aquæ condensetur, aucta elasticitate defectui vis

EX.

exterioris supplet, ac subjectam aquam premendo aer ipse, aliquo saltem temporis intervallo, priorem jactus altitudinem invariabiliter servare potest. Hujus generis antlias, ut Londini adhiberi solent, ab artifice Newsham perfectas, simul quidem prementes, atque aspirantes, descripsit per partes singulas Defagulierius in Sect. XXII. Leç. XII. Physicæ experimentalis.

Præclarum hoc recentiorum artificum inventum est ut vi aeris constans ad locum datum aquarum jactus fervetur. Nobilissimum autem sæculi hujus inventum censei debet ea antliæ species, in qua embolus vaporum vi ex superficie ebullientis aquæ assurgentium in motum agitur: eaque ad maximam aquarum copiam e fodinis profundioribus, aliisque locis hauriendam apprime est utilis. Novæ huic antliæ excogitandæ occasionem præbuit celebre experimentum tormenti bellici tribus quadrantibus aqua pleni, quod subiecto igne, & aqua in vapores acta, præcluso exitu omni, maximo cum fragore disruptum est. Experimentum a se institutum retulit Worcestriæ Marchio in libello, quem anno 1663. in lucem edidit. Inde autem cum innotuisset vaporum vis, non nisi post annos plures, & gradatione quadam, ut in tot aliis inventis accidit, novum hujusmodi principium ad antliarum motum applicari cœpit. Nam qui omnium primi antlias vaporum vi in motum actas construere cœperunt Papin in Hassia, in Galliis Amontons, & in Anglia Savery, non adhuc artificum illud excogitaverant, quod alternum emboli ascensum, descensumque efficit expeditissimum, ocluso scilicet novis vaporibus aquæ ebullientis in vacuum antliæ cavitatem aditu, & prioribus vaporibus solutis aliquot aquæ frigidæ guttulis in cavitatem ipsam injectis. Id primo in antliis hujusmodi præstiterunt ingeniosi artifices Newcomen, & Cawley, & machinam perfectam undique, & quam fieri poterat usu facilem exhibuerunt. Utriusque antliæ Saverianæ, & Newcomenianæ descriptionem tradidit Defagulierius in Sect. XV. Leç. XII. Belidorus etiam, Musschenbroeckius, alique descriptiones alias protulerunt. In Dictionario autem Encyclopedico quæ ad antlias cujusque generis vaporum vi, aut pressione aeris in motum actas, quæ ad molendina aquarum fluentium, aut ventorum imperu circumvoluta, quæ ad præcipuas alias Hydraulicæ machinas pertinent accurate, & copiose adeo explicata sunt, ut ad usum artificum sufficiant. CA-

CAPUT QUARTUM.

DE VELOCITATE, ET MENSURA

AQUARUM FLUENTIUM.

PHÆNOMENA.

AD explorandam aquarum fluentium velocitatem penduli, & quadrantis usum diversimode Gulielmus, & Hermannus proposuerunt, cum ille quidem in Propos. IX. Lib. II. de mensura aquarum fluentium censuerit velocitatem aquæ proportionalem esse tangenti deviationis penduli a perpendiculari, hic vero in Propos. XII. Phoronomiæ demonstraverit velocitatem vere esse in ratione subduplicata tangentis ejusdem anguli. Ego cum pendulo, & quadrante ad explorandam velocitatum rationem aliquando voluissem uti, sensi quæ observationum accurate instituendarum sit difficultas, præcipue ubi aquæ incurrentis velocitas esset major: oritur vero difficultas omnis ex curvatura, & tremore fili, atque ex irregularibus quadrantis motibus. Difficultatem hujusmodi jam indicavit Zendrinus cum experimenta in in variis Padi sectionibus a se instituta recensuit Cap. V. Par. II. de legibus, & phænomenis aquarum. In binis etiam experimentorum tabulis, quas Zendrinus exhibuit §. XI. ejusdem capituli dubium videri posset num recte profunditates immersionum ipse observaverit, cum in priore tabula loco altitudinum verticalium incrementum longitudinis fili oblique positi acceperit, ex dato centro suspensi, & successive protracti, ut globus ligneus, in quo ad augendam gravitatem specificam interius plumbum allusum erat, ad varias profunditates in aqua demitti posset. Non prætereundum est tamen quod in minoribus penduli deviationibus a perpendiculari, cum deviationis angulus non erat nisi graduum 2, 5, 6, 15, 24, proxime eandem deprehendit Zendrinus rationem tangentium, & altitudinum aquæ superincumbentis addita exigua illa altitudine, quæ exiguæ velocitati superficiæ fluminis respondebat, ut ex secunda auctoritatis ejusdem tabula colligitur: quodque non nisi in majoribus penduli deviationibus;

cum

cum magis incertus, ac dubius videtur quadrantis usus, & major sit radii, ac tangentis differentia, deprehendit Zendrinus rationem velocitatis a ratione subduplicata altitudinis sensibilibiter aberrare.

Qui post Zendrinum experimenta hujus generis plurima instituit D. Michelottus cautelis omnibus adhibitis eandem adhuc, quæ ex continuis vibrationibus, atque ex curvatura fili, & ex succussione instrumenti totius oritur, difficultatem superesse monuit Cap. II. To. I. Experimentorum Hydraulicorum. Monuit etiam Michelottus quod si globi pondus sit majus, ob majorem fili tensionem, non amplius erit sensibilis differentia angulorum deviationis, quæ minoribus variationibus velocitatis gignitur: quodque si pondus globi exiguum sit, subulrima & velocioribus aquæ stratis, & irregulariter pendulum abripitur, adeoque in utroque casu quadrantis usus dubius est, atque incertus. Tubi recurvi, quem Pitotus proposuit in Aëtis Parisiensis Academiæ anni 1731., vix alius usus esse potest quam ad velocitatem in extrema superficie fluminis explorandam: manifestum est enim in alveis horizontalibus tubo ad quâcumque profunditatem demerso ad eandem superficiem fluminis libellam ascendere aquam, ac librari oportere, in alveis vero inclinatis ad horizontem non aliam esse posse ascensuum differentiam quam quæ vi, & velocitati superficiem extremæ respondet. Alii etiam ad explorandam velocitatem superficiei rota palmulis instructa usi sunt. In rota vero, quod quæ ex aqua emergant palmulæ aliquam semper aquæ portionem impellere, atque elevare debeant, sit quod in aqua demersæ palmulæ non eadem omnino aquæ velocitate, nec libere ferri possint: in tubo autem recurvo qui ob varias aquæ undulationes, ac laterum resistentias exiguis determinandæ altitudinis esset error, errorem non ita exiguum gigneret in absolute velocitatis determinatione. Ego in regularibus fluminum, & sossarum alveis ad determinandam velocitatem superficiei corporibus superinnatantibus, minoris quidem ponderis ne ad inferiora strata pertingerent, & minoris superficiem ne ob aeris resistentiam magis impedirentur, sic usus sum, ut repetito sæpius experimento, eoque ad minuta aliquot protracto nullam deprehenderem differentiam spatorum uno secundo temporis percursum.

Mathematici Bononienses cum anno 1721. Æmilie totius am-

Mechanica,

M m

pea

nes recognoscere, pro æstimanda aquarum fluentium velocitate oblongum vas protulerunt, in quo exiguum foramen tenui lamella obductum posset aquarum cursui objici, aperiri, claudi, & dato tempore aquas irruentes intus excipere. Et ne resistentia aeris in vase ipso residui irruentes aquæ retardarentur, longiore tubo prospectum erat, qui e vase usque ad extimam fluminis superficiem assurgebat, & in quo aeris e vase patebat exitus. In experimentis hujus generis instituendis quadam stabelli specie circa axem verticalem mobilis Eques Clarissimus de Borda, specie alia stabelli Cl. Ximenes usus est, atque hic quidem experimentorum institutorum exitum in opere nuper edito, ille autem in Actis Parisiensis Academix anni 1767 exposuit. De hujusmodi experimentis, quæ singularem obliqui ictus æstimandi rationem, & singulares potius resistentiæ casus respiciunt, singillatim in capite secundo libri subsequenti agendum erit. Hic cum nulla habeam quæ proferam a me instituta hujus generis experimenta, iis quibus experiendi otium fuerit suaderem ut in generalibus naturæ legibus, quæ adeo simplices sunt, explorandis simpliciore semper ratione, ac methodo uti velint. Nullum autem instrumentum simplicius proponi potest vase illo Hydrometrico Bononiensium: neque in aquis fluentibus alia esse potest simplicior methodus, quam quæ in aquis e vase effluentibus simplicior hætenus visa est, ut scilicet aquæ velocitas ex quantitate illa æstimetur, quæ dato tempore e vase effluit. Optarem igitur ut alii & perficiendo vasi, & experimentis aliis instituendis operam darent. Quæ a Mathematicis Bononiensibus in Pado, qui maximus nostrorum fluviorum est, atque in minore fossa, quæ Polesellæ habet nomen, instituta, ac sæpius iterata sunt experimenta, ut refert Grandus ad calcem prioris libri de motu aquarum, quantitatem aquæ dato tempore in vase exceptam, velocitatemque exhibuerunt proportionalem radici altitudinis aquæ alterius superincumbentis. Utique in hujusmodi experimentis singulare visum est Grando quod foramine in superficie fluminis constituto aqua omnis e vase excluderetur, quasi non alius esset motus superficiæ, quam qui ex adhæsione, & tenacitate inferiorum stratorum oritur, unde impedita inferiore aqua nec quæ per extimam superficiem defluit apertum vasis foramen subire posset. Id vero tenacitatis stratorum indicium est, & instrumen-

tum

tum potius commendat, cum illud ipsum experimento deprehensum sit, quod conjectando etiam assequi poterat.

Ad legem velocitatis ex generalibus aliis naturæ legibus, atque ex prioribus gravitatis, & pressionis notionibus colligendam considerandum in primis est quod cum quæ motibus fluidorum determinandis maxime idonea Newtono, Mac-Laurino, Alembertio, Joanni, & Danieli Bernoullio principia visa sunt, quæ priores, & generales notiones sunt gravitatis continue, & æqualiter semper agentis cum primum incipit, ac continuatur motus, eandem semper conclusionem exhibeant, eandem legem velocitatis proportionalis radici altitudinis fluidorum aperto vasis cujuslibet foramini incumbentium: quodque cum experimenta omnia in majoribus, ac minoribus vasis accuratissime instituta absolutam quidem velocitatem minorem exhibeant quam quæ cadendo ex tota superincumbentis fluidi altitudine acquiri posset, & defectus totius rationem eam esse indicent, quod pars aliqua velocitatis directionum obliquitate elidatur, velocitatem tamen residuam fluidi effluentis exhibeant semper radici altitudinis proportionalem; jam omnis analogiæ ratio postularet ut si laterali vasis foramine utcumque aucto horizontalis fluminis alveus loco vasis, & verticalis sectio foraminis loco habeatur, adhuc velocitas particularum aquæ libere fluentium censetur esse proportionalis radici altitudinis: & quia denique effluxu aquarum in alveo regulari, supra horizontalem fundum, & intra ripas parallelas habito nulla amplius est directionem obliquitas, qua aliqua velocitatis pars elidatur, censendum insuper effer velocitatem in strato quovis horizontali illam haberi, quæ libere decidendo ex tota superincumbentis, & prementis aquæ altitudine acquiri posset.

Ut hanc aperti vasis cujusvis, & liberi, ac regularis alvei analogiam oculis objiceret Gulielmus in Propos. I. Lib. III. de mensura aquarum fluentium, concepit horizontalem alveum secari plano verticali, aut aliquo impedimento occludi sectionem omnem, & effluxum aquæ impediri: quo dato aqua verticali plano adjacens ita planum ipsum urgeret ut patente exitu, & sublato impedimento posset priorem velocitatem fluxus recuperare: Concepit insuper Gulielmus in verticali plano plura insculpta esse lumina, ex quibus aqua effluat, iisque nova addi lumina, ut denique habeantur lumina numero infi-

Mm 2

nita,

nita, & tota sectio veluti unicum lumen efficiat ex infinitis luminibus compositum: cumque ex singulis luminibus eadem velocitate aqua debeat effluere, qua ex vase ad eandem altitudinem pleno erumperet, hæc vero eadem sit velocitas, qua, sublato impedimento plani verticalis, aqua in eodem loco sectionis fluere; statuit illis author eundem esse casum aquæ per horizontalem alveum fluentis, effluentisque ex vase ad eandem altitudinem constanter pleno, atque hæc posita lege velocitatis generales regulas tradidit, quibus aquarum fluentium quantitates comparari possent inter se. Easdem leges, eadem Gulielmini principia secuti sunt qui apud nos aliquam quantitatis aquæ mensuram, fluviorumque, ac fossarum comparisonem exhibere voluerunt Hydrometræ celebriores Eustachius, & Gabriel Manfredius, Guido Grandus, alique; qui vero dubia undique effundere voluerunt, & regulas omnes rejicere, quod citra directionum, stratorumque parallelorum hypothesen non possent regulæ accurate demonstrari, quodque alius videatur casus aquarum in majoribus alveis fluentium, & ex minoribus foraminibus erumpentium, alius foraminis alicujus e latere vasis insculpti, & foraminis toties aucti ut integram sectionem fluminis exhibeat; non aliam tamen legem velocitatis, nec regulas alias proposuerunt, quibus aquarum fluentium quantitates aliquo saltém modo comparari possent inter se. Videamus quæ alia ejusdem legis statuendæ, ac confirmandæ facilius fortasse, & magis perspicua sit ratio.

THEOREMA VII.

Si in alveo aliquo regulari ob superioris aquæ pressionem moveatur quæ inferior est, nec directionum obliquitate, & fundi, ac laterum resistentia conceptus motus turbetur, velocitatis ratio in particulis singulis alia esse non poterit quam quæ est subduplicata altitudinis aquæ totius superincumbentis.

Si supra horizontalem fundum, atque intra parallelas, ac verticales ripas undique affundi aquam, & ad eandem libellam componi undique intelligatur, ac primum patente exitu aqua moveri incipiat, quantitas motus in dato quolibet spatio generari proportionalis erit vi motrici, quæ est ipsa aquæ superincumbentis pressio, quæque est altitudini proportionalis: cumque ea motus quantitas sit ut

AU=

numerus; & velocitas particularum dato tempore per idem spatium transeuntium, numerus vero particularum sit velocitati proportionalis; in ipso motus initio altitudo aquæ manifeste erit in duplicata ratione velocitatis, & velocitas in subduplicata altitudinis ratione. Jam vero fluidorum pressio ex gravitate oritur, gravitas autem eodem modo agit & in corporibus quæ moveri incipiunt, & in iis quæ moveri pergunt, ut ex æquali corporum cadentium acceleratione, & ex constante altitudine jactus in fontibus salientibus, atque ex æquali quantitate fluidi dato tempore effluentis ex vase quolibet constantur pleno, ut supra notatum est, certe ac generaliter colligitur. Quod si igitur neque irregularitate alvei, & obliquis fundi, ac riparum repercussionibus directiones, & velocitates motus in particulis singulis varientur, neque ob adjectas resistentias aliqua motus concepti pars absumatur; motu etiam continuato velocitas in particulis singulis erit semper in subduplicata ratione altitudinis aquæ totius superincumbentis.

COROLLARIA.

I. Ad eundem igitur physicæ certitudinis gradum theorema hujusmodi deducitur, ad quem jam alia theoremata motus æqualiter accelerati in corporibus libere decidentibus, & velocitatis proportionalis radici altitudinis in fluidis e vase effluentibus deduci vidimus: quæ duo cum experimentis omnibus sint conformia, indicant plane vim gravitatis continue, & æqualiter in corporibus agere incepto, ac continuato motu: hoc autem dato eadem omnino in aquis e vase effluentibus, & libere fluentibus in alveo quovis horizontali, ac regulari velocitatis lex esse debet. Qui igitur generalem hanc legem aut falsam, aut dubiam, aut non satis adhuc experimentis confirmatam esse contendunt, ii debent animadvertere generalem legem corporum decidentium, fluidorumque e vase effluentium, & in regulari alveo fluentium ex ipsa vis continue notione colligi, nec solis Hydrometrici vasis, ac penduli experimentis, quæ superius retulimus, quæque addemus inferius de absoluta quantitate aquæ dato tempore per emissarium datæ amplitudinis effluentis, sed aliis etiam experimentis omnibus confirmari, quæ gravitatis actionem eandem semper esse indicant, & cum motus continuatur, & cum primum incipit.

II. Qui

II. Qui vero abstractum esse casum considerant fluminis intra verticales, & parallelas ripas, horizontali fundo, sublatis omnibus resistentiis decurrentis, quique singulares casus, & experimenta alia obiciunt velocitatis irregulariter audæ, aut procedendo a superficie fluminis ad fundum usque imminutæ, quod in primis Mariottus corporibus æquiponderantibus aquæ injectis se deprehendisse retulit in sermone secundo Par. II. de motu aquarum; iis memorandum in primis est mechanicas omnes æquilibrii, pressionis, motus doctrinas a generalibus, & abstractis considerationibus esse exordiendas, & in peculiaribus quibuscumque casibus esse adjiciendum quod peculiaribus aliis causis deberi intelligitur. Deinde monendum est generalem theorematum hujus casum in aquarum erogatione, & fossarum comparatione præcipuum apud nos esse, cum agrorum nostrorum fossæ, & emissaria rectangulas plerumque sectiones habeant, & vix aliquam habeant fundi declivitatem, & sæpe nullis riparum flexibus in directum excurrant longius. Quæ vero velocitatem in superficie maximam indicarent Mariotti observationes, cum in canali altitudinis trium pedum, satis declivi, & virgultis, atque obicibus aliis confuso, ut author idem expresse monuit, institutæ fuerint, nihil omnino exhibent quod nostrarum fossarum casibus sit analogum.

III. Denique si quis contenderet spectata fundi, ac laterum resistentia velocitatis legem prorsus diversam esse oportere, atque alia objiceret Mariotti experimenta, quæ in fontibus salientibus pro varietate diametrorum sensibilem aliquam exhibent jactuum differentiam, hunc ego monerem primo jactuum differentiam non nisi in minoribus foraminibus esse sensibilem, in quibus major est laterum ad sectiones foraminum proportio, ut in priorè antecedentis capitis phænomeno notatum est. Adderem deinde absolutæ magis quantitatis aquæ dato tempore affluentis mensuram, quam proportionem aquarum in comparandis fossis effluentium, de qua potissimum apud nos agitur, ob resistentiam fundi, & riparum variari posse: ac denique ut aliqua resistentiæ totius in comparandis fossis habeatur ratio illud ipsum proponerem, quod olim a Guidone Grando in Propos. XXXIV. Lib. II. de motu aquarum indicatum fuerat, ut scilicet aliquantulo angustior assumatur fossæ, aut canalis sectio, quæque intra omnes fundi, &

ri-

riparum prominentias consistat: in rota enim sectionis hujusmodi perimetro non alia supererit resistentia quam quæ est aquæ supra aliud stratum aquæ iisdem prominentiis interceptum decurrentis, eaque in comparandis fossis negligi omnino poterit.

THEOREMA VIII.

Iisdem positis quantitates aquæ dato tempore in alveis horizontalibus, & regularibus effluentis inter se erunt in ratione simplici latitudinis, atque in ratione subduplicata cubi altitudinis sectionis.

Si in fig. 121. sit altitudo fluminis BH , atque hoc axe, & vertice B describatur parabola BDG ; aquæ velocitas in puncto quocumque C proportionalis erit semiordinatæ CD , quæ est in ratione subduplicata abscissæ, & altitudinis BC , & si accipiatur altitudinis differentia Cc adeo exigua ut differentia velocitatis in C , & c possit negligi; quantitas aquæ ex Cc effluentis erit proportionalis rectangulo ex CD in Cc , sive etiam trapetio parabolico $CDdc$, summasque accipiendo quantitas aquæ effluentis sub tota altitudine BH proportionalis erit toti areæ $BGHI$: quæ cum exæquet duas tertias partes rectanguli circumscripti, cumque eadem columnarum omnium BH per totam alvei latitudinem sit ratio; quantitas aquæ per sectionem omnem dato tempore effluentis erit ut ipsa sectionis latitudo ducta in $\frac{1}{3} HG$. BH , sive in $\frac{1}{3} BH \cdot BH$, vel in $\frac{1}{3} BH^3$, adeoque erit in ratione simplici latitudinis, & in ratione subduplicata cubi altitudinis.

COROLLARIA.

I. Si aquæ ex altitudine BH effluentis quantitas $\frac{1}{3} BH \cdot HG$ per altitudinem BH dividatur, erit $\frac{1}{3} HG$ velocitas media, qua scilicet per totam altitudinem uniformiter continuata effluxus eadem quantitas haberetur, eaque ad velocitatem maximam in fundo H se habebit ut 2:3. Quod si igitur statuamus in loco C velocitatem veram æquari mediæ, cum sit $BC: BH = CD^2: HG^2$; & $CD: HG = 2:3$, erit $BC: BH = 4:9$, & locus velocitatis mediæ infra superficiem aquæ jacebit $\frac{1}{3}$ partibus totius altitudinis sectionis. Priora hæc theorematum jam antea tradidit Gulielmus Lib. III. de mensura aquarum fluentium: his autem Grandus in Propos. XXXVII. Lib. II. de motu aquarum adjecit tabulam semiordinatarum, arearumque parabolæ pro incrementis singulis abscissæ ad 1 usque ad 1800. supputatam, quam vocant tabu-

bulam parabolicam, quaque alii in comparandis aquarum quantitatibus uti solent. Quam ego supputandi rationem nostræ regionis modulis magis accommodatam censeam suo loco exponam.

II. De hac media velocitate tantum intelligenda erant theoremata, quæ in primo Hydraulicæ exordio indeterminate de velocitate fluminum proposuerat Castellius, quod quantitates aquæ dato tempore in diversis fluminibus effluentis sint in ratione composita velocitatis, & amplitudinis sectionum, sive etiam velocitatis, latitudinis, atque altitudinis: quodque in eodem flumine ad permanentem statum delato, ut quandoque accidit, cum eadem aquæ quantitas eodem tempore per singulas sectiones debeat effluere, secus aut intumesceret superius flumen si inferius minor aquæ copia elaboreretur quam quæ advenit, aut vice versa; velocitas in sectionibus singulis erit in ratione inversa amplitudinis, & altitudinem aut latitudinem; aut utramque simul augeri necesse erit ubi media sectionis velocitas fiat minor, aut vice versa. Hisce theorematibus Castellius priorum Hydrometriæ phenomenorum rationem attulit, quod flumina ad cataractæ alicujus fastigium, unde dilabi possint, aut ad maris ostium, qui est infimus aquarum locus, ex superiore fundo accedentia ad altitudinem tanto minorem omnia se se componant.

III. Paribus etiam latitudinibus duorum fluminum quadrata quantitatium aquæ erunt ut cubi altitudinum, & altitudines erunt ut radices cubæ eorum quadratorum: atque ita si flumen aliquod amne alio adjecto trigesima sui parte augeatur, & sint quantitates aquæ ante, & post confluum ut 30:31, quadrata 900, & 961, radices cubæ 9, 66, & 9, 81, altitudo omnis non nisi parte sexagesima quarta circiter augebitur. Hæc prior ratio est, cur multo magis quantitates aquæ quam altitudines confluum fluminum augeantur, cur summa sectionum omnium in singulis fluviis influentibus acceptarum longe sit major sectione solius fluminis recipientis, cur in majoribus fluminibus post fluminis alterius confluum altitudinis incrementum aliquando vix sit sensibile. Huc redit theorema aliud Castellii, quod si aliquod flumen in alveum fluminis alterius transeat, altitudo prioris fluminis ad altitudinem, sub qua in alveo alio se se recipiet, erit in ratione composita velocitatis, & latitudinis, qua utrobique defluet:
autem

autem simul confluentibus ea ratione altitudo, & velocitas media augebitur, qua modo statutum est.

THEOREMA IX.

Isdem positis quantitates aquæ æquali tempore effluentis ex foramine verticali, & rectangulo FH , fig. 122, cujus latus unum FL in eadem jaceat amplioris receptaculi superficie, ex circulo $ADBK$, atque ex triangulis GAH , FBL obverso apice inscriptis, & ex dimidio tantum posteriore triangulo ABL , inter se erunt ut numeri 5, 4, 3, 2, 1.

Cum posita $AB = FL = 1$, quantitas aquæ sub altitudine AB , & latitudine FL juxta præcedens theorema esse debeat $\frac{1}{2} AB \cdot FL = \frac{1}{2}$; si quadrato inscribatur circulus, ductisque semiordinatis inter se proximis CD , cd fiat $AC = x$, $CB = X$, $Cc = dx = -dX$, erit in C velocitas $\sqrt{x}$, & quantitas aquæ sub altitudine Cc , & latitudine cd effluentis erit $2\sqrt{x}\sqrt{(x-x^2)} \cdot dx = 2x\sqrt{1-x} \cdot dx = -2X\frac{1}{2} \cdot 1 - X \cdot dX = -2X\frac{1}{2}dX + 2X\frac{1}{2}dX$, summisque acceptis erit $\frac{1}{2}X\frac{1}{2} - \frac{1}{2}X\frac{1}{2}$ quantitas aquæ effluentis sub altitudine CB , & posito $X = 1$ erit $\frac{1}{2}$ quæ effluet ex toto circulo. Quia vero inscripto triangulo GAH est $CM = \frac{1}{2}x$, quantitas aquæ ex eodem triangulo effluentis erit ut summa omnium $x\frac{1}{2}dx$, quæ est $\frac{1}{2}x\frac{1}{2}$, & posito $x = 1$ fiet $\frac{1}{2}$; cumque æqualia triangula ABH , FGB , & LBH , AGB similiter sint posita, & eandem quantitatem aquæ suppedient, quæ ex triangulo FBL effluet erit differentia quantitatum ex quadrato, & triangulo GAH effluentium, adeoque erit $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, & dimidio minor erit quæ effluet ex triangulo ABL . Igitur quantitates aquæ dato tempore ex iis foraminibus effluentis inter se erunt ordine ut numeri $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, sive ut numeri 5, 4, 3, 2, 1.

COROLLARIA.

I. Si foramen circulare quantitate a infra aquæ superficiem sit positum, erit $\sqrt{x+a}$ velocitas in loco quocumque C , & quantitas aquæ effluentis ex tota circuli area erit ut summa omnium $2\sqrt{(x-x^2)}\sqrt{(x+a)} \cdot dx$, quæ quantitas non nisi per infinitas series exhiberi potest. Sed si quantitas a sit adeo exigua ut statui possit $\sqrt{x+a} = \sqrt{x} + \frac{a}{2\sqrt{x}}$, quantitas aquæ erit ut summa omnium

Mechanica.

No

28

$2\sqrt{x}\sqrt{(x-x^2)}dx + \sqrt{(1-x)}dx$: quorum terminorum, qui prior est, exhibet quantitatem aquæ effluentis ex circulo ad aquæ superficiem posito, atque est $\frac{1}{3}$: est autem terminus alter $\frac{2a(1-x)^{\frac{1}{2}}}{3}$

ac posito $x=0$ fit tantum $\frac{1}{3}a$. Igitur quantitates aquæ dato tempore effluentis ex circulo ad aquæ superficiem posito, ac deinde exigua quantitate a infra ipsam superficiem depresso inter se erunt ut 8:8 + 10a, & si circuli diameter assumatur unius pollicis, a unius lineæ, erit ratio quantitatum aquæ 48:53.

II. Cum ex foramine circulari diametri unius pollicis Parisiensis una linea infra superficiem stagnantis aquæ depresso uno minuto temporis effluant Parisienses *Pinte* 13 $\frac{1}{4}$, ut experimento accuratissime instituto retulit D. Bossut §. 353. Hydrodynamicæ, erunt 11. 849 aquæ mensuræ, quæ uno minuto effluere possent ex eodem circulo ad aquæ superficiem posito, & 14. 811, quæ ex circumscripto quadrato effluerent. Hoc autem dato supputari poterit quantitas aquæ minutis singulis effluentis ex foramine quovis reſtangulari altitudinis cujusque A , cujus latus superius B quantitate C a superficie stagnantis aquæ ex æquo distet. Erunt enim quantitates aquæ ex quadrato illo, atque ex reſtangolo proposito effluentis ut $1:B.(A+C\frac{1}{2}-C\frac{1}{2})$, quod ex theoremate antecedente facile colligitur. Ita si sit $B=5\frac{1}{2}$, $A=7\frac{1}{2}$, $C=3\frac{1}{2}$, erit ratio quantitatum aquæ 1:162, atque ex reſtangolo hujusmodi minutis singulis effluent aquæ mensuræ 2400 satis proxime.

III. Si proponatur foramen reſtangulare, quod apud nos in aquarum erogatione moduli loco est, latitudinis unciarum 3 brachii Mediolanensis, altitudinis unciarum 4, atque uncis 2 superius, inferius vero uncis sex infra superficiem stagnantis aquæ depresso, qui unciarum numeri sunt ordine pollicum Parisiensium $5\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, 11 quamproxime; uno minuto temporis ex foramine hujusmodi effluent Parisienses *Pinte* 2400, seu pedes cubici aquæ 66 $\frac{1}{2}$, quod est pondus librarum Parisiensium 4639. 287 majorum autem librarum Mediolanensium 3088. Continet enim pes cubicus Parisienses *Pinte* 36, atque est unus pes aquæ cubicus librarum Parisiensium 69. 59: Parisiensis libra est unciarum 16, Mediolanensis unciarum 28, & Parisiensis uncia ad Mediolanensem se habet ut 6:5.15 quam pro-

xime: adeoque libra Parisiensis, & Gallica se habet ad libram Mediolanensem ut $86:144\frac{1}{4}$. Jam vero 3088 aquæ libræ apud nos sunt *Brente* $32\frac{1}{2}$, quarum singulæ censentur esse librarum 96. Cum igitur uno minuto temporis ex eo modulo effluant *Brente* circiter 32, ut experimento diligenter instituto deprehendit Cl. de Regibus, qui apud nos Matheseos Professor est, alterum etiam experimentum habemus, quod jam statutam velocitatis legem mirifice confirmat.

PROBLEMA XII.

Determinare quantitatem aquæ dato tempore effluentis ex foramine triangulari, cujus unum latus sit horizonti parallelum, quodque infra stagnantis aquæ superficiem ad quamlibet profunditatem sit positum.

Proponatur triangulum *BEF*, fig. 123., cujus latus superius *EF* superficiæ *Az* stagnantis aquæ parallelum sit, ductaque ex vertice inferiore *B* in latus idem productum perpendiculo *BDA*, sit $DA=a$, $BD=b$, $FE=c$, $BC=x$, $Cc=dx$, & *MN*, quæ parallele ad *EF* ducitur, sit $=\frac{cx}{b}$. Quantitas aquæ ex *MN* effluentis erit ut

quantitas $\frac{c}{b} \sqrt{(a+b-x)} \cdot x dx$: cujus integrale indefinitum cum sit

$$\frac{2c}{5b} (a+b-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2c}{3b} (a+b) (a+b-x)^{\frac{3}{2}},$$

cumque posito $x=b$ fiat integrale hujusmodi

$$\frac{2c}{5b} \cdot a^{\frac{5}{2}} - \frac{2c}{3b} (a+b) \cdot a^{\frac{3}{2}} = -\frac{4c}{15b} \cdot a^{\frac{5}{2}} - \frac{2c}{3} \cdot a^{\frac{3}{2}},$$

cumque posito $x=0$ supersit $-\frac{4c}{15b} (a+b)^{\frac{5}{2}}$,

erit aquæ ex triangulo omni *BEF* effluentis quantitas

$$\frac{4c}{15b} (a+b)^{\frac{5}{2}} - \frac{2c}{3} (1 + \frac{2a}{5b}) \cdot a^{\frac{3}{2}}.$$

Si triangulum *BEF* apice *B* superius obverso proponatur, ut in fig. 124, posito $AB=a$, $BC=x$, & manentibus aliis denominationibus antecedentibus erit quantitas aquæ ex *MN* effluentis

$$\frac{c}{b} \sqrt{(a+x)} \cdot x dx, \text{ integrale indefinitum}$$

N n 2

2c

$$\frac{2c}{5b} (a + x)^{\frac{1}{2}} - \frac{2ac}{3b} (a + x)^{\frac{1}{2}}, \text{ \& completum integrale}$$

$$\frac{4c}{35b} \cdot a^{\frac{1}{2}} + \frac{2c}{5} \left(1 - \frac{2a}{3b} \right) (a + b)^{\frac{1}{2}}$$

COROLLARIUM.

Binis hifce formulis fimul acceptis determinari poterit aquę quantitas, quę dato tempore ex parellelogrammo quovis laterum *FE*, *EB* effluet, quęque effluet ex triangulo *FBH*, fig. 125., infra aquę superficiem utcumque pofito: dividitur enim parellelogrammum in duo triangula æqualia, & obverfe pofita, & fi in triangulo quovis *FBH* dueatur *FD* superficiiei aquę *Aa* parallela, priore formula aquę quantitas per inferius triangulum effluens, altera quę effluet ex triangulo fuperiore fupputari poterit. Cum igitur fluminis cujufque feftio in reftangula, parellelogrammata, & triangula refolvi poffit, quę apicem inferius, aut fuperius habeant obverfum; hæc etiam methodo fupputari poffet quantitas aquę per feftionem quamlibet horizontalis cujufque fluminis decurrentis: & cum denique in quovis flumine & regulares trunci, & feftiones ad reftanguli formam propius accedentes alieubi occurrant, iis feleftis ad normam Theor. VIII. facilior calculus, & qui ad comparandas quantitates aquę in cafu quovis propofito fufficere inftitui poterit.

PROBLEMA XIII.

Si aquę in alveo aliquo regulari, & inclinato ad horizontem defluant, data velocitate fupficieiei abfolutam aquarum quantitatem in feftione quolibet determinare.

Sit *m* fpatium illud, quod aquę particule in fupficie fluminis abfolvunt uno minuto fecundo temporis, quodque levioribus corporibus aquę injectis facile, & accurate determinari poteft, ut initio hujus capituli monuimus, & fit *x* fpatium per quod libere decidendo velocitatem illam gravia poffunt acquirere. Quia fpatium uno fecundo temporis libero lapfu abfolutum eft pedum Parifienfium 15. 1, & velocitate ulrimo acquifita pedes 30. 2 eodem tempore æquabiliter abfolvi poffent, ac funt velocitates lapfus in ratione altitudinis fubduplicata, erit etiam 30. 2 : *m* = √ 15. 1 : √ *x*, atque inde eruetur

$x = m$, & altitudo debita velocitati superficiiei habebitur quadra-

tum numeri pedum Parisiensium uno secundo temporis in superficie fluminis percursorum dividendo per $60\frac{1}{2}$. Sit altitudo hujusmodi AB , fig. 121., & sit altitudo sectionis propositæ BH ; & vertice A , axe AH , parametro $60\frac{1}{2}$, describatur parabola ASH , ducanturque semiordinatæ BF , CE , &c. Erit $BF = m$, & velocitas aque in B ea erit, qua ex vase altitudinis AB posset effluere, eaque cum ex inclinatione alvei ad horizontem oriatur, cumque aque omni in regulari alveo fluenti communis esse debeat, addita in loco quocumque C pressione columnæ BC , velocitas illa habebitur qua ex vase altitudinis AC aque effluerent, & spatium uno secundo temporis a particulis aque uniformiter absolutum erit CE . Igitur quantitas aque sub altitudine Cc effluentis erit CEc , summisque acceptis, quæ effluet sub altitudine BH , erit $BFSH = \frac{1}{2} AH.HS = \frac{1}{2} AB.BF$; & si fiat $AB = C$, $BH = A$, & latitudo sectionis rectangulæ vocetur B ob $HS = \sqrt{60.2 \times AH}$, & $BF = \sqrt{60.2 \times AB}$; erit quantitas aque per sectionem omnem uno secundo effluentis $\frac{1}{2} \times 60.2 \times B (A + C \frac{1}{2} - C \frac{1}{2})$.

COROLLARIA.

I. Si parabolæ describantur parametro, quæ sit pedum Parisiensium $60\frac{1}{2}$, semiordinatæ non rationem tantum velocitatum ut in Theor. VIII., & IX., sed absolutas etiam velocitates, & numerum pedum expriment, qui aque particulis ab uno secundo temporis absolvuntur. Aræ insuper parabolicæ expriment absolutas aque quantitates eodem tempore sub data altitudine sectionis effluentes: & cum aræ hujusmodi exæquent duas tertias partes rectanguli ex semiordinata in abscissam, semiordinata vero sit media proportionalis inter parametrum, & abscissam; si parameter illa vocetur p , quantitas aque uno secundo temporis effluentis ex rectangulo ad aque superficiem parallelo ut in Cor. II. Theor. IX. erit $\frac{1}{2} . p \frac{1}{2} B. (A + C \frac{1}{2} - C \frac{1}{2})$, & quæ effluet ex priore triangulo problematis antecedentis

$$\frac{4c}{15b} . p \frac{1}{2} (a+b) \frac{1}{2} - \frac{2c}{3} . p \frac{1}{2} (1 + \frac{2a}{5b}) . a \frac{1}{2}.$$

II. Si exempli loco proponatur Lavidium *Æmilie* amnis, cum veloci-

velocitas corporum supernatantium juxta Eustachii Manfredii observationes una hora censi possit trium milliarium Bononiensium, sive unciarum 180000 pedis Bononiensis, & uno secundo unciarum 50, cumque Parisienses pedes $60 \frac{1}{4}$ conficiant Bononienses uncias $635.714 \frac{1}{4}$ mensuris ad Bononiensem pedem reductis erit $p = 635.714$, & $p \frac{1}{4} = 25.213$, eritque altitudo debita velocitati superficiei $\frac{2500}{635.714}$

$= 3.9326 = C = a$. Tum etiam si seligatur ea annis sectio, quæ magis regularis videtur esse, quæque est altitudinis unciarum 118, atque ex rectangulo latitudinis unciarum 360, & ex binis triangulis rectangulis componitur, rectangulo utrimque adjacentibus, atque uncias 336 summa basium conficientibus; posito $B = 360$, $A = 118 = b$, $c = 336$; erit quantitas aquæ uno secundo temporis ex sectione illa effluentis unciarum cubicarum

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \times 360 \times 25.213 \left(121.9326 \frac{1}{4} - 3.9326 \frac{1}{4} \right) \\ & + \frac{4 \times 336 \times 25.213 \times 121.9326 \frac{1}{4}}{15 \times 118} \\ & - \frac{1}{4} \times 336 \times 25.213 \left(1 + \frac{2 \times 3.9326}{5 \times 118} \right) 3.9326 \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

feu denique unciarum cubicarum 10861038.

III. Pariter si in alio Æmilie amne Samodia ante Lavidii confluxum sectio illa assumatur, in qua die 15. Novembris anni 1761, cum in Lavidio amne altitudo illa habebatur pedum 9, & unciarum 10, deprehensa est altitudo pedum 18, sive unciarum 216, & latitudo rectanguli erat unciarum 396, & summa basium in binis triangulis rectangulis utrimque adjacentibus erat unciarum 650; quantitas aquæ secundis singulis effluentis eadem calculi serie erueatur unciarum cubicarum 34975666. Si post confluxum duorum amnium eadem adhuc censeatur velocitas superficiei, & sectio illa eligatur, in qua altitudo aquæ ea die ipsa erat unciarum 188, quæque, cum ad rectanguli formam propius accederet, censi poterat latitudinis medie unciarum 846; quantitas aquæ effluentis prodiret unciarum cubicarum 37707765, minor quam sit summa quantitatum aquæ in duobus amnibus ante confluxum sumptis. Rheni velocitas ad superficiem cum milliarium $3 \frac{1}{4}$, sive unciarum 210000 una hora, & uncia.

ciarum 58.333 uno secundo juxta Manfredii observationes assumi possit, & sit propterea altitudo velocitati illi debita unciarum 5.3526, si ante Samodiæ, amnis alterius, confluxum ea eligatur sectio quæ est latitudinis unciarum 1812, quæque die eadem 15 Novembris altitudinem aquæ habebat unciarum 198, cum proxime rectangula sit sectio, cumque quæ extra sectionem, & extra alveum aqua supererat, veluti stagnans spectari, atque in hoc calculo possit negligi, erit tota aquæ effluentis quantitas $\frac{1}{2} \times 1812 \times 25.213$ ($203.3526\frac{1}{2} - 5.3526\frac{1}{2}$) = 87943272: & post Samodiæ confluxum accepta sectione latitudinis mediæ pedum 198, atque altitudinis pedum 13, aquæ uno secundo effluentis quantitas prodiret tantum unciarum cubicarum 81357500: Sed de his rursus Æmilie amnibus, ac fluviis inferius agendum erit.

IV. In iis omnibus fluviis, atque amnibus, qui longiore tractu in directum regulariter excurrunt, in sectionibus iis omnibus quæ proxime ad rectangularem formam accedunt, cum directiones motus parallelæ sint, & eadem sectionis cujuslibet sit ratio, pro absoluta quantitate aquæ æstimanda, nulla etiam venæ contractæ, & directionum convergentium ratio habenda erit: quod idem valet de emissariis, & de fossis, in quibus educitæ aquæ alveo constanter pleno intra ripas parallelas defluunt, quæque non ita exiguæ sunt, & fundi, ac laterum resistentia præ tota sectionis area potest omnino negligi. At si alicubi emissaria ad formam foraminum accederent, quæ tenui laminæ, atque e latere valis insculpta, liberum aquæ exitum, ac cursum præbent; tunc venæ contractæ ratio erit habenda, & manentibus aliis antecedentibus denominationibus quantitas aquæ ex sectione rectangula effluentis uno minuto secundo temporis censenda erit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot p \cdot B \cdot (\sqrt{A+C} - C)$: scilicet non nisi partes $\frac{1}{2}$ quantitatis aquæ ut antea supputatæ debebunt accipi, quam in majoribus foraminibus imminutionem venæ contractæ jam esse diximus.

V. Ita vero cum absolute quantitatis calculus ex eo principio pendeat, quod in singulis aquæ particulis ea sit velocitas, quæ libere decidendo per totam aquæ prementis altitudinem acquiri possit; pro comparandis quantitativis aquæ in diversis alveis regulariter effluentis satis est quod aquæ velocitas, & quæ cadendo per altitudinem illam acquiri possit, sint invicem proportionales: principium autem hujusmo-

di

di ex prioribus gravitatis notionibus illico colligitur. Insuper ubi comparatio quantitatum aquæ apud nos institui solet, omnino exigua est fundi inclinatio, & altitudo velocitati superficiæ debita præ tota sectionum altitudine potest omnino negligi: in superioribus autem fluviorum nostrorum truncis, ubi velocitas ex fundi declivitate, & præcipiti lapsu aquarum pender, adeo irregulares sunt alvei, & adeo multiplices reflexiones, ut neque proxime quantitates aquæ inter se possint comparari. Itaque omisissis etiam binis hisce problematis posterioribus, theoremata antecedentia ad præcipuos regionum nostrarum usus sufficient, ut fusius etiam explicabimus cum de usitata apud nos aquarum erogatione singillatim agendum erit.

SCHOLION.

Cum prætereunda hoc in loco sint plura, quæ a diversis scriptoribus contra hos Hydraulicæ canones, contra veterem hanc Gulielmini, Manfredii, Grandi sententiam aliquot ab hinc annis vulgata sunt, & quæ jam e lectorum memoria exciderunt, commemorandum tamen, ac laudandum est eruditum opus anno 1765. a Cl. Lecchio Mediolani editum, cui titulus *Idrostatica esaminata ne' suoi principj*. In priore operis illius parte author aliis etiam Hydraulicæ operibus apud nos claris difficultates omnes recensuit, quæ Hermanni, Bernoullii, Alembertii, & Newtoni methodum pro determinanda velocitate fluidorum e vasis profluentium incertam adhuc, ac dubiam relinquunt, & difficultatibus omnibus recensitis desperandum de theoria omni esse censuit, ac deinde ad experimenta conversus, quæ tot jam hæc in re instituta sunt, concessit iis certo evinci velocitatem aquæ, quæ e vase effluit, esse in ratione subduplicata altitudinis, quæ in vase residua est. In altera vero operis illius parte quamvis iis ipsis Zendrinis experimentis, quæ initio hujus capituli memoravimus, accuratius ad calculum revocatis velocitatem aquarum fluentium in minoribus penduli deviationibus a perpendiculari adhuc parum recedere invenerit a ratione subduplicata altitudinis, ut apposita ad paginam 290 tabula ostendit, quamvis experimentis aliis in Brixienti fossa a se institutis velocitatem aquæ a superficie ad fundum usque per gradus auctam produisse retulerit pag. 373; gradibus tamen singulis minime supputatis, nec rursus facta altitudinis, & deviationis pen-

penduli comparatione, nec memoratis aliis Hydrometrici vasis experimentis negavit ullo unquam modo aquarum fluentium calculum ad parabolas deduci posse.

Dubia, & difficultates, quæ in velocitate fluidorum e vase aliquo erumpentium accurate supputanda occurrunt semper, eo redeunt quod gravitas censeatur agere semper æqualiter incepto primum, & continuato motu; quodque calculus omnis ab Authoribus jam memoratis institutus sit in hypothesi stratorum parallelorum, & æqualis velocitatis in particulis singulis cujuscvis strati, ut jam ab Alembertio monitum, atque in antecedente capite explicatum est. Initio etiam ejusdem capituli cum generaliter monuissem in problemate quovis motus fluidorum haberi casum particularum numero infinitarum in se invicem agentium, & nullis Algebrae subsidiis problemata hujus generis accurate resolvi posse; a Mathematicis ad Physicas rationes conversus æqualem illam actionem gravitatis in corporibus motis, ac quiescentibus exercitam ex phænomenis omnibus colligi animadverti, & ex æquali gravitatis actione colligi velocitatem aquarum fluentium, & in apertis vasorum foraminibus, & in liberis, ac regularibus fluminum abveis subduplicatam altitudinum aquæ prementis rationem sequi, atque aliquam haberi normam quantitatis aquæ æstimandæ, & fluminum inter se invicem comparandorum. Ac denique cum phænomena jam memoraverim, quæ hanc ipsam comparationis, & mensuræ rationem videntur confirmare, attente hic considerari vellem, quod si resistentiis quibuscumque, atque impedimentis extrinsecis spectatis similes in fluminibus, aut fossis aliis ad se invicem relatis mutationes inducerentur, eadem adhuc maneret relatio, quodque institutis ut antea calculis non nisi illa resistentiæ pars negligereetur qua mutationes dissimiles fierent, ac minus a veritate aberrarent calculi, & aliqua adhuc haberetur methodus præcipuarum hujus generis questionum resolvendarum, quibus non jam absoluta aquæ quantitas in alveo aliquo decurrentis quæritur, sed tantum fossæ unius ad alteram proportio.

CAPUT QUINTUM

DE RESISTENTIA FLUIDORUM.

PROBLEMA XIV.

SI aquæ in alveo aliquo regulariter fluenti planum aliquod datæ amplitudinis, & dato angulo ad directionem fluxus inclinatum obijciatur, primæ impulsiois vires determinare.

Sit planum propositum AC , fig. 126., & sit aquæ directio ED , ducaturque CB rectæ ED parallela, atque in ipsam ex A demittatur perpendicularis AB , ac sit insuper FD perpendicularis plano AC , & FE rectæ FD , atque FC pariter perpendicularis rectæ ED . Si quantitas aquæ incurrentis in planum AC , ubi normaliter ad directionem ED esset positum, exprimitur unitate, erit quantitas aquæ angulo EDC oblique incurrentis $\frac{AB}{AC}$, & si velocitas communis ex-

primatur pariter unitate, erit velocitas plano AC parallela $FE = \frac{CB}{ED} \frac{AC}{AC}$, & quantitas motus, qua parallele ad AC feretur aqua, erit $\frac{AB \cdot CB}{AC^2}$.

Erit etiam velocitas perpendicularis plano $\frac{FD}{ED} = \frac{AB}{AC}$, & quantitas motus perpendicularis $\frac{AB^2}{AC^2}$: ac denique cum vis FD portio tantum

GD in plano AC parallele ad ED possit imprimi; erit velocitas parallele ad ED a particulis singulis impressa

$\frac{FD}{ED} \cdot \frac{GD}{FD} = \frac{GD}{ED} = \frac{FD}{ED} = \frac{AB}{AC}$, & motus ab omnibus simul

particulis impressi quantitas $\frac{AB^2}{AC^2}$. Si longitudo, atque altitudo plani

augeatur, vel imminuatur, vis etiam, ac motus perpendicularis, ac paralleli quantitas variabitur in eadem ratione: & variata etiam velocitate, quia filamentum cuiusque vis est ut numerus particularum dato tempore superficiem datæ occurrentium, atque ut velocitas, qua occurrunt singulæ, numerus autem particularum dato tempore occur-

ten-

rentium proportionalis est ipsi occurfus velocitati, ut sæpius jam dictum est; cum rationibus ipsis universim componenda erit ratio duplicata velocitatis.

COROLLARIA.

I. Quod si igitur planum idem AC eidem fluido data velocitate juxta directionem ED irruenti diversimode obijciatur; quantitas motus, quæ post impactum parallele ad AC supererit, rationem compositam habebit sinus, & cosinus anguli occurfus EDC , sive CAB , eaque sub angulo semirecto fiet maxima, & in locis hinc inde æqualiter ab angulo semirecto distantibus æqualis erit. Vis autem ictus perpendicularis, quam planum idem in puncto quocumque D ex fluidi occurfu sustinebit, erit in duplicata ratione sinus anguli incidentiæ, maxima evadet cum fluidum ad rectos angulos occurret plano, & sub angulo semirecto vis maximæ dimidia erit: ac denique summa omnium virium hujusmodi per totam plani longitudinem impressuram erit in triplicata ratione sinus ejusdem anguli.

II. Si figura omnis $AECB$ referat planum aliquod horizontale, & sit aquarum fluentium directio ED , eaque objectu munimenti cuiuslibet AC a loco B in partem adversam detorqueri debeant; manifestum est semirecto angulo EDC deviationem maximam haberi: & si figura eadem referat verticale aliud planum, & punctum sublimius sit A , manifestum est pariter semirecto incidentiæ angulo haberi maximam incurrentium aquarum a fundo Cb ad superficiem fluminis deviationem. Hæc in obicibus construendis, sive ut vocant calcaribus, præcipui usus theorematum esse poterunt: nam si utraque obicis sectio horizontalis, & verticalis advenientes aquas semirecto angulo excipiant, maxima earum copia, & ab una alteram ripam, & a fundo ad superficiem fluminis avertetur, ac minus timendum erit ne latere, ac fundo abrafo, & dehiscente obex etiam omnis dehiscat.

III. Si $A'ACBB'$ sit corpus aliquod verticaliter a fundo CB assurgens, atque illud suis partibus omnibus sic firmum, ac connexum sit ut non nisi circa punctum extremum B' dimoveri, ac simul omne rotari possit; data vi fluidi juxta directionem ED incurrentis, & dato angulo EDC determinari poterit quæ corporis crassities BB' esse

Oo 2

debeat

debeat, ut momenta impulsiois, & resistentiæ inter se æquantur: quam solvendi problematis rationem D. Hennert secutus est in Sect. V. Hydraulicæ Practicæ. Formulas vero analyticas, quæ casibus singulis æquilibrii definiendis inserviunt, hoc in loco minime adjiciamus, quod qui ex terra construi solent aggeres ab aquis irruentibus abradi graciliores semper paulatim, & aquarum vi sustinendæ impares fiant, & quæ etiam lapideæ, aut lateritiæ moles obijciuntur fluminibus non alia ratione corruantur quam quod continua terræ abrasione deficiat fundus, atque omnis riparum nexus solvatur: unde cum ex corollario antecedente innotescat quæ in obice quolibet opportunior sit laterum inclinatio, cætera quæ ad obicis crassitiem, ac firmitatem pertinent ex peculiaribus fluminum, & locorum circumstantiis potius, quam ex rotatorii motus consideratione videntur determinanda.

IV. Cum in primo fluidi occurſu vis ictus perpendicularis sit ut quadratum sinu anguli incidentiæ, eadem continuato etiam motu esset ratio si ob fluidi raritatem subsequentiū particularum motus reflexione, ac recurſu præcedentiū particularum minime impediretur, atque eadem haberetur semper primi occurſus conditio. Is vero non nisi in aere, aut in fluidis aliis levioribus casus haberi poterit. In aquæ, aut fluidi alterius densioris occurſu non illico ad latas alterutrum refluere poterunt particulæ omnes, & planum propositum adhuc post ictum aliquo modo urgere pergent, & vis ictus totius perpendicularis fiet major quam ferat duplicata eadem ratio: cumque sub recto incidentiæ angulo fluidum utrimque æqualiter, ac liberius e plano effluat, in minoribus autem angulis accumulari antrorsum debeat copiosius, vis etiam ictus eo magis a ratione eadem recedet quo angulus incidentiæ erit minor. Quæ hujus generis experimenta Parisiis anno 1775. a D. D. Alembert, Condorcet, Bossut diligentissime instituta sunt vim ictus perpendicularis exhibuerunt proportionalem sinui ad potentiam illam erecto, cujus exponens a binario numero vix deficiebat, erat scilicet $1 + \frac{1}{4}$ cum angulus incidentiæ major erat gradibus 63: pro semirecto incidentiæ angulo erat potentie exponens $1\frac{1}{4}$, atque erat $1\frac{1}{4}$ pro angulo graduum $33\frac{1}{2}$, in angulis autem minoribus vis ictus fere erat sinus ipsis proportionalis.

V. Quam-

V. Quamdiu igitur angulus incidentiæ semirectus erit major proxime quidem assumi poterit vim omnem, quæ directionibus parallelis a percutiente corpore imprimitur, paribus aliis circumstantiis proportionalem esse quadrato sinus ejusdem anguli, in minoribus autem angulis ne id quidem proxime assumi poterit. Quæ autem fluidi recurrentis, neque omnino libere ad latera effluentis ratio in precedente corollario allata est ad phaenomeni explicationem sufficit; quo Hydraulicæ scriptores hæere solent, ac satis indicat abstractam illam hypotheseos fluidi post impactum non amplius agentis densorum saltem fluidorum casui accomodari nequaquam posse. Ob eandem etiam recursus difficultatem, quæ in amplioribus superficiebus major esse debet quam in minoribus, fieri etiam debet, quod paribus aliis circumstantiis, vis ictus sit quidem proxime superficiæ percussæ proportionalis, vere autem augeatur in ratione aliquantulum majore quam sit ratio ipsa superficie: quod pariter ferunt Parisiensia illa experimenta. Ita verò universum deficit principium illud, cui omnis resistentiæ fluidorum theoria innititur, quod scilicet vis ictus proportionalis sit superficiæ percussæ, & quadrato sinus anguli incidentiæ fluidi percutientis.

THEOREMA X.

Si globus in fluido aliquo non elastico, & uniformiter resistente moveatur, & fluidi particule sic raræ sint, ut illico post ictum e latere recedant, erit globi resistentia duplo minor, quem quæ in cylindro circumscripto, & eadem velocitate juxta axis longitudinem moto haberi posset.

Ducto enim plano ad directionem motus, atque ad axem cylindri parallelo intelligamus rectam *HG*, fig. 127., in ipsa cylindri base, & in superficie sphericæ semicirculum *ECD* designari, ductisque ad diametrum *ED* perpendiculari *KMF*, & ad radium *BA* productum perpendiculari alia *KL*, & motu omni ad fluidum circumpositum relato, intelligamus singulas ipsius particulas velocitate æquali, & contraria secundum directionem rectis *CA*, *KF* parallelam in quiescentem globum incurrere. Quia motus corporum inter se quocumque etiam impresso communi motu iidem remanent, resistentia globi ut antea in fluido moti æqualis erit vi percussiois, quæ haberi posset si & fluido

fluido simul, & globo imprimeretur velocitas æqualis, & contraria velocitati, qua fertur globus, deductoque ad quietem globo tota in ipsum vis fluidi exerceretur. Hoc autem posito vis particulæ cujusvis fluidæ secundum KB incurrentis ad vim inde ortam perpendiculariter ad semicirculum EGD in puncto B se haberet ut $KB:LB$, sive ut $BA:BF$; adeoque vis absoluta particulæ cujusvis se haberet ad parallelam vim globo impressam ut $BA:BF$. Cum igitur ducta quavis mf ad MF parallela idem sit numerus particularum fluidi in Mm , & Bb incurrentium, cumque in hypothefi particularum statim post ictum e latere labentium eadem particularum primo incurrentium, & subsequen-
 quentium aliarum omnium sit ratio; erit vis omnis fluidi in HG incurrentis ad parallelam vim, quæ semicirculo ECD posset imprimi ut summa omnium AB ad summam omnium BF ; & cum summa omnium AB æqualis sit summæ omnium $BF + AF$, & summa omnium quadratorum sinuum in integro quadrante æqualis sit summæ quadratorum omnium cosinuum; summa omnium AB erit ad summam omnium BF ut $2:1$, eademque in sectionibus omnibus parallelis, & in tota etiam cylindri base, & globi superficie erit ratio, ac vires pariter, quæ a cylindro, & globo in contrariam partem quiescenti fluido possent imprimi, inter se erunt ut $2:1$.

COROLLARIUM.

Vis omnis in cylindri basim exercita erit ad summam virium superficiæ sphericæ perpendicularium ut summa omnium BA ad summam omnium BF , quæ in toto hemisphærio possunt accipi, sive ut cylindrus radii, & altitudinis CA ad integrum hemisphærium, vel denique ut $3:2$. Patet vero non omnes vires perpendiculares LB transire in globum, & ad supputandam vim, quæ parallele ad KB in toto globo est residua, subducendas esse vires omnes, quæ in globo directionum oppositione destruantur. Patet insuper vim omnem globi dimidio minorem prodire quam in cylindro ea hypothefi assumpta quod sola primi ictus ratio habenda sit, quodque omnes particulæ statim post ictum abeundo densitatem, ac resistantiam fluidi minime immutent. Quæ cum hypothefis fluidorum naturæ, atque experimentis non omnino conformis sit, ut in postremo corollario antecedentis problematis monuimus, mirum esse non debet si institutis experimen-
 tis

tis alia etiam prodeat ratio resistentiarum cylindri, & globi. Cl. Eques de Borda experiundo resistentiarum rationem invenit esse $5:2$, s' Gravefande $3:2$, ut in Actis Parisiensibus anni 1763, & in Elementis Physicæ Lugduni Batavorum editis videre est.

PROBLEMA XV.

Si globus filo aliquo superius ex centro immobili vi fluidi incumbentis abducatur a perpendiculari, dato angulo deviationis velocitatem fluidi determinare.

In primis si pondus C suspensum ex centro A , fig. 118., vi aquæ, aut fluidi alterius decurrentis ex B in C angulo BAC abducatur a perpendiculari AB , & vis aquæ recta FC , vis gravitatis verticali CD exponatur, demittanturque ex F , & D in AC perpendicularia FG , DE ; pro casu æquilibrium vis absoluta aquæ ducta in $\frac{FG}{FC}$, qui est cosinus

anguli BAC , exæquari debet absoluto ponderi ducto in $\frac{DE}{DC}$,

est sinus anguli ejusdem, adeoque vis aquæ æquabitur ponderi in sinum ducto, & per cosinum diviso, sive producto ponderis, & tangentis anguli BAC : quæ si tangens vocetur t , & si pondus globi in fluido demersi vocetur q , erit vis aquæ incumbentis $= qt$. Jam vero cum juxta Theor. X. vis aquæ in globi superficiem exercita dimidio minor sit quam quæ in circulum maximum ejusdem globi directe exerceretur, cumque per Coroll. II. Theor. VI. vis in planum circuli exercita æqualis sit ponderi cylindri eadem basi, & altitudine illa descripti, ex qua cadendo velocitas aquæ decurrentis acquiri posset; si altitudo huiusmodi vocetur x , & radius globi sit r , & sit p pondus absolutum globi extra aquam positi, erit $p - q$ pondus globi aquei, qui volumen globi demersi exæquet: pondus cylindri aquei ejusdem diametri, & altitudinis $\frac{1}{2} p - q$; pondus cylindri altitudinis x , & diametri ejusdem $\frac{1}{2} p - q \cdot x$; eritque vis in demersum

globum exercita $\frac{1}{2} p - q \cdot \frac{x}{2r} = qt$. Inde autem eruetur $x = \frac{8qrt}{3 \cdot p - q}$.

COROLLARIA.

I. Ex priorè problematis hujus parte colligitur quod cum vis aquæ

quæ proportionalis sit velocitati simul, & numero particularum dato tempore in pendulum incurrentium, numerus vero particularum eorundem sit proportionalis velocitati, vis aquæ erit in subduplicata ratione tangētis deviationis penduli a perpendiculari, ut recte ab Hermanno, & Zendrino statutum fuerat. Ex altera autem parte consequitur quod si spatium uno secundo temporis a corpore libere decedente absolutum vocetur a , & sit $\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)}$ secundorum numerus,

quo lapsus ex altitudine x haberetur; erit spatium, quod ultima lapsus velocitate uno secundo temporis absolvi posset, seu spatium uno secundo a particulis aquæ percursum $2x \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)} = 2\sqrt{ax} =$

$$4\sqrt{\left(\frac{2agr}{3 \cdot p - q}\right)}.$$

II. Si vires ab eodem fluido in globi superficiem, atque in cylindri circumscripti basim exercitæ statuantur esse inter se ut $1 : n$, manentibus antecedentibus aliis denominationibus erit vis aquæ in globum incurrentis $\frac{3x}{4nr} \cdot \frac{p - q}{p - q} = q$, atque inde eruetur

$$n = 3x \left(\frac{p - q}{4qr} \right); \text{ \& si } a \text{ sit spatium uno secundo temporis libero,}$$

& verticali lapsu absolutum, & b sit spatium, quod uno pariter secundo temporis a particulis aquæ in globum incurrentibus absolvitur, ac propterea juxta formulam aliam Probl. XIII. sit $x = \frac{b^2}{4a}$; hoc valore

$$\text{substituto prodibit } x = \frac{3b^2 \cdot \frac{p - q}{p - q}}{16agr}, \text{ \& cum innotescat jam altitu-}$$

do a si quantitates aliæ b, r, p, q, r in experimento aliquo innotescant, inde deduci poterit quæ virium in superficiem sphericam, & in cylindri basim exercitarum sit ratio.

III. Cum in celebri illo Elvii experimento; quod To. III. D. Kästnerus retulit, spatium b uno secundo temporis in aquæ superficie a corpore supernatante absolutum deprehensum fuerit pedum Suecicæ 2, 086, & spatium a satis proxime sit pedum Suecicæ 16: cum-

cumque in eo experimento globi officii extra aquam pondus fuerit assium Sueciæ 2397 = p , & quod in aqua supererat pondus $q = 987$; $p - q = 1410$, ac fuerit insuper diameter $2r = 0.17$ unius pedis, & tangens $t = \frac{7}{17}$; substitutis numeris debebat esse $x = 0.068$, & $n =$

$$\frac{3 \times 0.068 \times 1410 \times 17}{2 \times 0.17 \times 987 \times 7} = 2.08, \frac{1}{n} = 0.48, \text{ quemadmodum}$$

Cl. Fontana eodem Elvii experimento ad eandem formulam relato prodire invenerat in Disquis. XIV. de percussione, quam globus a fluido impingente patitur, per experientiam definienda. Quæ autem superest adhuc exigua experimenti, & theoriæ dissensio in eam hypothesein debet rejici, qua percussionis obliquæ vis statuebatur proportionalis quadrato sinus anguli incidentiæ.

PROBLEMA XVI.

Si corpus aliquod cylindricum juxta longitudinem axis moveatur in fluido aliquo uniformiter denso, ac quiescente, & fluidi particule post idum illico restuant e larere, neque aliis impedimento esse possint, rationem imminutæ velocitatis, spatii percursum, ac temporis determinare.

In primis manifestum est quod ut corpus quodcumque possit in fluido progredi, fluidi particulas, in quas incurrit, pellere debet e locis suis, eandemque quantitatem motus amittere quam particuli omnibus communicat: & quia motus impressi quantitas est ut numerus particularum fluidi dato tempore impulsarum, atque ut velocitas qua impelluntur conjunctim, numerus vero impulsarum particularum proportionalis est toti impulsus velocitati; motus etiam impressi, & amissi quantitas, ac resistentia proportionalis erit quadrato velocitatis. Manifestum est insuper quod ut corpus cylindricum tota axis longitudine in fluido quiescente promoveatur, æquale volumen fluidi debet e loco directe pellere, & eam motus quantitatem communicare, atque amittere, quæ ad totam motus quantitatem se habeat ut densitas fluidi ad cylindri densitatem. Quod si igitur densitatum earumdem ratio sit $1:D$, & sit v velocitas, qua dato quocumque tempore in fluido cylindrus moveri pergit; erit $\frac{v}{D}$ ve-

locitas amissa quo tempore tota axis longitudine promovebitur: & si eadem semper sit ictus cujusque ratio, & quæ semel particulæ impulsæ sunt refluyendo illico e latere subsequentes ictus minime impediant, ac cylindri longitudo vocetur b , spatium percursum x , elementum spatii dx ; erit $\frac{vdx}{bD}$ velocitas successive amissa quo tem-

pore cylindrus ipse per elementum spatii dx promovebitur: ac denique $\frac{a}{v}$ sit dt elementum temporis, & a velocitas, qua motus incipit, ob $dt = \frac{dx}{v}$, , differentiales, atque integrales formulæ, quibus

ratio velocitatis, spatii, & temporis exprimitur, hæc habebuntur

$$\begin{array}{lll} \text{I. } \frac{vdx}{bD} = -dv. & \text{II. } x = \log. a - \log. v & \text{III. } x = bD \log. \frac{a}{v} \\ \text{IV. } \frac{dt}{bD} = -\frac{dv}{v^2} & \text{V. } \frac{t}{bD} = \frac{1}{v} - \frac{1}{a} & \text{VI. } v = \frac{bDa}{at + bD} \end{array}$$

COROLLARIA.

I. Ex prioribus iis resistentiæ notionibus manifeste etiam sequitur quod si densitas fluidi, in quo solidum aliquod movetur, præ globi densitate non possit omnino negligi, finito tempore finita habebitur velocitatis imminutio: & quomodocumque leves, & teretes, & nullo tenacitatis vineulo inter se nexæ intelligantur fluidi particulæ, ut corpus possit in ipso progredi motum aliquem particulis singulis communicando eo magis retardari debet, quo plures, densioresque particulæ debent in motum agi. Unde cum in spatiis cœlestibus Planetæ, ac Cometæ omnes moveantur omnifariam liberrime sine sensibili motus retardatione, cumque exhalationes etiam ad modum longioris caudæ ex nucleis Cometarum Soli propius accedentium caloris vi assurgentes moveantur diutissime, ac velocissime, non nisi rarissimum ac subtilissimum in iis spatiis omnibus fluidum superesse poterit: cumque in spatiis terrestribus gravium decidentium phænomena non admodum a gravitatis legibus dissentiant; valde etiam exigua aeris densitas, & valde magna vacuulorum interperforum copia censenda erit.

II. Ex ipsa vero inspectione formulæ, quæ quinto loco exhibita est, quæque in hanc aliam resolvitur $\frac{bD}{a} + t = \frac{bD}{v}$, patet quod si summa quantitatis constantis $\frac{bD}{a}$, & variabilis quantitatis t pro-

gres.

gressionem Geometricam constituat, hoc est si tempora post datum tempus accepta, ac supputata exprimantur terminis sibi invicem succedentibus progressionis alicujus Geometricæ; velocitates residuæ exprimentur iisdem terminis inverse sumptis, atque erunt pariter in progressionem Geometricam. Velocitatibus autem acceptis in progressionem Geometricam, ex tertia formula $x = bD \cdot \log. \frac{a}{v}$ manife-

stum est quod spatia a motus initio supputata erunt in progressionem arithmetica, eaque æqualiter temporibus ut antea acceptis augebuntur. Quod ex simplici inspectione formularum manifestum est, obscurius a Newtono constructione Geometrica traditum videtur esse in Propof. V. Lib. II. Princip. Mathem., quæ est hujusmodi: Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicata, & idem sola vi insita per medium simile movetur; tempora vero sumantur in progressionem Geometricam a minoribus terminis ad majores pergente; dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eadem progressionem Geometricam inverse, & quod spatia sunt æqualia, quæ singulis temporibus describuntur.

III. Si b sit ipsa diameter cylindri, & globus æquali diametro descriptus æquali cum velocitate in eodem medio moveri intelligatur, quoniam soliditates, & quantitates motus in cylindro, & globo sunt inter se ut $3:2$, quantitas autem motus a cylindro amissa, quo tempore diametrum integrum percurrit, ad totam quantitatem motus se habet ut $1:D$; quantitas motus eo tempore a cylindro amissa erit ad quantitatem motus globi ut $3:1$. Jam vero si medium non sit

elasticum, & sola primi ictus ratio in particulas singulas haberi debeat, quantitas motus a cylindro amissa dupla esse debet quamquæ eodem tempore amittitur a globo. Itaque quantitas motus a globo amissa quo tempore longitudinem diametri percurrit erit ad totam quantitatem motus ut $3:1$, & quo tempore absolvit globus qua-

tuor tertias partes diametri erit amissæ, ac totalis quantitatis motus ratio $1:D$, & resistentia globi erit ad vim, qua totus ejus motus vel auferri potest, vel generari quo tempore quatuor tertias partes dia-

diametri suæ describit ut densitas medii ad densitatem globi, ut fert Coroll. I. Propof. XXXV. Lib. II. Newtoni.

IV. Si medium sit summe elasticum duplam velocitatem, paribus aliis omnibus circumstantiis, amittet globus, alteram ictu, alteram elasticitate, quæ æquali, & contraria vi figuram particularum impullarum restituit, & densitas medii erit ad densitatem globi ut quantitas motus a globo amissa ad vim qua omnis globi motus auferri potest, vel generari quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit. In utraque autem hypothesi medii elastici, & non elastici medium satis rarum debet intelligi, ut non alia resistentiæ pars considerari possit, quam quæ ex simplici globi, aut cylindri incurfu in singulas fluidi particulas habetur. Newtonus in memorata, & præcedente alia propositione hujusmodi theoremata illi tantum hypothesi accomodari censuit, in qua medium rarissimum ex æqualibus particulis ad æquales ab invicem distantias libere dispositis constare intelligatur, ut illico post ictum corporis resilire, nec se invicem fluidi particulæ turbare possint.

V. Si fluidum continuum sit, ut aqua, oleum, mercurius, imò aer ipse, quæ primo ictu impellentur particulæ antrorsum resiliendo alias in motum agent, & alius omnino casus habebitur. Newtonus in Prop. XXXVI. ex iis principiis, quæ quidem in Coroll. III. Theor. VI. jam indicavimus, singillatim vero recensere, atque expendere non vacat, colligendum esse censuit quod in medio continuo resistentia esse debeat dimidio minor quam si illico post contactum resilirent, nec se amplius impedirent particulæ: atque in Prop. XXXVII. hypothesim aliam assumpsit fluidi non elastici, compressi, & infiniti, atque in hac altera hypothesi æquales esse censuit resistentias cylindri, & globi, aliorumque corporum, quorum æquales essent sectiones. Daniel Bernoullius To. II. Academiæ Petropolitanae §. V. Part. I. Dissertationis de actione fluidorum in solida corpora, in medio etiam elastico, & continuo dimidiam tantum resistentiam esse contendit quam quæ in medio non elastico haberetur, quod scilicet stratum primo impulsu in secundum stratum resiliat, illudque simul trahat ad latera, nec nisi tertii impulsus post primum spectari debeat, atque ita se habeant omnia ac si strata alterna nihil

ad

ad idum, & resistantiam conferrent. Hæ vero considerationes omnes; & quæ a Bernoullio adjectæ sunt §. VI., & VII., & quibus contendit ipse ob medii continuitatem adhuc dimidio minorem fieri resistantiam, nimirum incertæ, ac vagæ videntur esse quam ut ad explicanda naturæ phænomena assumantur. Videamus tamen quæ esse possit hypotheseos cujusque, & præcedentium principiorum ad problemata ascensus, & descensus corporum applicatio.

PROBLEMA XVII.

Si corpus aliquod cylindricum in medio raro, & elastico gravitate sua decadat, vel sursum verticaliter projiciatur, invenire, quo tempore ad velocitatem datam pervenire possit.

Manentibus omnibus antecedentibus denominationibus, atque assumpta corollarii posterioris hypothesi sit $\frac{vdx}{2bD}$ velocitas cylindro a-

missa quo tempore secundum axis longitudinem promoveatur spatio dx ; & vis acceleratrix cylindri in fluido positi exprimat unitate, ac sit propterea dt elementum velocitatis gravitati debitum, atque in descensu quidem sit incrementum omne velocitatis $dt = \frac{vdx}{2bD}$, in a-

scensu vero sit decrementum velocitatis $dt = -\frac{vdx}{2bD}$. Erit universim

$dt \mp \frac{vdx}{2bD} = \pm dv$, & superioribus signis ad priorem descensus casum, inferioribus ad casum ascensus relatis, ac posito $dt = \frac{dx}{v}$ fiet

$$\pm dv = dt \mp \frac{v dx}{2bD}, \text{ \& } dt = \pm \frac{2bD \cdot dv}{2bD \mp v}.$$

Superioribus igitur signis acceptis, ac posito $2bD = m^*$, erit in casu descensus $dt = \frac{m^* dv}{m^* - v} = \div \left(\frac{1}{m + v} + \frac{1}{m - v} \right) m dv$,

& integrali ad logarithmicam illam relato, cujus subtangens sit unitas, fiet $t = \div m \cdot \log. \left(\frac{m + v}{m - v} \right)$: in casu autem ascensus erit

$$t = - m^* \cdot \frac{S \cdot dv}{m^* + v}.$$

For-

Formula etiam differentiali in infinitam seriem resoluta erit

$$dt = \frac{\pm dv}{1 \mp \frac{v^2}{2bD}} = \pm dv + \frac{v^2 dv}{2bD} + \frac{v^4 dv}{4b^2 D^2} + \frac{v^6 dv}{8b^3 D^3} \&c.$$

$$s = v \pm \frac{v^3}{2 \cdot 3 \cdot bD} + \frac{v^5}{2 \cdot 5 \cdot b^2 D^2} \pm \frac{v^7}{2 \cdot 7 \cdot b^3 D^3} + \frac{v^9}{2 \cdot 9 \cdot b^4 D^4} \&c.;$$

est enim positivum in descensu corporum, atque in ascensu negativum elementum velocitatis. In ascensu igitur si prima jactus velocitas ea sit, quæ cadendo per altitudinem a sola vi ponderis acquiri posset, ac sit $v = 2a$, in fine autem ascensus sit $v = 0$, erit tempus omne ascendendi $t = \sqrt{2a} \left(1 - \frac{a}{3bD} + \frac{a^2}{5b^2 D^2} - \frac{a^3}{7b^3 D^3} + \frac{a^4}{9b^4 D^4} \right) \&c.$

COROLLARIA.

I. Si in fig. 129., atque in circulari arcu Af sit radius $AB = m$, tangens $Ac = v$, juxta priorem formulam Probl. XCVI. Algebrae erit sector $ABf = \frac{1}{2} m' \cdot S. dv$. Quod si centro eodem B , & ver-

tice A describatur hyperbola æquilatera AFG , posita $AC = v$, acceptisque AF , AG inter se proximis, & ex C , F in BD ductis perpendicularibus CD , FH , erit $CD = \frac{AB \cdot dv}{BC}$, $FH = \frac{BF \cdot AB \cdot dv}{BC^2}$,

atque ob $BF^2 : BC^2 = BE^2 : BA^2 = FE^2 : CA^2 = BE^2 - FE^2 : BA^2 - CA^2 = BA^2 - CA^2$, erit sector $BFG = \frac{BF^2 \cdot BA \cdot dv}{2 BC^2} = \frac{1}{2} m' \frac{dv}{m^2 - v^2}$.

Patet igitur Propos. IX. Lib. II. Princip. Mathem. Newtoni, quod si tangentes circulorum sectoris circularis, & sectoris hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis, erit tempus omne ascendendi ad locum summum ut sector circuli, & tempus omne descendendi a loco summo ut sector hyperbolæ.

II. Ex priore Newtonianæ hujus constructionis parte colligitur facile paradoxii illius ratio, quod primo Joannes Bernoullius attigit To. IV. num. CLXXXII., quod scilicet corpus infinita etiam velocitate in ære uniformiter resistente sursum explosus non nisi finito tempore totam illam altitudinem describet, ad quam usque potest ascendere: est enim infinita finiti cujusvis quadrantis tangens. Ex altera vero con-

stru-

structionis ejusdem parte consequitur in corporum descensu, infinito etiam tempore, cum semiordinata hyperbolæ FE , & area omnis BAF fiet infinita, non nisi finitam esse posse velocitatem AC . Id etiam patet ex differentiali, arque integrali formula hujus problematis: ex differentiali enim formula $dt = \frac{v^2 dt}{2bD}$ man-

festum est tum accelerationem omnem definire cum fiet $v^2 = 2bD$: in integrali autem formula $t = \frac{1}{v} m \cdot \log. \left(\frac{m+v}{m-v} \right)$ posito $v =$

$\sqrt{2bD} = m$ fiet $t = \frac{1}{v} m \cdot \log. \frac{2m}{0}$, atque erit tempus omne infinitum.

IV. Cylindrus igitur in medio uniformiter resistente decedens aliquo semper modo accelerabitur quin ad constantem unquam velocitatis gradum perveniat, & limes ultimæ velocitatis, sive omnis velocitas, ad quam usque finito tempore pervenire nequit, ea erit quæ cadendo per altitudinem bD , sublata medii resistantia, sola vi ponderis acquiri posset. Si loco cylindri proponatur globus diametro b descriptus, in hypothefi Coroll. II. problematis antecedentis erit $\frac{3vdx}{4bD}$

velocitas a globo amissa quo tempore per elementum spatii dx descendet, atque in hypothefi Coroll. V. ob medii continuitatem amitteretur eo tempore velocitas $\frac{3vdx}{8bD}$: & si vis acceleratrix globi in medio eodem positi exprimatur unitate, erit dt , sive $\frac{dx}{v}$ incrementum

velocitatis genitum vi ponderis, atque in casu ultimæ velocitatis fiet $\frac{3vdx}{8bD} = \frac{dx}{v}$, sive $v^2 = \frac{1}{3} bD$.

V. Si pondus absolutum globi sit $= 1$, & pondus globi in fluido positi $= p$, erit $p \cdot dt$ incrementum velocitatis genitum vi ponderis, atque in casu ultimæ velocitatis fiet $v^2 = \frac{1}{3} bpD$, & divisione per duplam vim acceleratricem facta, juxta Coroll. I. Thor. XI. Lib. I., erit $\frac{1}{3} bD$ spatium per quod cadendo globus ultimam illam velocitatem vi ponderis posset acquirere, atque erit $\frac{1}{3} bD$ spatium, quod eodem lapsus tempore eadem illa cum velocitate æquabiliter ab-

globus abfolveret. Quod fi igitur fit $\frac{1}{2}$ ſpatium uno ſecundo temporis a globo æquabiliter abſolutum, & c fit ſpatium quod tota vi gravitatis libere decidendo uno ſecundo temporis in vacuo abſolvi poſſet, quia lapſus tempora ſunt in ratione directa ſubduplicata altitudinis, & ſubduplicata reciproca vis acceleratricis erit

$$\sqrt{\left(\frac{4bD}{3P}\right)} : \sqrt{c} = \frac{1}{2} bD : \frac{1}{2}, \text{ ac fiet } \frac{1}{2} = 4 \sqrt{\left(\frac{bcpD}{3}\right)} = 4 \sqrt{\left(\frac{bcp}{3 \cdot 1 - p}\right)}$$

quæ comparatis ſpeciebus formula deprehendetur eadem, quam §. II. Par. II. memoratæ diſſertationis tradiderat Daniel Bernoullius.

PROBLEMA XVIII.

Iſſdem poſitis rationem velocitatum, & ſpatiorum aſcendendo, vel deſcendendo percurſorum determinare.

Reaſumpta æquatione eadem differentiali $dt \mp \frac{vdx}{2bD} = \pm dv$, & po-

ſita $dt = \frac{dx}{v}$, ac diviſione per infinitam ſeriem inſtituta erit

$$dx = \pm \frac{2bD \cdot vdv}{2bD \mp v^2} = \pm \frac{v dv}{1 \mp \frac{v^2}{2bD}} = \pm v dv + \frac{v^3 dv}{2bD} \pm \frac{v^5 dv}{4b^2 D^2} \&c.$$

Priore vero integrali ad logarithmos relato, & poſito quod ſubtangens logarithmicæ fit unitas erit ſpatium aſcendendo, vel deſcendendo percurſum $x = C - bD \cdot \log. (2bD \mp v^2)$:

& quia in caſu deſcenſus, qui ſuperiore ſigno indicatur, poſito $x = 0$, & $v = 0$ fit $C = bD \log. 2bD$, erit ſpatium deſcenſus $x = bD \cdot \log. 2bD - bD \cdot \log. (2bD - v^2) = bD \cdot \log. \left(\frac{2bD}{2bD - v^2}\right)$:

pro caſu autem aſcenſus, poſito quod cum fit $x = 0$, fit etiam $v^2 = 2a$, poſito ſcilicet quod velocitas, qua in altum proſicitur cylindrus, acquiri poſſit vi ponderis decidendo per altitudinem a ; erit $C = bD \cdot \log. (2bD + 2a)$, atque erit ſpatium indeterminatum $x = bD \cdot \log. \left(\frac{2bD + 2a}{2bD + v^2}\right)$, ac tota aſcenſus altitudo debet eſſe

$$= bD \cdot \log. \left(1 + \frac{a}{bD}\right).$$

Sin.

Singulis vero infinitæ seriei terminis integratis, & differentialibus positive in descensu corporum, atque in ascensu negative acceptis prodibit

$$x = \frac{1}{2} v^2 \pm \frac{v^4}{8bD} \pm \frac{v^6}{24b^2D^2} \pm \frac{v^8}{64b^3D^3} \&c. \text{ Itaque spatium omne}$$

descensus habebitur accepto superiore signo terminorum omnium seriei: in ascensu autem corporum posito primum $v^2 = 2z$, ac deinde $v^2 = 0$, erit totum ascensus spatium

$$x = z - \frac{a^2}{2bD} + \frac{a^4}{3b^2D^2} - \frac{a^6}{4b^3D^3} + \frac{a^8}{5b^4D^4} \&c.$$

COROLLARIA.

I. In æquatione differentiali $dt \mp \frac{v^2 dt}{2aD} = \pm dv$, divisione per

dt facta, erit $1 \mp \frac{v^2}{2bD}$ vis omnis qua corpus accelerabitur in descensu;

atque in ascensu retardabitur, nimirum differentia ponderis, & resistentiæ in priore casu, & summa in casu altero. In æquatione vero integrali

$$x = bD \cdot \log. \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{2bD}} \right), \& x = bD \cdot \log. \left\{ \frac{1 + \frac{a}{bD}}{1 + \frac{v^2}{2bD}} \right\} \text{ spatium per-}$$

cursum proportionale erit logarithmo quantitatis $1 \mp \frac{v^2}{2bD}$ inverse sum-

ptæ, adeoque spatio æqualiter crescente quantitas eadem crescet proportionaliter. Hinc patet quod a Newtono in Propos. VIII. Lib. II. statutum est, quod scilicet si spatium percursum dividatur in æquales partes, atque in principiis singularum partium vires gravitatis, & resistentiæ addendo in ascensu corporis, atque in descensu subducendo resistentiam a gravitate (ab ea scilicet quæ in medio resistente residua est) investigentur vires absolutæ; erunt absolutæ vires in progressionem Geometricam.

II. Spectata infinita serie erit in cylindri ascensu differentia spatii illius, ad quod usque sublata medii resistentia posset ascendere

$$a - x = \frac{a^2}{2bD} - \frac{a^4}{3b^2D^2} + \frac{a^6}{4b^3D^3} \&c.,$$

& si cylindri densitas præ densitate medii, in quo progreditur, sit mul-

Mechanica.

Q 3

10

to major, quod in aqua ad aerem relata locum habet, omiſſis aliis ſeriei terminis ſtatui poterit $a - x = \frac{a^2}{2bD}$: ac ſi jam formula ad

jaçtus aquarum e vaſis proſilientium traduça ſit a altitudo aquæ in vaſe aliquo prementis, x altitudo jaçtus, & particularum cylindricarum e vaſe erumpentium longitudo b aſſumatur æqualis diametro foraminis circularis; quantitas $a - x$, qua altitudo jaçtus a tota vaſis altitudine deficiet, cenſeri poterit quadrato altitudinis vaſis directe, & foraminis diametro reciproce proportionalis. Clarif. Gregorius Fontana in Diſſertatione, quæ anno 1774. ab Academia Mantuana præmium obtinuit, elegans hujusmodi theorema, eandemque infinitam ſeriem tradidit, formulis prioribus logarithmicis, quæ jam antea a Daniele Bernoullio traditæ fuerant To. II. Academiæ Petropolitane, in infinitam ſeriem reſolutis.

III. Si ſubſtitutis numeris vaſis altitudo a aſſumatur pedum Parisienſium 11, ſive linearum 1584, & circularis foraminis diameter b ſtatuatur linearum 4, atque inſuper ſtatuatur $D:1 = 850:1$, quæ eſt ratio denſitatis aquæ, & aeris, prodibit a' linearum 369,

& $\frac{a'}{3b'D}$ linearum 114, & jaçtus altitudo x pluſquam pede 1. poll. 9.

lin. 3. ab altitudine vaſis deficiet. In iis experimentis, quæ ſub priore phænomeno Cap. III. ex opere D. Boſſut retulimus, in verticali jaçtu differentia omnis erat dumtaxat poll. 6. lin. 2., & in jaçtu aliquantulum inclinato non erat niſi poll. 4 $\frac{1}{4}$. In alio etiam authoris ejuſdem experimento ſi foraminis diameter b accipiat lin. 8., juxta formulam aliam logarithmicam hujus problematis debet eſſe $x = 6800 \cdot \log(1 + \frac{1584}{6800})$, & logarithmis Briggianis ſumptis, & per 0.4343

diviſis ut ad logarithmos hyperbolicos reducantur; fiet $x = 1424$, & differentia jaçtus ob aeris reſiſtentiam debet eſſe pedis unius, & poll. 1 $\frac{1}{4}$, cum tamen non niſi poll. 4. in memorato experimento deprehenſa ſit. At vero aeris reſiſtentia non niſi guttulis primo ſalientibus objicitur, & quæ jam aere diviſo, & continuato jaçtu obſervari ſolet multo minor cujuſque jaçtus ab altitudine vaſis defectus ex

gut-

guttularum superiorum impedimento potissimum debet repeti, ut in primo eodem phænomeno monuimus.

IV. Si ex binis formulis $t = \frac{1}{v} m \cdot \log. \left(\frac{m + v}{m - v} \right)$, & $x = \frac{1}{v} m^2 \log. \left(\frac{1 - \frac{v^2}{m^2}}{\frac{v^2}{m^2}} \right)$, in quantitates alias exponentiales resolutis,

eruantur valores bini velocitatis v , iis valoribus inter se æquatis habebitur æquatio, cujus ope tempus descensus ex spatio percorso, & vicissim spatium ex tempore definiri poterit: quam spatii, & temporis supputandi rationem secutus est Daniel Bernoullius in postrema parte citatæ Dissertationis. Newtonus in Propos. XL. Lib. II. singularem, atque ingeniosum calculum exhibuit resistentiæ illius, quæ ex inertia fluidarum particularum oritur, quæque est proportionalis quadrato velocitatis, & aliam etiam resistentiæ speciem supputare docuit, quæ ex tenacitate, frictione, & elasticitate partium oriri potest, quæque est proportionalis simplici velocitati: ac pluribus experimentis corporum cadentium, & oscillationum in aqua, & aere institutis theoriam cum phænomenis comparavit. Newtoniani calculi seriem nitide explicarunt Cl. le Seur, & Jacquier. At qui in levioribus corporibus per aerem decidentibus calculus instituitur parte etiam vigesima ab institutis experimentis dissidet: & potior illa pars resistentiæ, quæ oritur ex inertia, non nisi binis hypothesibus assumptis supputata est a Newtono, quod ob continuitatem medii resistentia fiat duplo minor, & quod in icu obliquo resistentia sit ut quadratum sinus anguli incidentiæ. Approximationem quamdam hic adjiciemus.

PROBLEMA XIX.

Datis æquationibus, quæ rationem velocitatis ad spatium percorsum, atque ad tempus descensus exprimunt, exhibere æquationem, qua exprimatur ratio spatii, & temporis.

Cum in ascensu corporum tempus, & spatium omne ascensus ex prima velocitate, qua in altum corpora projiciuntur, juxta Probl. XVII., & XVIII. determinari possit, sit in descensu corporum

$$t = v + v' + \frac{v^2}{6bD} + \frac{v'^2}{10b'D'} + \frac{v^3}{56b^2D^2} \quad \&c.$$

Qq 2

Con-

Conversa, & evoluta serie, qua methodo in Algebra toties usi sumus, ordine habebimus

$$v = t - \frac{v^3}{6bD} - \frac{v^5}{20b^3D^3} - \frac{v^7}{56b^5D^5} \&c.$$

$$v^3 = t^3 - \frac{t^2 v^3}{2bD} - \frac{3t^2 v^5}{20b^3D^3} + \frac{tv^7}{12b^5D^5} \&c.$$

$$v^5 = t^5 - \frac{5t^4 v^3}{6bD} \&c.$$

$$v = t - \frac{t^3}{6bD} + \frac{t^2 v^3}{12b^3D^3} + \frac{t^2 v^5}{40b^5D^5} - \frac{tv^7}{72b^7D^7} - \frac{t^5}{20b^5D^5} \\ + \frac{t^4 v^3}{24b^7D^7} - \frac{t^4}{56b^5D^5} \&c.$$

$$v = t - \frac{t^3}{6bD} + \frac{t^5}{30b^3D^3} + \frac{11t^7}{315b^5D^5} \&c.$$

$$v^3 = t^3 - \frac{t^5}{3bD} + \frac{t^7}{36b^3D^3} + \frac{t^9}{15b^5D^5} \&c.$$

$$v^5 = t^5 - \frac{2t^7}{3b^3D^3} \&c.$$

$$x = \frac{1}{2}v^3 + \frac{v^5}{8bD} + \frac{v^7}{24b^3D^3} \&c. = \frac{1}{2}t^3 - \frac{t^5}{24bD} + \frac{t^7}{180b^3D^3} \&c.$$

$$\text{atque erit vicissim } t^3 = 2x + \frac{t^5}{12bD} \&c. = 2x + \frac{x^3}{3bD} \&c.$$

COROLLARIA:

I. Si loco cylindri proponatur globus diametro b descriptus, juxta Coroll. IV. Probl. XVII. loco $2b$ scribere oportebit $\frac{1}{2}b$, atque ita fiet $t^3 = 2x + \frac{x^3}{2bD} \&c.$ In formulis etiam Probl. XVIII. fiet in de-

scensu corporum $x = \frac{1}{2}v^3 + \frac{3v^5}{16D} \&c.$, atque in ascensu

$x = a - \frac{3a^3}{4bD} + \frac{3a^5}{4b^3D^3} \&c.$ Pariter in formulis Probl. XVII. erit

tempus omne ascendendi $t = \sqrt{2a} \left(1 - \frac{a}{2bD} + \frac{9a^3}{20b^3D^3} \&c. \right) : \&c.$

si velocitas descensus ea sit, quæ per altitudinem a cadendo sola vi pon-

ponderis acquiri posset, erit tempus descensus in medio resistente
 $t = \sqrt{2a} \left(1 + \frac{a}{2bD} + \frac{9a^2}{20b^2D} \&c. \right)$, quæ nisi in casu aliquo satis con-

vergant series ex aliis formulis Logarithmicis temporis, ac spatii in descensu, vel in ascensu percursi calculus institui poterit.

II. Cum in libero corporum descensu sit $t = \sqrt{2x}$, si densitas globi præ densitate medii, in quo fertur, satis magna sit, & diameter globi præ tota lapsus altitudine non adeo sit exigua, satis converget series, & tempus liberi descensus ad tempus descensus globi in medio resistente in iisdem hypothesibus, quæ antea, se habebit in ratione subduplicata $2x:2x + \frac{x^2}{2bD}$, sive ut $1:\sqrt{1 + \frac{x}{4bD}} = 1:1 + \frac{x}{8bD}$.

Si assumatur illud experimentum, quo deprehendit Newtonus globum mercurio plenum diametri $\frac{1}{4}$ unius digiti Londinensis ex altitudine pedum 220 tempore 4" decidere, cum uno secundo temporis corpus libere decidat ex altitudine pedum Londinensium 16 $\frac{1}{2}$, adeoque ex altitudine pedum 220 tempore 3" 42" in vacuo debeat decidere; posito $D:1 = 11890:1$, non erit nisi 8" circiter differentia temporum lapsus, quæ ex medii resistantia in iis hypothesibus oriri poterat. Quæ autem adhuc 10" ad experimenti casum deficiunt non ea tantum de causa deficere censi debent quod lente in eodem casu convergant series, sed etiam quod illæ hypotheses non omnino cum phænomenis resistantiæ, & percussionis fluidarum partium conveniant.

III. Si globi & volumine simul & pondere majores sint, ut qui e tormentis bellicis projiciuntur; satis convergent series, & substitutis numeris aliquot secundorum tempore, quod ad jactum impenditur, non nisi exigua deprehendatur differentia spatiorum, quæ supputata, aut dempta aeris resistantia absolvi possunt. Cum igitur casus hujusmodi in universa resistantiæ theoria præcipuus sit, & Mathematicorum studia præcipue expostulet, cumque nec alii ingeniosissimi Mathematici solutiones alias problematis exhibuerint, quæ institutis experimentis accuratius respondeant, nec videam ego quam ratione corrigi hypotheses, ac recte applicari possint; spectata variationum exiguitate tanto fidentius iis, qui in Ballisticæ praxi se exercent, regulas illas proponerem, quæ in Coroll. V. Probl. XIII. Lib. I. jam indicatæ sunt.

sunt. Illa enim methodo non omnis quidem resistentia aeris negligetur, sed differentia variationum tantum quæ sub semirecto directionis angulo haberi possent, & ob exiguum aeris resistentiam vero adhuc propior erueretur limes, infra quem angulus directionis statuendus esset. Solutionem problematis celeberrimi hic adjiciemus.

PROBLEMA XX.

Determinare curvam *OGH*, fig. 131., quæ transeat per duo puncta *O*, *H*, & quæ circa datum axem *AP* conversa producat solidum, quod secundum eandem axis directionem motum in fluido aliquo patiatur minimam resistentiam.

In primis si proponatur conus truncatus revolutione trapetii *HPDA* circa axem *DP* genitus, fig. 130., & axis ipse cum latere *AH* concurrat in puncto *Q*, & radius ad peripheriam se habeat ut $1:p$, resistentia areæ circularis radio *HP* descriptæ, & directæ in fluido progredientis erit proportionalis quantitati $\frac{1}{2} p \cdot AD^3 \cdot QP^3$. Erit etiam

$\frac{1}{2} p (AD^3 - HP^3)$ circularis annulus latitudinis *AK*, & quantitas fluidi in convexam coni superficiem parallele ad *DP* incidentis: & quia vis absoluta fluidi est ad vim perpendicularem lateri *AH* ut *AH:AK* sive ut *AQ:AD*, & vis perpendicularis est ad vim aliam, quæ inde oritur parallele ad axem *DP*, in eadem ratione *AQ:AD*, erit convexæ superficiæ resistentia $\frac{1}{2} p (AD^3 - HP^3) \cdot \frac{AD^3}{AQ^3}$. Posita igitur

$AD = a$, $DP = b$, $DQ = x$, erit resistentia basæ $\frac{1}{2} p \cdot (x - b)^3 \cdot \frac{a^3}{x^3}$, superficiæ convexæ $\frac{1}{2} p a^3 \left(\frac{2bx - b^3}{a^3 x^3 + x^3} \right)$, & tota coni truncati resistentia $\frac{1}{2} p a^3 \left(1 + \frac{b^3 - 2bx}{a^3 + x^3} \right)$. Quod si igitur ex

omnibus conis truncatis datæ altitudinis quærat ille, in quo resistentia omnis sit minima, differentialibus nihilo exæquatis prodibit $x = \frac{1}{2} b + \sqrt{a^3 + \frac{1}{2} b^3}$: & si *b* sit quantitas infinite parva fiet $x = a$, sive *QP = HP*, & anguli *AQD*, *QAD* fient semirecti.

Sit igitur in fig. 131. *FB = TA = z*, *TK = KE = FL = GM = d₁*, *FG = ds*. Quantitas fluidi parallele ad axem *PA* incurrentis in anulum revolutione elementi *FG* descriptum proportionalis erit rectangu-

lo

lo — $\int d\zeta$, & tota solidi in fluido progredientis resistentia proportionalis erit summæ omnium — $\frac{\int d\zeta}{ds}$. Traducatur hæc quantitas ad bina ele-

menta curvæ FG , GN , productaque KG in g , ut sit variatio exigua $Gg = \varphi$, & bina elementa proxima Fg , gN , atque ex G , g in Fg , GN ductis perpendicularis Gm , gn sit $Gn = MN \cdot \varphi$, & $gm = GL \cdot \varphi$.

Ob minimam resistentiam erit

$$\frac{FB \cdot FL}{FG^2} + \frac{GC \cdot GM}{GN^2} = \frac{FB \cdot FL}{Fg^2} + \frac{GC \cdot CM}{gN^2},$$

& cum sit $Fg^2 = FG^2 + 2GL \cdot \varphi$, $\frac{1}{Fg^2} = \frac{1}{FG^2} - \frac{2GL \cdot \varphi}{FG^4}$, &

$$\frac{1}{gN^2} = \frac{1}{GN^2} + \frac{2MN \cdot \varphi}{GN^4}, \text{ erit } \frac{FB \cdot FL \cdot GL}{FG^3} = \frac{GC \cdot CM \cdot MN}{GN^3}$$

scilicet si sit $IF = y$, & $LG = dy$ pro singulis quæsitæ curvæ elementis constans debet esse quantitas $\frac{\int d\zeta dy}{ds}$. Quare si fiat radius

baseos $HP = a$, cum ob minimam resistentiam solidi revolutione elementi $PHhp$, semirecti esse debeant anguli PHQ , PQH , & in ipso curvæ initio fiat $\zeta = a$, & $d\zeta = dy = ds \sqrt{\frac{1}{2}}$; in solido minimæ resistentiæ erit semper $\frac{\int d\zeta dy}{ds} = \frac{1}{2} a$.

COROLLARIUM.

Cum $d\zeta : ds$ sit ratio semiordinatæ FB ad tangentem, & $dy : ds$ sit ratio subtangenti ad tangentem ipsam, si in curvæ initio H ducatur HQ parallela rectæ curvam tangenti in puncto F , erit

$$\frac{4\zeta \cdot d\zeta \cdot dy}{ds^2} = 4\zeta \cdot \frac{PH}{HQ} \cdot \frac{PQ}{HQ} = a, \text{ sive erit } FB : HQ = HQ' : 4PH \cdot PQ,$$

quæ est prior constructio problematis a Newtono tradita in scholio Propof. XXXIV. Lib. II. Æquatio $4\zeta d\zeta dy = a ds^2$ illico reducetur si fiat $dy = p d\zeta$, & $dy^2 + d\zeta^2 = ds^2 = (1 + p^2) d\zeta^2$. Fiet enim primo $\zeta = \frac{a(1 + p^2)}{4p}$, ac deinde $y = S \cdot p d\zeta = p\zeta - S \cdot \zeta dp =$

$$\frac{1}{2} a (1 + p^2) - \frac{1}{2} a \cdot S \left(\frac{1}{p} + 2p + p^3 \right) dp, \text{ \& posterioris termini}$$

ni integrali sumpto erit $y = \frac{1}{2} a (\frac{1}{2} p^4 + p^2 + 1 p - \log. p)$. Joannes Bernoullius in Actis Lipsiensibus anni 1700 loco $\frac{1}{2} a$ scripsit dumtaxat a . Si coordinatis commutatis affumeretur æquatio curvæ $xydy' dx = adx^2$, posito $dy = p dx$ erueretur $y = \frac{a(1+p^2)^2}{4p^2}$, & $x = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4p^2} + \frac{1}{p^2} + 1 + \log. p \right)$. Eulerus in Ex. V. Prop. III. de Iloperimetris valorem ignotæ x duplo majorem scripsit.

SCHOLION.

Eorum omnium recensio, ac consideratio, quæ circa resisten-
tiam motorum corporum a Newtono primum, ac deinde a celebe-
rioribus aliis Mathematicis fuerunt tradita, ampliorem jam tractatio-
nem, subtilioremque postulerent. At ne de corporum resistantia fu-
sius agamus in primis facit quod quæ hæc in re tradi possunt ei-
dem semper hypothefi innitantur omnia, quod ictus in elementum
quodvis solidi corporis a fluido exercitus proportionalis sit ele-
mento superficiæ, & densitati fluidi, ac simul etiam quadratis velo-
citatibus, & sinus anguli incidentiæ. Quæ singula cum in ea tantum
hypothefi locum habere possint quod fluidum ex particulis sejunctis
constet, ac se invicem minime impredientibus, cumque in casu fluidi
cujuslibet continui, & particularum contiguarum in primis duplicata
illa ratio sinus anguli incidentiæ ab institutis experimentis discrepet,
neque ullo modo determinari possit ea resistantiæ differentia, quæ
ex mutuo particularum omnium occurfu, ac recurfu oritur; manife-
stum est analyticam, ac geometricam resistantiæ theoriam ad abstra-
ctas potius hypothefes quam ad physicas naturæ leges explicandas va-
lere posse. Quæ jam practicæ regulæ in præcipuo Ballisticæ proble-
mate, in jactu scilicet corporum dirigendo deficienti theoriæ possint
substitui in Coroll. III. Probl. XIX. indicatum est. Quæ pertinent
ad resistantiam cœlestium corporum in subsequente volumine traden-
tur, & cum medii ætherei densitatem tam parvam esse deprehende-
mus ut nulla inde oriri possit sensibilis Cometarum, Planetarumque,
ac Satellitum retardatio, patebit omnem resistantiæ theoriam nihil ad
illustrandam cœlestem physicam conducere. Hisce igitur investigatio-
nibus omisiss ad aliam Mechanicæ partem nos convertemus, quæ a-
quarum fluentium theoriam respicit, eaque cum præcipue ad regio-
num nostrarum casus pertineat italico idiomate tradenda erit.

DELLA MECCANICA ³¹¹

PARTE SECONDA

CHE CONTIENE L' APPLICAZIONE

AI FIUMI, AI TORRENTI, E AI CANALI NAVIGABILI
PRINCIPALMENTE D' ITALIA, E DI LOMBARDIA.

LIBRO PRIMO.

DELLA TEORIA GENERALE DEI FIUMI,

CAPO PRIMO.

DELL' ORIGINE DEI FIUMI ;
E DELLE CAUSE, E DEI FENOMENI DELLE PIENE :



Filosofi solitarj, che s' abbandonano alla semplice immaginazione, e che nel silenzio delle loro biblioteche si studiano di ridurre la natura in sistemi prima di consultarla e osservarla in se medesima, possono ben figurarsi, che le acque de' grossi Fiumi si versino dalle aperture delle montagne, e che o per piccoli meati della terra, o per le maggiori caverne sotterranee, vi siano continuamente somministrate dal mare. Un Filosofo viaggiatore, che porti gli occhj suoi proprj sul alveo di qualche Fiume, e che si prenda l' incomodo di rimontarlo sino alla prima sorgente, non può riconoscervi altre cagioni fuorchè le nevi sciolte, e le piogge. I Fiumi e maggiori, e minori in tutte le prime loro diramazioni si risolvono gradatamente in così piccole vene d'acqua, che nè per ciascheduna di esse, nè per tutte insieme fa bisogno di ricorrere ad altro che alle semplici ordinarie meteore.

Mechanica.

R r

Nel.

Nelle varie commissioni, che ho avuto in Lombardia, in Toscana, nello Stato Veneto, e nel Tirolo, nei viaggi, che ho fatto di quà e di là dalle Alpi, e dal Mare, e molte volte ancora per semplice diporto ho seguitato lungamente il corso di varj Fiumi. Ho risalito una volta tutto il Fiume Magra dalla sua foce in Mare presso Sarzana sino alle sette polle, che dove si uniscono insieme sette miglia sopra Pontremoli incominciano a prendere il nome di Magra: poi superato il dorso del monte, alla distanza di meno d' un miglio, ho similmente riconosciuto le prime dodici sorgenti del Taro, e ne ho seguitato il corso sino allo sbocco del fiume Pò. Ho pure costeggiato il fiume Toccia dal suo sbocco nel Lago Maggiore sino all' origine del ramo principale, ch'è sulla cima del monte Semplon, e di là scendendo nel Vallese ho lungamente seguitato uno degl' influenti del Rodano. Ho riconosciuto la Fersina, il Panaro, la Lima, e molti altri torrenti vicino alle loro sorgenti, e l' attento lettore potrà riconoscere sulle generali, e particolari carte Geografiche, che facilmente si trovano dappettutto, i nomi, e i luoghi, dei quali sono per parlare in questo, e negli altri capitoli susseguenti.

Rimontando l'alveo d' un Fiume si vede sparso il suo fondo di materie sempre più grosse, si fa in tratti eguali maggiore la caduta delle acque, e la quantità di esse si diminuisce. E questa diminuzione si fa per una continua serie di piccolissime differenze, e con una degradazione tale, che bisogna averla sott' occhio per formarne una giusta idea. Il tronco principale del Fiume si forma di molti altri minori rami, e questi di moltissimi ramoscelli gradatamente sempre più piccoli. Piccolissime sono le prime polle, che somministrano ciascuno di essi: si vedono gemere scillare dalle sempre umide coste delle colline, e delle montagne: s' ingrossano visibilmente dalle altre minutissime vene d'acqua, che sono sparse su tutt' i fondi, e sulle sponde, che le riuniscono. In somma è visibilmente la stessa crosta della terra, che ci tramanda a poco a poco da tutt' i punti della sua superficie tutte le acque correnti, ed è una vanità fisica d' immaginare dei condotti sotterranei, piccoli o grandi, che portino tutto un Fiume dalla superficie del mare sino alla cima delle montagne.

Ma

Ma per sentire ancor maggiormente la vanità delle antiche questioni è necessario risolverle nei loro primi elementi. Non si può metter in dubbio, che le acque portate dai Fiumi in tempo delle piene non vengano unicamente dalle piogge e dalle nevi: e così tutta la questione si potrebbe al più limitare alla sola quantità d'acqua, che vi scorre ordinariamente. Ma l'acqua ordinaria de' Fiumi è di una quantità molto piccola rispetto a quella che sopravviene nelle piene grandi, e mezzane. La Senna al Ponte Reale di Parigi ha qualche volta in Estate solamente tre piedi di altezza. Nella piena del 1763. s'è alzata sino a piedi $12 \frac{1}{2}$: e nel 1740. è arrivata sino a 25. Il Pò nelle sue piene ordinarie cresce quattro volte di altezza: e però secondo le regole che si sono spiegate a suo luogo, in eguale larghezza d'alveo e in egual tempo, dovrebbe esso portare otto volte più d'acqua nelle sue piene, che nello stato ordinario di bassezza. A ciò aggiugnendo l'allargamento grande del letto, e riflettendo che il Pò ha due, o tre piene l'anno, che qualche volta le piene durano sino a 30, e 40 giorni, e che vi sono spesso molte altre mezze piene, si farà manifesto che l'acqua delle piene, cioè quella che certamente proviene dalle piogge e dalle nevi, supera di gran lunga la quantità dell'altra, che ha il Pò nello stato ordinario. Lo stesso si deve dire degli altri Fiumi.

Ora le nevi, che anche in tempo d'Estate rimangono sulla cima degli appennini e delle alpi, i temporali e le piogge, che sono sempre più dirotte e frequenti alla montagna, le nebbie, che vi tengono inumidito sempre il terreno, tutte queste cause concorrono a fare che i luoghi montuosi siano rispetto alle acque ordinarie d'un Fiume ciò che tutt' i luoghi montuosi, e piani sono nel tempo delle piene. La quantità della pioggia, che nel piano di Parigi è di circa 18, o 20 pollici l'anno, tra le montagne della Garfagnana arriva sino a 90, e a 100 pollici. L'evaporazione sempre minore che al piano non basta al consumo delle acque raccolte insieme nei più ampj crateri delle montagne, e vi lascia dei laghetti perenni anche alla cima. Le fenditure e i piccoli canali dei terreni non coltivati, che vi si trovano, permettono

Rr 2

alle

alle acque di penetrare; e insinuarsi profondamente; e i terreni medesimi sempre inzuppati le rendono largamente per qualunque piccolo scavo che vi si faccia. Così le montagne, che somministrano acque perenni, sono sempre nello stato di pioggia, come lo sono di tanto in tanto i luoghi montuosi, e piani per le acque temporanee delle piene.

Adunque in tutta la presente questione, come sul principio del secolo è stata trattata al tavolino da molti Filosofi Italiani, Francesi, e Inglese, pare che si sia dato più alla fantasia, che all'osservazione. Era una semplice immaginazione del Des-Cartes, che le acque del Mare passassero per le caverne sotterranee fino al centro delle montagne, e col calore interno vi si filtrassero e raddolcissero; ed era un'altra immaginazione di Vallisnieri, e di Schencher, che i laghetti di alcune montagne servissero di alimento ai Fiumi, che sorgono altronde, per mezzo di tanti sifoni scavati interiormente nella creta, nel tufo, e nei massi, che formano come l'ossatura di tutto il globo. La Geografia ci presenta veramente alcuni casi di acque e di Fiumi, che scorrono lungamente nelle caverne sotterranee, e tra i seni più cupi delle montagne, ed io parlerò dei casi principali descritti da altri autori, e di altri casi, che ho potuto riconoscere da me medesimo, e li esporrò in un opuscolo separato su i Fiumi sotterranei. Ma questi sono tutti casi e fenomeni particolari. Generalmente parlando la stessa incrostatura delle montagne inumidita e inzuppata dalle piogge e dalle nebbie ordinarie di tutto l'anno tramanda da tante piccole e continuate sorgenti l'acqua che si raccoglie dentro l'alveo dei Fiumi nel tempo delle maggiori siccità: e le generali piogge cadute alla pianura, e le nevi sciolte sulle montagne somministrano visibilmente la molta maggiore quantità d'acqua, che forma le piene dei Fiumi.

Questo è un fatto di pura ispezione, e qui neppure abbisognano tutt' i calcoli, con cui l'Halley, e il Mariotte hanno voluto mostrare, che la quantità delle piogge e delle nevi sciolte supera di gran lunga la portata di tutti i Fiumi. Quei calcoli includevano ancora una falsa supposizione, che la stessa quantità d'acqua non torni a svaporare, e non ricada in pioggia diverse volte nel

nel corso di tutto l' anno: che per esempio i trenta pollici d'acqua che in qualch' anno ricade in pioggia nel nostro Paese non siano cinque soli pollici che facciano sei volte il giro dell' atmosfera. Questa supposizione non è mai stata rilevata nel fervore delle dispute che si agitavano in Italia ai tempi del Vallisnieri. Ma non occorre neppure di correggere i calcoli della pioggia, e adattarli alle supposizioni più verisimili. Non si vede mai crescere considerabilmente alcun Fiume senza che sia preceduta qualche diretta pioggia, o che si sappia d' essersi sciolta una quantità grande di neve alla montagna. La differente durata delle piene, che corrispondono all' una, o all' altra di queste due cagioni, non lascia luogo di sospettare che ve ne possa essere una terza. Le nevi altissime delle montagne si sciolgono colla forza o del Sole, o dei venti che operando in un lato delle istesse montagne più che in un altro, e solamente in alcune ore del giorno, ricercano maggior tempo a rivolgere dentro gli alvei dei Fiumi una quantità d' acqua eguale a quella, che può arrivarvi colla continuazione delle piogge. Così le nevi sciolte fanno crescere i Fiumi più lentamente: e i temporali, e le piogge dirette li fanno crescere molte volte tutt' ad un tratto. Tra di noi le più lunghe piogge si hanno ordinariamente in Autunno, e i temporali in Estate: e però il Lambro, il Seveso, la Molgora, e gli altri torrentelli di corso minore si gonfiano ordinariamente in Autunno, e qualche volta ancora in Estate. L' Adda, il Tesino, il Pò, che colle varie diramazioni dei primi influenti s' internano maggiormente nelle alpi, hanno le piene maggiori d' ordinario in tempo di Estate.

Alcuni Autori tra le varie cagioni delle piene hanno annoverato anche i venti, non solamente in quanto contribuiscono a sciogliere le nevi delle montagne, ma perchè in oltre, spirando qualche volta con una contraria direzione, possono ritardare il corso dei Fiumi, ed accrescerne l' altezza. Quest' articolo fu ancora più lungamente dibattuto nelle più antiche controversie Idrauliche di Bologna. Il Guglielmini limitò l' azione dei venti al semplice rialzamento del pelo basso del Mare, e al ringorgo che ne deve poi nascere dentro gli ultimi tronchi dei Fiumi. Il Zendrini nel §. VI.

del

del Cap. VIII. oppose di non trovarsi ragione alcuna, per cui i venti arrivando qualche volta a rialzare sensibilmente la superficie media dei Mari, non possano fare altrettanto anche in quella dei Fiumi. Ma la ragione di ogni differenza è la stessa, per cui i venti eccitando dei flutti altissimi in Mare, non arrivano mai a produrre, che un piccolo increpamento nella superficie dei nostri Fiumi. L' azione continuata dei venti più impetuosi in un recipiente vastissimo e libero come il Mare, vi fa gradatamente crescere gli ondeggiamenti sino a quel segno, che rivolgendosi essi per lunghissimo tratto dell' una all' altra spiaggia, si abbassi da una parte sensibilmente il livello medio delle acque, e si rialzi dall' altra. Onde quando concedasi solamente che gli effetti debbano diminuirsi con qualche proporzione della superficie e della massa che si agita, non si avrà mai altro dall' impeto dei venti, e della minore obliquità delle direzioni, a cui possono essi ridursi sulle pianure, e tra le vicine sponde del Fiume, che appunto un piccolo increpamento, unicamente superficiale, e affatto indifferente allo scarico delle piene. Però quando io sento addurmi degli esempj di piene cresciute in tempo di qualche vento contrario, credo che si manchi di Logica confondendo le circostanze casuali, e indifferenti colle vere cagioni, e prendendo per principio d' una cosa ciò ch' è unicamente anteriore di tempo.

Ma per passare dalle cause ai fenomeni delle piene, ciò che si osserva generalmente in tutt' i Fiumi e maggiori e minori si è, che le variazioni di altezza sono sempre più grandi sul principio, e sul fine, che verso il colmo delle piene. La ragione si è, che la stessa quantità d' acqua cagiona sempre una minore variazione di altezza quando i Fiumi sono più gonfi. Per esempio acciò le altezze siano successivamente come 5, 6, 7, a norma di quanto si è detto nel Cap. IV. del libro antecedente, bisognerebbe che le intere quantità d' acqua fossero 5, $6\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$. Per questa ragione ancora nei Fiumi minori crescono e scemano più prestamente le piene, che nei maggiori. Le altre differenze sono principalmente, che le piene più grandi sono di più corta durata, e arrivano più frequentemente nei Fiumi più piccoli. Mentre in primo luogo nei Fiumi mi-

minori ricercasi un minor numero di combinazioni per formare una piena, e nei Fiumi maggiori bisogna che concorrano insieme le cause più generali. E in secondo luogo gl' influenti dei Fiumi minori sono sempre meno distanti, e di corso più breve, onde operando in tutti la cagione medesima arrivano ancora ad unirsi con minore differenza di tempo. Laddove nei Fiumi maggiori dopo una pioggia generale, o dopo un subitaneo scioglimento di nevi incominciano ad arrivare le piene degl' influenti, che sono di corso più breve, e poi degli altri, che sono di origine più lontana, e così procedendo gradatamente dagli uni agli altri tanto dura la piena totale quanto basta allo scarico di tutti.

Il concorso di tutti gl' influenti forma il colmo della piena del recipiente. Ma ancora un Fiume solitario, che seguiti a decorrere senza l'aggiunta di nuove acque, ha preteso il Zendrini che l'altezza d' una piena arrivi in qualche luogo ad un massimo, ch' esso chiamava il ventre della piena, ed ha anzi cercato nel Cap. IX. di darne l' equazione analitica. E certamente se fosse data la curvatura del fondo, posto che in ciascuna sezione in egual tempo si debba scaricare un' eguale quantità d' acqua, come si è detto nel Cap. I. del libro antecedente, sarebbe facile di ritrovare la curvatura della superficie, e il luogo della massima altezza. Ma la linea del fondo in molti casi è un complesso di linee rette, e in molti casi è affatto irregolare, e così l' applicazione della Geometria in questo problema manca di supposti, e di dati. Tutto ciò che può dirsi generalmente si è, che nei tronchi superiori dei Fiumi dev' essere minore l' altezza, e per ragione della maggiore pendenza del fondo, e perchè il corpo d' acqua è minore: che successivamente crescendo il corpo d' acqua, e diminuendosi il pendio, deve farsi maggiore l' altezza: e che in vicinanza di uno scarico libero si deve rendere nuovamente minore l' altezza delle sezioni. E in fatti le altezze degli argini anche nei Fiumi più grandi vanno gradatamente scemando in proporzione che si accostano al Mare: le variazioni delle piene riescono appena sensibili negli ultimi tronchi: e molte volte vicino alla foce non si può scorgere se sia seguita nei tronchi superiori una piena.

CAPO SECONDO.

DELLE VELOCITA', E DELLE RESISTENZE DEI FIUMI;
E DELLE SPERIEENZE FATTE

PRINCIPALMENTE IN FRANCIA, E IN TOSCANA.

IL Galileo nel suo discorso sopra il Fiume Bisenzio incominciò ad applicare alle acque correnti le prime leggi di tutti i corpi che cascano in un piano inclinato: e le prime leggi sono, che le velocità acquistate colla caduta si eguagliano in due piani di qualunque lunghezza quando siano eguali le altezze, e che generalmente le velocità seguano la ragione sudduplicata delle altezze della caduta. Sostenne adunque il Galileo che indipendentemente da tutte le resistenze debba mantenersi sempre la stessa velocità in due canali di differente lunghezza e tortuosità, quando siano stabiliti tra i medesimi termini: e fu questo fondamento disse di riguardare come insufficienti tutti i vantaggi dell' accelerazione, che alcuni si promettevano nel raddrizzamento degli alvei dei Fiumi: e poichè trattavasi allora di rettificare diverse tortuosità nel Fiume Bisenzio, e di portarlo a sboccare in Arno per una linea più breve, convenne il Galileo che si potessero levare gli angoli e le risvolte maggiori, come poi fu fatto eseguire dal Viviani, e nel resto limitossi a proporre di allargar l'alveo, sgombrare il fondo dai maggiori impedimenti, e rinforzare gli argini di tutto il Fiume. Dopo di ciò passando a considerare le resistenze che nascono dalla varia direzione del moto nelle risvolte e nei gomiti dei fiumi, accennò l'altro teorema fondamentale, e utilissimo: chè tutte le variazioni di direzione non portano alcuna diminuzione sensibile della velocità quando levati gli angoli rettilinei il moto sia continuato sempre in una qualunque curva regolare e continua.

Il Castelli spiegò i primi e i più generali rapporti delle velocità, delle ampiezze delle sezioni, e della quantità d' acqua nei Fiumi, e ricercando la legge della velocità incominciò a considerare le acque che corrono per la semplice pressione delle altre acque superiori. Si sono indicati nel Coroll. II. del Theor. VIII. del Lib. III. quei primi rapporti più generali, e si è avvertito che dovendo passare

fare in egual tempo un' eguale quantità d' acqua per tutte le sezioni di un Fiume, che resti per qualche tempo nello stato di permanenza, dev' essere eguale in tutte le sezioni il prodotto dell' altezza della larghezza e della velocità, e ciascuna di queste tre quantità dev' essere in ragione inversa delle altre due: il qual teorema però neppure nelle sezioni rettangole non può verificarsi se non prendendo la velocità media e ragguagliata: e per farne qualche precisa applicazione si ricercherebbe che a qualunque profondità si conoscesse la velocità vera per poterne calcolare la media. Il Castelli dopo di aver proposto indefinitamente quel teorema, e le facili analogie che ne dipendono, non lasciò di cercare la legge della velocità che dipende dalla pressione. Ma ingannato da alcune grossolane sperienze, che non occorre di riferire, e ne' suoi ragionamenti avendo considerato la velocità come l' effetto intero della pressione, credette che la velocità fosse proporzionale all' altezza di tutta l' acqua che preme. Il Torricelli appoggiandosi ad altre più precise sperienze sostituì alla ragion semplice la ragione sudduplicata delle altezze: la sola che ancora si potrebbe dedurre dalle leggi della pressione quando se ne misurasse l' effetto dalla quantità assoluta del moto dell' acqua che scorre dai fori aperti nei vasi, o per le diverse parti della sezione libera di qualche fiume.

Il Guglielmini nel libro sulla misura delle acque correnti trattò distintamente della velocità che dipende dalla caduta, e di quella che dipende dalla pressione. Ambidue questi principj hanno luogo non solamente in diversi Fiumi, ma ancora in diversi tronchi del Fiume medesimo. Nei tronchi superiori, dove le materie sono più grosse, minore il corpo d' acqua, e grandissimo il pendio, l' accelerazione delle acque dipende interamente dalla caduta. Nei tronchi inferiori, dove le materie si diminuiscono di mole, dove non è più sensibile la pendenza del fondo, e dove per lo contrario il corpo d' acqua è accresciuto, o per la confluenza di altri fiumi, o per le sorgive continuatamente sparse al lungo dell' alveo, tutta la velocità dipende dalla pressione. Nei tronchi intermedj la velocità dipende o da una cagione o dall' altra secondo ch' è maggiore l' altezza della caduta libera, o del corpo d' acqua che preme: e poichè la veloci-

Meccanica.

Ss

tà

tà nel primo caso è quella stessa che si acquisterebbe cadendo da tutta l'altezza verticale del piano inclinato, e nel secondo caso è quella che si acquisterebbe cadendo da tutta l'altezza della colonna d'acqua che preme; insino a tanto che la velocità acquistata colla caduta farà maggiore di quella, che può competere all'altezza del corpo d'acqua, le particelle di essa faranno come sottratte all'azione e alla forza della pressione: e solamente quando farà minore l'altezza della caduta, allora colla pressione si aggiungerà quanto manca per uguagliare tutta quella velocità, che si acquisterebbe cadendo da tutta l'altezza del corpo d'acqua. Così dunque passando dai primi agli ultimi tronchi dei Fiumi una causa succederà all'altra, ed agirà o l'una o l'altra causa per prevalenza senza che si cambj punto la legge e l'ordine degli effetti.

Nei tronchi superiori dei Fiumi le resistenze tolgono una gran parte della velocità acquistata colla caduta antecedente, e non lasciano alle acque se non la sola velocità che colla susseguente caduta si va sempre rimettendo: nei tronchi inferiori ordinariamente sono molto minori le resistenze, e subito che la pressione torni ad esercitarsi liberamente viene a rimettersi l'intera velocità, ch'era stata prima impedita. Gli alvei di Fiumi, principalmente nelle parti superiori, sono interrotti dalle scogliere, e dalle chiuse o naturali o artificiali, e da altri maggiori ostacoli, che tolgono quasi del tutto la velocità acquistata colla caduta antecedente, e così fanno che tutto il Fiume si possa considerare come distinto in tanti tronchi differenti. Però l'altezza, e la velocità della caduta dovrebbe incominciare a diminuirsi non già dalla vera e prima origine di tutto il Fiume, ma bensì da quel luogo dove s'interrompe la velocità acquistata colla caduta precedente: il qual luogo si riguardava dai Grandi come l'origine equivalente del fiume. Ma ancora con questa limitazione la velocità si troverà sempre molto minore di quella che corrisponde all'altezza del tronco proposto. Per esempio in un Fiume, come l'Adda, che abbia sette braccia di caduta per miglio, dopo dieci miglia di corso libero al disotto di qualche chiusa, la velocità si troverà sempre molto minore di quella, che si acquisterebbe cadendo dall'altezza di braccia 70. La ragione si è che oltre alle chiuse, e agli altri maggiori ostacoli opposti al corso del Fiume, gli

angoli e i risvolti delle ripe, ed altri impedimenti consimili, qualunque piccoli, ordinariamente vengono a moltiplicarsi tanto da togliere una gran parte della velocità. Nel Capo quarto del Libro terzo si è detto come si possa riconoscere la velocità alla superficie di un fiume col facile esperimento dei galleggianti, e come dalla velocità superficiale si possa calcolare l'altezza della caduta libera alla superficie, e quindi determinare la velocità in qualunque altro punto della sezione, e ricavarne la portata intera del fiume. Nei luoghi dove io ho avuto occasione di fare qualche riscontro delle quantità d'acqua, non ho ritrovato che una velocità molto piccola alla superficie, la quale ancora trascurata non avrebbe fatto variare sensibilmente la proporzione delle quantità d'acqua.

Dove la velocità delle acque correnti dipende interamente dalla caduta, la velocità dev'essere maggiore alla superficie, in cui la caduta è maggiore. Dove la velocità dipende dalla pressione non può averfi una velocità maggiore verso la superficie se non perchè sian maggiori le irregolarità, e le resistenze del fondo, e sia minore il corpo d'acqua, e vi si venga a risentire l'effetto delle resistenze del fondo sino in poca distanza della superficie. Questo deve essere il preciso caso delle sperienze fatte dal Mariotte, e da lui riferite nel discorso secondo della seconda parte del suo trattato sopra il movimento delle acque. Le sperienze sono di due fori. La prima si è che attaccate due palle di cera con un filo della lunghezza di un piede, in una delle quali erano poste delle pietruzze per rendere la sua gravità specifica un poco maggiore di quella dell'acqua, per modo che sommerse le due palle, la più pesante, ch'era attaccata inferiormente, tendeva il filo, e teneva la più leggiera quasi a fior d'acqua; la stessa palla inferiore restava addietro, principalmente nei luoghi dov'erano delle erbe sul fondo, ma poi nei luoghi dove l'acqua incontrando qualche ostacolo s'alzava un poco, e in seguito prendeva un corso più rapido, come sotto ai ponti, la palla inferiore andava avanti alla superiore. La seconda sperienza si è che gettando nello stesso canale una quantità di grosse schegge di legno, delle quali alcune andavano a fondo più presto delle altre, osservò il Mariotte che le schegge restavano sempre più indietro

tro a proporzione che si accostavano al fondo, e trovò pure che succedeva la stessa cosa nelle erbe portate insieme coll' acqua.

Si è fra noi dubitato se veramente reggessero le sperienze del Mariotte, e questo anzi fu il soggetto del premio proposto dall' Accademia di Mantova per l' anno 1772. Io qui non mi diffondo a provare che le sperienze reggono veramente. Poichè essendo piccolissima la differenza della gravità specifica delle palle di cera e dell' acqua, come espressamente ha avvertito il Mariotte, è manifesto che la palla inferiore non poteva continuare a tenersi più indietro della palla superiore, se non perchè fosse veramente sommersa in luogo di minore velocità. E in fatti sotto i ponti, e in altri luoghi di corso maggiore, non ostante quella piccola differenza delle gravità specifiche, la palla superiore era quella che restava più indietro. Le schegge tagliate dallo stesso legno non potevano andare più presto a fondo se non per la diversa maniera, con cui si lasciavano cadere nell' acqua: e nelle erbe portate via e notanti nell' acqua stessa a diverse profondità non poteva trovarsi una differenza sensibile di peso: onde se quelle che galleggiavano al di sopra, precedevano sempre quelle altre, che scendevano verso il fondo, la velocità necessariamente doveva esser maggiore alla superficie. Reggono adunque le sperienze del Mariotte. Ma siccome lo stesso Autore nel Discorso citato ha riferito che le sperienze erano fatte in un piccolo canale, profondo tre soli piedi, e sparso d' erbe e di altri ostacoli al moto libero, non ci si presenta in esse che un caso particolare, in cui le resistenze del fondo si risentivano alla distanza di due e più piedi. Ed è pure un altro caso particolare quello che ci ha riferito il Pitot negli atti dell' Accademia di Parigi l' anno 1732, della continua degradazione di velocità da lui trovata col suo tubo recurvo andando dalla superficie della Senna sino a due piedi e mezzo di profondità. Poichè la Senna non avendo in tempo di estate più di tre o quattro piedi d' acqua, ed avendo il fondo irregolare, e sparso d' erbe e di ridossi, non può servire di regola e di esempio per la velocità delle acque, che corrono nelle sezioni e negli alvei regolari degli altri Fiumi.

Ma dopo quelle antiche sperienze di Francia devono in questo luogo-

luogo particolarmente considerarsi le nuove sperienze fatte quattr' anni sono in Toscana dal Celebre Sig. Ximenes con una specie di ventola Idraulica, che si è già indicata al principio del capo quarto del libro antecedente, e che si rappresenta agli occhi bastantemente nella figura 133. La lunghezza AB della ventola era di circa un braccio, l'altezza AE di circa un mezzo braccio, e di circa un quarto di braccio la distanza AC dall' albero Pp , che insieme colla ventola girava liberamente intorno ai due perni P, p . La ventola si poteva alzare e abbassare al lungo dell' albero per mezzo di una catenella di ferro, e si opponeva all' impeto della corrente: ed acciò vi potesse reggere sotto qualunque angolo di obliquità, era incastrata sulla cima dell' albero una rotella R , scavata nel suo contorno, ed avvolta nella funicella RPV , con cui sostenevasi il peso Q . Acciò poi e la ventola e l' albero si potessero fissare sul fondo, e in una data perpendicolare di un fiume, vi era collegato un castello di tre o di quattro altri alberi, uniti insieme alle due estremità con una specie di telajo triangolare o rettangolo. La variazione degli angoli, a cui si piegava la ventola per la variata forza delle acque, si misurava coll' indice PM , ch' era pure incastrato sulla cima dell' albero, e che girava nel semicircolo orizzontale LMI . Col castello di tre alberi si sono fatte le sperienze in cinque perpendicolari del Canale di Castiglione: e in quattro perpendicolari prese nell' Arno sotto allo sbocco di Cusciana s' è adoperato il castello più consistente di quattro alberi. In ciascuna delle suddette nove perpendicolari s' è ritrovato che la ventola aggravata d' un dato peso piegavasi ad un angolo maggiore verso il fondo che verso la superficie, e che però la velocità delle acque andava sempre scemando dalla superficie sino al fondo.

Il chiarissimo Autore dopo aver descritte le sue sperienze, e di avere rilevata generalmente questa degradazione delle velocità, ha cercato ancora di misurare le quantità assolute delle velocità istesse; ed ha calcolato nove tavole, secondo le quali il decremento totale della velocità dalla superficie al fondo sarebbe stato qualche volta sino di un terzo di essa. Ma io non insisterò molto su questi calcoli, che sono principalmente fondati sopra l' ipotesi che le forze

eser-

esercitare dall' acqua contro un ostacolo di una data lunghezza opposto sotto differenti angoli alla corrente siano proporzionali al semplice seno degli angoli dell' incidenza del fluido, come se fosse sempre la stessa quantità di fluido che andasse ad urtare contro di un piano, e quando il piano si oppone direttamente alla corrente, e quando vi si piega con qualsivoglia obbliquità, come l' Autore espressamente asserisce al num. 162. Considerando la sola forza delle particelle che vanno ad urtare contro di un piano, la forza sarebbe proporzionale al quadrato del seno dell' angolo d' incidenza, come si è detto nel Probl. XIV. libro antecedente. Volendo poi considerare l' azione delle particelle, che hanno già urtato, e che ricadono indietro dal piano, e non bastando le teorie Idrauliche per indicarci i precisi elementi del calcolo, secondo le sperienze fatte a Parigi si porrebbe supporre che la forza seguisse la proporzione di una potenza del seno, il cui esponente fosse $1 \div$ per l' angolo di 63 gradi, di $1 \div$ per l' angolo semiretto, di $1 \div$ per l' angolo di circa 33 gradi, e solamente negli angoli piccolissimi si potrebbe assumere la semplice proporzione del seno, come si è avvertito nei corollarj di quel Problema. Il Sig. Bossut negli Atti dell' Accademia di Parigi dell' anno 1778. facendo nuovamente il confronto delle sperienze accennate credette che la forza dell' urto potesse esprimersi generalmente con una potenza del seno dell' angolo d' incidenza, che avesse per esponente il numero $3 \div$, e che fosse moltiplicata per il coefficiente costante 1, 051. Il Sig. Eulero trovò degli altri rapporti: ma nessuna sperienza, e nessuna teoria ci dà fondamento di credere che la forza segua generalmente la semplice proporzione dei seni.

Tra le altre ipotesi, a cui si appoggiano i calcoli delle assolute velocità, deve ancora notarsi quella in cui si suppone che la velocità sia uniforme dall' alto al basso di una ventola d' un mezzo braccio di altezza, o che la velocità media sia quella che corrisponde alla metà della ventola. L' altezza della ventola ha una proporzione troppo sensibile alla profondità delle immersioni, e non vi si può trascurare la differenza delle velocità, e il calcolo di essa suppone data e conosciuta la legge che si vorrebbe determinare colle sperienze della ventola Idraulica. Per questa ragione io riguardo

co-

come più preciso e più semplice il metodo, che i Signori Alembert, Bossut, e Condorcet hanno seguitato a Parigi anche per riconoscere la differente forza dell'urto che corrisponde alla diversa velocità delle acque, e alla diversa superficie dell'ostacolo. Essi hanno fatto le loro sperienze in una vasca rettangola d'acqua stagnante larga 100 piedi, e lunga il doppio, con 19 battelli composti di un parallelepipedo coperto di un cuneo retto alla prua, che movendosi contro l'acqua con una velocità uniforme lasciava distinguere precisamente le variazioni corrispondenti ai varj gradi di velocità, e alla differente ampiezza dei due piani anteriori, e alla differenza degli angoli con cui si univano. Nella ventola Idraulica era più composto il problema. Però lasciando a parte la specificazione della difficoltà, che potrebbe ricavarfi dal calcolo delle velocità assolute, risguarderò quì la sola difficoltà generale che in quattro perpendicolari dell'Arno, e in cinque altre perpendicolari prese nel Canale di Castiglione la velocità verso il fondo si sia trovata minore che verso la superficie.

Ma quì vi sono tant' altre sperienze da contrapporre. Quando trattavasi di confermare ciò che risulta dalle prime leggi della gravità e della pressione, che nei tronchi regolari, e nelle sezioni rettangole dei canali e dei fiumi la velocità verso il fondo cresce precisamente come le radici delle altezze, si sono addotte le sperienze fatte colla fiasca Idrometrica dai Matematici Bolognesi, e quelle che avea fatto il Zendrini nei casi delle minori deviazioni del pendolo dal perpendicolo, nei quali casi l'uso del quadrante sembra essere più sicuro per determinare la legge precisa della velocità. Per provare generalmente che le velocità vadano scemando dal fondo alla superficie si possono addurre tutte le sperienze fatte dal Zendrini col pendolo in diciassette perpendicolari del Pò: poichè in tutta la serie di quelle sperienze non se ne trovano che due sole che possano portare qualche eccezione. La prima era fatta nel Pò d'Arianò alla Mesola, e nella profondità di piedi $6\frac{1}{2}$: e la seconda vicino alla chiavica di Raccano nella profondità di piedi $4\frac{1}{2}$. Nella prima sperienza la deviazione del pendolo cresceva gradatamente dalla superficie fino a tre piedi di profondità, e poi scemava nel piede susseguente, e tornava di nuovo a crescere fino al fondo: e però quell'esperienza non potevasi combinare colle altre se non im-

ma-

maginando nell' acqua qualche moto irregolare che cagionasse l' irregolarità del fenomeno. L' altra speriencia dava un regolare accrescimento della deviazione del pendolo fino alla distanza di circa un mezzo piede dal fondo: e però si poteva combinare colle altre, supponendo che quel mezzo piede restasse situato fra qualche ridosso del fondo, o avesse qualch' altro impedimento.

Alle diciassette perpendicolari del Zendrini bisogna aggiugnere le sperienze fatte dal celebre nostro Lecchi in nove perpendicolari del fiume Chiese, e nella diramazione di quel Naviglio, sei delle quali portavano un regolare accrescimento di velocità dai luoghi più alti ai più profondi, e le tre altre perpendicolari non davano una diminuzione di velocità se non nelle maggiori vicinanze del fondo, come si legge nel Cap. III. del Cap. IV. del suo Trattato d' Idrostatica. Bisogna aggiugnere le sperienze fatte dal Sig. Lorgna in dieci perpendicolari dei Canali del Veronese, e da lui riferite nella dissertazione stampata l' anno 1771. sulla distribuzione delle velocità nelle fezioni dei Fiumi. In cinque perpendicolari fu da lui riconosciuto un accrescimento graduato di velocità dalla superficie fino al fondo, e nelle altre cinque non trovossi qualche rallentamento che alla distanza dal fondo di pochi pollici. Il Sig. Micheli nella Par. II. del Lib. II. delle sue Sperienze Idrauliche ci ha riferito le sperienze fatte in tre perpendicolari col tubo del Pitot, e in sette altri perpendicolari col quadrante, una sola delle quali portava una diminuzione di velocità in vicinanza del fondo. Le sperienze aggiunte dallo stesso Autore nel Cap. IV. della Par. II. del To. II. sono pure di due forti. Quelle che furono fatte col tubo recurvo corretto e rettificato non davano che dei piccoli varj di velocità tanto irregolari da far più tosto sospettare dell' esattezza dello stromento nelle poco diverse profondità, dove arrivava a sommergerli. Le altre che furono fatte col quadrante, in un caso solo davano la velocità diminuita in vicinanza del fondo. Così abbiamo tutte le sperienze della sfera idrometrica, e le sperienze fatte col quadrante, e col tubo recurvo in più di cinquanta perpendicolari da contrapporre alle sperienze fatte colla ventola Idraulica nelle cinque perpendicolari del Canale di Castiglione, e nelle quattro perpendicolari dell' Arno.

In

In una dissertazione stampata l'anno 1752. il celebre Sig. Ximenes avea proposto due difficoltà intorno alla macchina, e al metodo proposto dai Bolognesi per misurare la velocità delle acque correnti. La prima si è che le pareti del vaso devono retardare assai sensibilmente il moto dell' acqua, mentre si fa vicina, e che però l'acqua deve arrivare al foro con una velocità minore di quella, con cui scorrerebbe naturalmente. La seconda difficoltà si è, che la velocità dell' acqua nel foro dev' essere accresciuta dalla pressione dell' acqua che vi stà sopra, onde la quantità dell' acqua raccolta in un certo tempo nel vaso dev' essere in parte l' effetto di questa pressione, e non già il solo, e pieno effetto della velocità, con cui l' acqua si muove alla profondità del foro. Ma queste due difficoltà non possono più valere quando si tratta della semplice pressione dell' acqua, e della velocità che si genera dalla pressione: come è il caso dei fiumi, che corrono con pochissima pendenza di fondo, il caso del Pò, e del Canale della Polesina, in cui furono fatte le sperienze della suddetta fiasca, il caso istesso di cui trattiamo presentemente. Poichè quantunque l' acqua si ritardi alcun poco per l' impedimento del vaso, il quale impedimento però per la piccolezza del vaso non può essere che molto piccolo, quelle particelle che affacciansi al foro libero, comunque fossero prima o rallentate o stagnanti, entrandovi liberamente devono acquistar subito tutta la velocità corrispondente all' altezza della pressione. Così adunque la quantità d' acqua raccolta in un dato tempo nel vaso è il pieno, l' intero effetto, e la misura della velocità che dipende dalla pressione, e dall' altezza del corpo d' acqua, ch' è il caso di cui si tratta: e così le sperienze del vaso provano decisamente che la velocità dell' acqua andando dalla superficie al fondo cresce in simili casi nella ragione suduplicata delle altezze.

La difficoltà, che il chiarissimo Autore ha delotto dal rallentamento del moto, deve bensì valere quando si tratti non della semplice pressione, ma dell' urto di un fluido. Questo è il caso della ventola idraulica, che non si svolge già ad angoli differenti per la pressione dell' acqua, ma per la forza dell' urto fatto sulla faccia anteriore. Si gettino di nuovo gli occhj sulla fig. 132., e si consi-

Meccanica.

Tt

deri

deri che il castello di tre o di quattro alberi verticali, insieme coll' altr' albero, a cui è attaccata la ventola, d' avanti e assai vicino alla ventola istessa si devono opporre all' impeto della corrente. E' facile d'immaginarsi, che questi ostacoli, e gli altri che sono necessari, o per tenere a suo luogo il castello, o per potervisi avvicinare, e osservare le variazioni dell' indice, devono cagionare delle correnti retrograde tanto maggiori quant' è maggiore la velocità del primo urto: ed è pur facile d'immaginarsi che deve perciò restare più sollevata la ventola, e piegarsi ad un angolo maggiore dov' è maggiore la prima velocità. In vicinanza del fondo le ripercussioni si dovevano accrescere ancora per l' irregolarità delle sezioni, in cui si sono fatte quelle sperienze: poichè nel Canale di Castiglione il fondo scende dalle due ripe con una pendenza continuata, e solamente per un piccolo tratto nel mezzo ha la profondità uniforme di braccia $2\frac{1}{2}$: e similmente il fondo dell' Arno discende a scarpa delle due ripe sino alla profondità di circa 5 braccia. Io credo adunque che le ripercussioni del fondo delle sezioni, e degli alberi del Castello, e degli altri ostacoli opposti alla corrente nelle sperienze accennate abbiano diminuito le forze esercitate sopra la ventola in proporzione ch' era più rapida la corrente, e che quantunque fossero maggiori le velocità assolute dell' acqua nelle maggiori vicinanze del fondo, le velocità residue dell' urto nella ventola Idraulica comparissero anzi minori.

Il moto irregolare e continuo della ventola in tutte le sperienze, che si sono fatte, non lascia appunto immaginare che delle cause irregolari, come le varie ripercussioni del castello, e del fondo. Mentre in primo luogo anche quando la ventola restava abbandonata a se stessa senza l' aggravio di alcun peso, ed era coperta dalla grossezza dell' albero, quando il fluido dopo di avere urtato sull' albero dovea scappare lateralmente con direzioni eguali verso la ventola, com' è notato dall' Autore al num. 10., essa variava continuamente, e l' oscillazione era sino di cinque gradi nel Canale di Castiglione, e sino di otto nell' Arno. In secondo luogo le oscillazioni della ventola aggravata da un dato peso erano sensibilmente diverse l' una dall' altra: e così per esempio nell' Arno essendo aggravata la ventola

tola di 60 libbre di peso, in vicinanza del fondo, la prima oscillazione batteva tra i 20, e 25 gradi, la seconda tra i 10, e i 16, onde l' Autore ha creduto di doverli attenere alla direzione media di gradi $17\frac{1}{2}$, ch' è maggiore della massima deviazione del secondo caso di gradi 16. In terzo luogo l' oscillazione andava crescendo, qualche volta restava tra i medesimi limiti, e qualche volta ancora andava irregolarmente scemando dalla superficie al fondo, senz' alcuna variazione del peso: ed erano pure estremamente irregolari le variazioni delle oscillazioni, che corrispondevano ai pesi successivamente accresciuti. Così per esempio nelle sperienze fatte sulla Gusciana, e riferite num. 31., essendo l' oscillazione della ventola libera di gradi 6, erano i pesi, e i gradi delle successive oscillazioni come segue:

libbre	20.	30.	50.	70.	90.	100.	120.	122.	124.	126.
gradi	2.	$5\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	6.	$7\frac{1}{2}$.	$4\frac{1}{2}$.	$6\frac{1}{2}$.	2.	$19\frac{1}{2}$.	3.

Io non vedo cosa possa concludersi da tanta irregolarità di fenomeni in una macchina tanto composta: e non avendo avuta mai l' opportunità di fare delle sperienze di questo genere, per chi avesse i mezzi e i comodi di farle raccomanderei sempre di seguitare il metodo più semplice. Quando si avesse da riconoscere unicamente se in Arno, o in qualunque altro fiume la velocità andasse crescendo, o scemando dal fondo alla superficie, proporrei d' immergervi verticalmente una ruota, che restasse un poco sollevata sul fondo, e arrivasse fino alla superficie: poichè in essa la direzione del moto indicherebbe subito dove fosse maggiore la velocità. Ma poi a fine di riconoscere maggiormente la legge precisa della velocità non vedo cosa vi sia di più semplice della fiasca Idrometrica, ridotta se più piacesse dalla figura parallelepipedica alla cilindrica, e congegnata con qualche meccanismo più facile per aprirla, chiuderla, e immergerla a qualsivoglia profondità. Le sperienze già fatte colla suddetta fiasca, e quelle altre che si sono fatte col quadrante, e col pendolo nei luoghi di un corso non molto rapido, dove l' uso del quadrante è più sicuro, ci hanno dato a conoscere che le velocità sono proporzionali alle radici delle altezze: come ancora generalmente, e prescindendo da tutte le resistenze si può dedurre dalle leggi primitive della gravità e della pressione dei fluidi. Le altre sperienze che si sono fatte col quadrante-

te, e col tubo recurvo in cinquanta perpendicolari di diversi fiumi, e canali, ci hanno dato a conoscere che le velocità vanno sempre crescendo nelle maggiori profondità, e che le resistenze del fondo e delle ripe non incominciano a portare un rallentamento sensibile, che a piccole distanze: come pure si può dedurre dalla considerazione generale delle medesime resistenze.

Il Grandi nella Propos. XXXIV. del Lib. II. fece osservare, che tirando un piano su tutte le prominenze del fondo, o alquanto superiormente per assicurarsi che l'acqua corrente non potesse risentir punto l'impedimento dei dossi inferiori, si avrebbe un fondo libero, sopra di cui scorrerebbe l'acqua senza alcuna diminuzione sensibile della sua velocità: non potendo avere un letto più piano di quello che le viene spianato dall'acqua inferiore, considerata come stagnante tra le disuguaglianze del terreno. E così pure credette il Grandi che le ripe nella situazione loro verticale possono bensì rallentare le particelle d'acqua che vi passano più da vicino, ma non già alterare sensibilmente il corso di tutto un fiume. Anche il Sig. Ximenes nella Dissertazione, che leggesi nel tomo terzo degli Atti dell'Accademia di Siena, non ha fatto gran caso di questa sorta di resistenze. Egli ha bensì creduto che fossero assai più grandi le resistenze che si cagionano reciprocamente i diversi strati del fluido passando gli uni sopra degli altri, ma siccome la proposizione quinta, e i calcoli suffeguenti di quella Dissertazione sono fondati sopra l'ipotesi, che simili resistenze siano in ragion composta della pressione e del quadrato della differenza della velocità della superficie, e di qualunque strato proposto; non potendo entrare nel calcolo se non la differenza delle velocità de' due strati contigui, che passano l'uno sull'altro, e questa dovendo essere piccolissima, non vi farà neppure a far caso di quella parte di resistenza che ne può nascere. Il Sig. Bossut nel Capo VII. della Par. II. dell'Idrodinamica seguì anch'egli i principj medesimi del Grandi, e dopo di avere riferito fedeci sperienze, fatte in un canale rettangolare di 105 piedi di lunghezza, largo 5 pollici, e alto 8,09, che avea di pendenza un decimo di tutta la lunghezza, nelle quali sperienze la velocità primitiva, con cui l'acqua incominciava a scorrere, s'è trovata minore della velocità del corso stabilito nella

ragione costante di 17:20; sostenne che gli effetti maggiori delle resistenze si devono limitare alle prime particelle d'acqua, che scorrono sul fondo, e ne addusse la ragione medesima che quando l'acqua è giunta a fare al lungo delle pareti aspre e irregolari di qualche canale come una specie d'intonicatura, vi deve poi continuare liberamente il suo corso. Io pure seguendo questi principj, e prendendo le sezioni rettangole un poco più ristrette per trascurare tutto ciò, che è aderente immediatamente al fondo, ed alle ripe, crederò di arrivare colle altre regole antecedenti ad una sufficiente approssimazione delle quantità d'acqua, che corrono negli alvei liberi e regolari dei Fiumi.

CAPO TERZO.

DELLE ALTEZZE DEI FIUMI UNITI, E DIVISI;
E DEGLI ESEMPI PRINCIPALMENTE DELLA BRENTA, E DEL RENO.

NElle varie sperienze che ho fatto sul fiume Brenta due miglia sopra Bassano, la velocità superficiale mi è risultata di 4 piedi Veneti per ogni minuto secondo: e mi è poi risultata solamente di piedi $2\frac{1}{2}$ due miglia sotto alle bocche delle quattordici rogge, per cui una porzione della Brenta si dirama inferiormente nei territorj Bassanese, e Vicentino. Il parametro della parabola, le cui semiordinate esprimono lo spazio, che può percorrerli in un minuto secondo, come si è detto sopra, è di $60\frac{1}{2}$ piedi di Parigi: onde essendo il piede Veneto al Parigino assai prossimamente come 77:72, farà lo stesso parametro di piedi Veneti 56. 47, e dividendo per questo numero il quadrato dello spazio percorso in un secondo nella superficie del Fiume, farà l'altezza equivalente nel tronco superiore della Brenta 0. 28 d'un piede, e nell'altro tronco sotto a Bassano solamente 0. 09. La sezione più regolare, che ho ritrovato due miglia sotto a Bassano era un rettangolo di 80 piedi di larghezza con due piedi d'altezza del corpo d'acqua. Due miglia sopra la stessa Città non ho trovato alcuna sezione più regolare di quella che potevasi riguardare come formata in mezzo da un rettangolo di 60 piedi di larghezza, ed uno di altezza, e di due altri rettangoli laterali

rali di due piedi di altezza, e insieme della larghezza di piedi 85. Con questi dati, e coi metodi esposti nel capitolo quarto del libro antecedente, ho trovato che la quantità d' acqua di tutta la Brenta unita era alla quantità residua dopo tutte le diramazioni prossimamente come 283:157, e così ho valutato che tutte insieme quelle quattordici bocche in tempo di acque basse assorbissero un terzo in circa della Brenta: ed ho pure trovato il risultato medesimo non facendo entrare nel calcolo la piccola velocità della superficie.

Nel canale della Brentella, che si dirama a Limena dalla Brenta, e nel Bacchiglione avanti che si unisca colla Brentella, e nel canale unito della Brentella, e del Bacchiglione, che si dirama poi ne' due altri Canali della Battaglia, e di Padova, ho ritrovato che la velocità superficiale era di circa due piedi Veneti per secondo. Misurate varie sezioni più lontane dai luoghi delle confluenze, e delle diramazioni, dove non poteva esservi alcun ringorgo, e dove il pelo alto era sensibilmente parallelo al fondo e il tronco, e le sezioni erano più regolari; ho osservato in primo luogo che la larghezza della Brentella essendo un poco più della metà della Brenta sottratta alla diramazione di Limena, e l' altezza delle piene essendo un poco minore nella Brentella che nella Brenta, si può supporre senz' altri calcoli che la Brentella porti la metà in circa del corpo d' acqua della Brenta che si chiama vecchia, e che però sia un terzo di tutta la Brenta unita. Negli altri canali, in quel tempo che gli ho osservati, il risultato dei calcoli delle quantità d' acqua era come segue

Larghezza delle sezioni. Profondità medie. Quantità d' acqua.

Nella Brentella.	piedi 65.	8.	1467.
Nel Bacchiglione.	55.	8.	1244.
Nel Canale della Battaglia.	55.	4.	440.
Nel canale di Padova.	130.	6½.	2154.

La prossima corrispondenza di quest' ultimo numero, che esprime la quantità d' acqua nel Canale di Padova, alla somma degli altri due, che esprimono le portate prossimamente eguali del Bacchiglione, e della Brentella, sottratto il numero corrispondente al Canale della Battaglia, ci dà quì un altro riscontro dell' esattezza del me-

metodo di calcolare le quantità d' acqua. Ma il piccolo Canale della Battaglia diramasi sopra un fondo notabilmente più elevato di quello del tronco unito del Bacchiglione, e della Brentella. Nelle diramazioni che si fanno allo stesso fondo, e nella libera confluenza dei Fiumi anche maggiori si trova un'altra singolarità che merita di essere rilevata, e considerata attentamente. Nel Coroll. III. del Probl. XIII. del libro antecedente si è già avvertito che calcolando alla stessa maniera le portate del Reno, della Samoggia, e del Lavino, prendendo le sezioni più regolari, e supponendo la velocità superficiale di miglia $3\frac{1}{2}$ l' ora nel Reno, e di tre miglia nella Samoggia, e nel Lavino; la quantità d' acqua della Samoggia unita al Lavino risulterebbe anzi minore della Samoggia solitaria: e similmente si è detto che la quantità d' acqua del Reno unito alla Samoggia risulterebbe minore della somma delle quantità d' acqua della Samoggia, e del Reno solitario. Nelle istesse sezioni che si sono prodotte, le altezze dei Fiumi uniti si troverebbero sensibilmente minori di quelle che dovrebbero essere, se prescindendo da ogni altra circostanza particolare, secondo il Coroll. III. del Teor. VIII. del Lib. III., i cubi delle altezze seguissero generalmente la ragione duplicata delle quantità d' acqua. Avanti di mettere sott' occhio il risultato dei calcoli che si son fatti in altre sezioni del Reno e sopra e sotto la confluenza della Samoggia, bisogna ricorrere brevemente ciò ch' era già stato detto dagli Autori più celebri sopra quest' argomento.

Il Guglielmini nel Cap. VIII. del libro della Natura dei Fiumi aveva già rilevato un Fenomeno di questo genere nel Pò di Venezia, che nel secolo decimo sesto richiamò a se e assorbì tutto il ramo sino allora decorso verso Ferrara, e in seguito s' incorporò ancora il Panaro, senza che vi siano divenute perciò più alte le piene, e senza che siasi osservato un allargamento sensibile di letto: e su questa semplice osservazione asserì il Guglielmini, che un piccol Fiume può benissimo entrare in un grande senza accrescerlo perciò di altezza, nè di larghezza. Dopo i tempi del Guglielmini si sono fatte nel Pò delle osservazioni assai più precise. Nel 1714. mentre si guardavano gli argini del Pò in tempo d' una delle maggiori piene, es-

se.

sendo sopravvenuta una piena del Panaro, gli abitanti di Lagoscuro, e degli altri luoghi inferiori non si accorsero di qualche maggiore rigonfiamento del Pò. E così pure nel 1719 nè il Panaro, nè la Secchia non portarono alcun accrescimento sensibile all' altezza della piena del Pò, quantunque il colmo della stessa piena sia concorso nello stesso tempo col colmo maggiore della Secchia. Questi due fatti sono stati rilevati nell' informazione pubblicata sopra le osservazioni del Pò fatte nella visita del 1719, e 1720. Nella stessa visita si è pure rilevato un altro fenomeno analogo nella divisione del Pò grande ne' due altri rami detti delle Fornaci, e di Ariano. Mentre quantunque il Pò di Ariano assorbisca un considerabile corpo d' acqua, ciò non ostante l' altezza delle piene dopo di questa diramazione, per quanto si è potuto osservare, non arriva a diminuirsi che di un oncia e mezzo del piede di Bologna, e la larghezza ragguagliata del Pò delle Fornaci è anzi maggiore di piedi 35 della larghezza di tutto il Pò innanzi alla diramazione. La fezione di tutto il Pò grande è di piedi quadrati 12070: quella del ramo delle Fornaci di piedi 12330: quella del ramo di Ariano di piedi 2365: e così con levare da una fezione di piedi 12070 tant' acqua, quanta può scorrere per una fezione di piedi 2365, la fezione delle acque residue diventa anzi maggiore di prima.

Eustachio Manfredi nella risposta al Ceva, e al Moscatelli, che si leggerà sempre come un modello delle risposte apologetiche quantunque adesso non interessino più nessuno le antiche controversie di rimettere il Reno in Pò grande, dopo di avere considerato che una piena di Pò dovevasi valutare di circa trenta piene di Reno, e di avere calcolato, che l' altezza del Pò coll' aggiunta del Reno non poteva crescere più di un cinquantunesimo, soggiunse che realmente l' accrescimento di altezza sarebbe riuscito molto minore: e tra le altre prove di una tale asserzione produsse il risultato delle sperienze fatte nel Canale di Burana, che lasciato correre liberamente in Panaro non vi portava alcun accrescimento sensibile di altezza, ed escluso dallo stesso Fiume non vi lasciava discernere alcun abbassamento sensibile. Le sperienze medesime sono state pubblicate a Bologna nella Raccolta del 1728. Nel 1762. il Sig. Genneret aggiunse

a questi esempj anche quello del Reno Grande di Germania, che a Magonza riceve il Meno di quasi eguale portata d'acque senza farsi perciò più largo nè più profondo, e che scorrendo da Magonza a Colonia, dopo di avere ricevuto la Mosella, e molti altri rivi minori, si fa anzi più ristretto di letto a Colonia che avanti la confluenza della Mosella. Aggiunse ancora il Genneté che per lo contrario il Reno in vicinanza di Emerich si dirama col Wahal, ritenendo in ciascuno dei due rami prossimamente la larghezza istessa di prima, e che il Reno ad Arnheim si divide di nuovo per formare l'Yssel, senza che la larghezza, e la profondità dell'Yssel differisca molto da quella del Reno intero.

Questi esempj provano bastantemente che la prima divisione del Reno grande, incominciata sotto i Generali Romani Drusio, e Corbulone, e continuata poi con tant'altre suddivisioni ne' secoli posteriori, col vantaggio della navigazione, e colla facilità del commercio ha portato le conseguenze perniciose che le acque divise in tanti rami si sono rallentate di corso, e con ciò hanno perduta la forza di tenere spurgato il fondo, e d'impedire che vi si facessero delle continue deposizioni. Il continuo rialzamento del fondo, che n'è seguito, rende sempre più difficili gli scoli delle campagne, sempre maggiore la spesa delle arginature, sempre più gravi i danni, che per qualunque rotta si estendono ampiamente sulle campagne, e che minacciano tutto il Paese d'una rovina irreparabile. Emilio Scauro, e i più antichi Romani in Lombardia prefero un partito contrario, e quando per le molteplici diramazioni del Pò non avevano scolo bastante le campagne tra Pavia e Piacenza, ed erano divenute vallive e paludose, scavato un alveo solo, e riunite insieme tutte le acque s'ebbero forze bastanti a mantenere profondo il letto, si aprì uno scolo libero alle paludi, e si tornarono ad avere delle campagne fertili e belle. Il Sig. Genneté propose di seguirare lo stesso esempio per liberare delle inondazioni la parte di Olanda che resta tra Rotterdam, Utrecht, Amsterdam, e l'Oceano. Propose di rivolgere tutte le acque del Reno nel solo ramo dell'Yssel, e per fare maggiormente sentire i danni delle antiche diramazioni, e l'inutilità dei nuovi diversivi progettati nel 1754 per sca-

Meccanica.

V V

ri-

ricare una parte delle acque del Leck, ch'è un altro ramo del Reno, nella Meruva, che è l'unione della Mosa col Wahal, cercò di rappresentare il caso dei Fiumi con un piccolo canale artefatto, in cui si univano di fianco varj canali d'acqua, e se ne potevano derivare degli altri.

La macchina, e le sperienze furono fatte a Leida nel 1755, e pubblicate nel 1762. con una lettera dall'Autore indirizzata ad un Magistrato Olandese. L'esito delle sperienze fu che lasciando entrare nel recipiente comune uno, e poi due rivi, ciascuno dei quali vi aggiungeva la metà dell'acqua di prima, e così divenendo successivamente la quantità d'acqua $1, 1\frac{1}{2}, 2$, vi si accresceva bensì la velocità dell'acqua nella proporzione medesima, ma non vi si osservava alcuna variazione sensibile nell'altezza. Quando poi con aggiugnere degli altri rivi le quantità d'acqua divenivano successivamente $3, 4, 5, 6, 7$, gli accrescimenti corrispondenti di tutta l'altezza erano $\frac{1}{24}, \frac{1}{16}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \frac{1}{8}$. Si aveva poi la stessa progressione al contrario quando colla diramazione di altri rivi si veniva a scemare con ordine contrario la quantità d'acqua nel recipiente. Altre sperienze di questo genere furono poi variamente fatte, e replicate in Roma, e in Ferrara, e si possono vedere descritte nel tomo sesto della Raccolta de' Scrittori d'acque fatta in Firenze. Ma tutte le macchine adoperate in simili sperienze erano troppo piccole, in molte di esse la maniera, con cui le acque si facevano entrare nel canale principale, e da esso si diramavano in altri canali laterali, non aveva nulla che si potesse rapportare al caso di un Fiume investito, e urtato di fianco da qualche influente. Di più in tutte queste sperienze era troppo diversa la proporzione, con cui relativamente al caso dei Fiumi vi si diminuiva il corpo d'acqua, la pendenza, e la velocità superficiale: mancava in tutte quella corrispondenza di elementi, che potesse servire di base a qualunque rimota analogia; ed io lasciando queste piccole sperienze alla curiosità della Fisica Sperimentale non vorrei mai che vi si fondassero sopra le regole dei Fiumi liberi e grandi.

Neppure insisterò io maggiormente sugli esempj degli influenti del Reno grande prodotti dal Sig. Gennetè senza la precisa misura delle

delle sezioni , e sulla semplice stima dei naviganti . Io metterò sotto agli occhi degli attenti lettori il risultato delle sezioni , che di comune concerto dei periti di Bologna , e di Ferrara si sono prese nel torrente Lavino , nella Samoggia , e nel Reno di Bologna nella piena arrivata ai 15 Novembre dell' anno 1761. E tra tutte le sezioni misurate in tale occasione ho scelto quelle che si erano prese in luoghi , dove l' alveo è più regolare , dove non forma gomiti e svolte , dove il pelo alto si è riscontrato sensibilmente parallelo al pelo basso , ed al fondo , dove per conseguenza non poteva sospettarsi che le sezioni superiori del Reno ringorgate dalla Samoggia , e quelle della Samoggia ringorgate , e rigonfiate dalla confluenza del Lavino facessero comparire maggiori le sezioni prese al disopra relativamente a quelle altre che si sono prese sotto alla confluenza . Di più le sezioni di tutti e tre i fiumi , dove sono ancor solitari si sono prese lontano dai luoghi dell' unione , e le due sezioni prese nel Reno sotto allo sbocco della Samoggia si sono prese sei miglia lontano dalle rotte dove allora sboccavano tutte le acque , e si spandevano largamente nelle valli : e per conseguenza neppure vi poteva essere il sospetto che la vicinanza dello sfogo libero incominciasse ivi a portare qualche accelerazione nelle acque , e vi facesse comparire qualche restringimento delle sezioni . Il Lavino , e la Samoggia , avendo un corso poco differente hanno ancora contemporanee le piene ; e la Samoggia , e il Reno non essendo molto distanti di origine nei colmi delle loro piene non possono mai differire di molto tempo . Nel giorno indicato il colmo della piena della Samoggia non prevenne che di poche ore il colmo della piena di Reno .

Supponendo la velocità superficiale di tre miglia l' ora nella Samoggia , e nel Lavino , e di tre miglia e mezzo nel Reno , e prendendo le altezze , e le larghezze delle sezioni di ciascun torrente come sopra , la quantità d' acqua in ciascuna sezione nel tempo della suddetta piena , secondo i metodi già spiegati nel penultimo capo del libro antecedente , per ogni minuto secondo risulterebbe come segue

Sezioni misurate in piedi e once di Bologna.		Larghezza piedi.	Altezza piedi.	Area once quadre.	Quantità d'acqua. once cubemillioni.
Lavino.		44.	$9\frac{1}{2}$.	62304.	$10\frac{1}{2}$.
Samoggia.	{Solitaria.	58.	18.	150336.	35.
	{Unita al Lavino.	$70\frac{1}{2}$.	$15\frac{1}{2}$.	159048.	$37\frac{1}{2}$.
		151.	$16\frac{1}{2}$.	358776.	$91\frac{1}{8}$.
Reno.	{Solitario.	207.	15.	447120.	$105\frac{1}{4}$.
	{Unito alla Samoggia.	159.	$14\frac{1}{2}$.	331992.	$76\frac{1}{2}$.
		198.	13.	370657.	$81\frac{1}{2}$.

Così adunque sebbene la confluenza del Lavino accresca la quantità d'acqua della Samoggia di circa un terzo, ciò non ostante non vi fa crescere che di un sedicesimo l'area della sezione: e sebbene dopo l'unione dei due torrenti venga diminuita la pendenza ragguagliata del fondo della Samoggia, e per questa ragione vi si debba scemare la velocità superficiale; ciò non ostante supposta la velocità istessa di prima, e fatto il calcolo similmente sull'altezza, e larghezza dei due torrenti uniti, risulta una quantità d'acqua sensibilmente minor di quella, che corrisponde alle sezioni dei due torrenti separati. Nel Reno poi sebbene la quantità d'acqua si accresca di circa due quinti per la confluenza della Samoggia già unita al Lavino, e sebbene venga con ciò a diminuirsi la pendenza successiva del fondo, e per questa ragione debba diminuirsi ancora la velocità superficiale; ciò non ostante supposto che non vi arrivi alcuna variazione, la quantità d'acqua calcolata coi metodi stessi risulterebbe anzi minor di prima. Nel Territorio Bolognese vi è un altro esempio da aggiugnere a quelli della Samoggia, e del Reno. Il torrente Gajana entrando nella Quaderna, quantunque vi accresca il corpo d'acqua di circa la metà, non vi porta però alcun accrescimento sensibile di altezza nè di larghezza.

Le variazioni, che potrebbero farsi nella velocità superficiale; e negli altri elementi del calcolo, non porterebbero dei risultati assai differenti: e indipendentemente ancora dal metodo di calcolare la quantità d'acqua col semplice confronto delle sezioni risulterebbe manifestamente che un fiume può ricevere coll'unione di un altro degli accrescimenti considerabili nella quantità d'acqua senza crescere proporzionalmente di altezza nè di larghezza. Non essen-

dovi alcuna eccezione da fare nè per la non contemporaneità delle piene, nè per essere ringorgate le sezioni superiori, nè per essere le sezioni inferiori più libere, e più vicine ad un ampio recipiente, i fatti istessi potrebbero indurci a credere che oltre alla pendenza del fondo, ed alla pressione delle acque, vi sia nella confluenza dei Fiumi un terzo principio di accelerazione, cioè l' urto dei Fiumi, che vanno ad unirsi insieme ordinariamente ad angolo acuto. Il Guglielmini nella Propof. IV. del Lib. VIII. sulla natura dei Fiumi, e dopo di esso il Pitot, e il Grandi applicando ai Fiumi uniti e divisi il principio della composizione, e della risoluzione delle forze suggerirono quest' altra maniera di spiegare come nella confluenza de' Fiumi si trovi una velocità maggiore, e nella diramazione una velocità minore di quella che potrebbe competere all' altezza della caduta e della pressione. Io qui mi asterrò di portare più avanti queste congetture, e dopo di avere presentato agli altri tutte le osservazioni che ho potuto raccogliere in questo genere, lascerò a quelli, che hanno più comodo, di continuarle, e di portarle a segno di aver più dati, e di potere più fondatamente discorrere.

Ma prima di passare ad altri argomenti aggiungerò alle osservazioni del Pò, del Reno, della Secchia, del Panaro, della Sanguone, della Quaderna un esempio ben sicuro, e preciso, che può cavarli dalla mappa, e dal profilo, che Eustachio Manfredi ci ha lasciato del Tevere, del Teverone, e della diramazione di Fiumicino dal ramo principale d' Ostia. Paragonando insieme le sezioni più regolari, ch' esso ha misurato nel Tevere sopra, e sotto la confluenza del Teverone, come quelle che ha preso al luogo detto il Malpasso, e avanti all' ingresso in Roma, non vi si trova un' accrescimento che corrisponda all' accrescimento del corpo d' acqua che ha il Tevere coll' aggiunta del Teverone. Per lo contrario le due altre sezioni misurate da Eustachio Manfredi l' una sopra, e l' altra sotto la divisione del canale di Fiumicino da quello d' Ostia, hanno prossimamente la larghezza medesima. La sezione superiore è prossimamente rettangola, e la profondità ragguagliata vi si può valutare di 10 palmi Romani. La profondità ragguagliata della sezione inferiore è di circa 9 palmi: ma siccome tra le varie irregolarità del fondo

la profondità vera arriva da una parte sino a palmi 18, supposta la stessa velocità superficiale, e fatto il calcolo solito, la sezione inferiore alla diramazione del canale di Fiumicino non risulterebbe di una minore portata d'acqua di tutto il Tevere non diviso. Questi fatti medesimi serviranno a suo luogo per far vedere che i diversivi giovano o poco o nulla per diminuire l'altezza delle piene. Ora passiamo ad altri capi della teoria generale dei Fiumi.

CAPO QUARTO.

DELLO STABILIMENTO DEGLI ALVEI,

E DELLE DIREZIONI DEI FIUMI.

GLi alvei dei Fiumi si stabiliscono per via d'escavazione oppure di alluvione, ordinariamente per escavazione nei tronchi superiori e più ripidi, e per alluvione negli altri tronchi inferiori. E per limitarmi a que' luoghi che ho avuto occasione di esaminare da me medesimo, sembra che l'Adda uscendo dal Lago di Como fosse nei tempi più antichi trattenuta da una barriera di colline verso Malgrate, e che in progresso di tempo, scavato un passaggio più libero attraverso di esse, si sia ridotto il Lago ad un livello assai più basso di prima. Anche la Tresa, ch'è l'emmissario del Lago di Lugano nel Lago Maggiore, pare che si sia aperta col tempo uno sfogo libero tra il seno delle montagne, detto del Pozzo Nero, in vicinanza di Luino. E pare istessamente che l'Arpo si sia sprofondato col tempo tra i dirupi della Golfolina, e che abbia così lasciato asciugare le paludi, che ritrovavansi anticamente in tutto il piano superiore di Firenze. Per lo contrario il Pò nelle parti inferiori, e intorno a tutte le foci e antiche e presenti pare che abbia allungato la spiaggia, e si sia stabilito di letto tra le proprie alluvioni. Il Varenio istessamente ha considerato la China come accresciuta di vastissimi terreni a levante per le deposizioni del Fiume Hoang: il Loubet ha detto lo stesso della Penisola orientale dell'Indie, e dei quattro Fiumi principali, che vi decorrono: il Gange, l'Indo, il Nilo, il Senegal, ed altri Fiumi del vecchio, e del nuovo continente
pre-

presentano agli occhi dei viaggiatori degli altri casi consimili. Il Gu-
glielmini nel Cap. V. sulla Natura dei Fiumi ha spiegato l'ordine,
e i limiti che la natura ha avuto in questi lavori: e ciò ch'è da lui
stato scritto a questo proposito merita di essere presentato sotto un
punto di vista più semplice e più preciso.

Primieramente se un dato corpo d'acqua scenderà su un terre-
no composto di parti amovibili seguirà a scavarlo e corroderlo
insino a tanto che tutta la forza dell'acqua arrivi ad equilibrarsi con
tutte le resistenze. Le forze delle acque dipendono dalla loro quan-
tità, e velocità, e la velocità dipende dalle cagioni spiegate sopra.
La resistenza è di due forti: quella del fondo nasce dal peso, e dal-
la tenacità delle materie, che vi si trovano: quella delle altre ma-
terie portate insieme coll'acqua nasce dalla quantità, e dal peso di
ciascuna di esse. Adunque i limiti dell'escavazione saranno quegli, in
cui la forza delle acque correnti ugualj la consistenza del terreno
fortoposto, e sia di più bastante a tenere incorporate le torbide, ed
a spingere più lontano le ghiaje, e le altre materie grosse trasporta-
te dai luoghi superiori. Adunque vi farà in ciascun Fiume una data
pendenza e declività di fondo, che per nessuna casualità si potrà
mai stabilmente alterare nè in più nè in meno. Se in qualunque
modo verrà il fondo a rialzarsi superiormente, restando invariabile
nelle parti inferiori; si accrescerà la caduta la forza e l'impeto
dell'acqua, e si diminuirà il peso rispettivo dei corpi, che resteran-
no appoggiati ad un piano di maggiore inclinazione. Con ciò i corpi
medesimi verranno spinti dall'alto al basso, e succedendo l'escava-
zione di sopra, e la deposizione inferiormente, si diminuirà la pen-
denza gradatamente sino al caso preciso dell'equilibrio. Ma se al
contrario venisse poi la pendenza a diminuirsi oltre di questo limite,
l'acqua scorrerebbe con minor impeto sopra di un piano di minore
inclinazione, il peso rispettivo dei corpi si accrescerebbe, e in tut-
to il tratto superiore si continuerebbero sempre le deposizioni delle
materie grosse e sottili sino a restituire la pendenza medesima di
prima. Però farbbe inutile qualunque opera, che tendesse a varia-
re in qualunque modo o in più o in meno la pendenza dei Fiu-
mi torbidi determinata naturalmente dalla forza dell'acqua e dalla
qualità del fondo e delle altre materie.

Ol-

Oltre di questa generale conseguenza ne derivano ancora molte altre dai principj antecedenti. I. Data la qualità del fondo e delle altre materie, quanto maggiore sarà il corpo d' acqua tanto minore sarà la pendenza del fondo: e così dopo l' unione di qualche influente, restando pari tutte le altre circostanze, si farà sempre minore la pendenza di tutto il recipiente. II. Dato il corpo d' acqua, e data la qualità delle materie trasportate insieme con essa, quanto il fondo riuscirà più tenace tanto maggiore riuscirà la pendenza: e così nei terreni cretosi la pendenza sarà maggiore che nei limosi, o arenosi. III. Dato il corpo d' acqua, e data la qualità del fondo, quanto maggiore sarà il peso e assoluto e specifico delle altre materie, farà tanto più difficile che si spingano avanti, e che lascino al fondo una pendenza più piccola. E dico non solamente il peso specifico, come si espresse il Guglielmini nella Propos. V. del Cap. V. ma ancora il peso assoluto. Mentre nei corpi di eguale peso specifico, e di volume differente l' impeto dell' acqua sarà proporzionale alle semplici sezioni, cioè ai quadrati dei lati omologhi: ed essendo il peso assoluto proporzionale ai cubi dei lati istessi, crescendo il volume crescerà in maggior ragione il peso assoluto che l' impeto: cioè essendo il diametro 1, 2, 3, 4, 5, ec. farà l' impeto dell' acqua 1, 4, 9, 16, 25, ec., e il peso assoluto 1, 8, 27, 64, 125. ec. Così dove l' impeto della corrente è bastante per superare la resistenza delle gliaje più piccole, non basterà qualche volta per le più grosse quantunque di materia omogenea.

Ora scendendo l' alveo di tutti i Fiumi si osserva una continua degradazione della quantità e della mole di tutte le materie portate insieme coll' acqua: i sassi, le ghiaje, e le arene si trovano sempre più piccole e in minor numero nei tronchi inferiori: e per lo contrario il corpo d' acqua si va continuamente ingrossando. Dunque e per una ragione e per l' altra le pendenze dei fondi devono farsi gradatamente minori andando all' ingiù: e così la linea dei fondi istessi dev' essere concava e meno inclinata all' orizzonte nelle parti inferiori che nelle superiori. Finalmente poichè i Fiumi hanno pochissima pendenza dove portano della semplice terra,

si potrà credere che ivi si muovano nella superficie convessa della Terra, e che prendendone tutto il profilo dal principio sino al fine si abbia il complesso di una curva alternativamente concava, prima all'insù, e poi verso il centro.

Tutto ciò deve succedere generalmente nella supposizione, che il fondo dei Fiumi sia composto di parti amovibili, e che si formi per escazione. Supposto che il fondo si stabilisca per alluvione, si avranno le stesse cose. Cioè il Fiume seguirà a rialzarsi o di sopra, o di sotto insino a tanto che la cadente sia quella, in cui la forza dell'acqua si equilibri colla resistenza delle materie o spinte, o incorporate. Se la pendenza sarà maggiore, sarà pure maggiore il trabocco delle ghiaie, e dei sassi dai luoghi superiori agl' inferiori, e questi se ne caricheranno maggiormente in qualche luogo, ed a poco a poco rialzandosi renderanno minore tutta la pendenza residua. Ma se per lo contrario verrà la pendenza a diminuirsi oltre di un certo limite, cominceranno a farsi superiormente le deposizioni insino a tanto che tutto il rialzamento e la caduta sopra il tronco inferiore si riduca al limite dell' equilibrio di tutte le cagioni, che concorrono insieme contrariamente a stabilire l'alveo dei Fiumi.

In qualunque maniera si stabilisca l'alveo d' un fiume o per escazione, o per alluvione, vi sarà anche un limite nella larghezza. Mentre nel primo caso allargandosi di più le acque, e in proporzione diminuendosi di forza arriveranno finalmente a eguagliare la resistenza delle ripe. E nella seconda supposizione col maggiore allargamento delle acque si faciliteranno maggiormente le deposizioni, e dovendo restare il corso principale nella linea della più breve discesa verso quel luogo, dove le acque hanno esito, si manterrà ivi pure l'alveo più profondo. E così in ambedue i casi vi sarà una larghezza determinata, a cui naturalmente si adatterà un dato corpo d'acqua, che porti una data quantità di materia, e scorra sopra un terreno di una data qualità.

Il Guglielmini fece avvertire, che le acque devono arrivare più lentamente nelle ripe che in fondo ad eguagliare le resistenze. Mentre supposto il terreno composto di materia omogenea vi sarà

Meccanica.

X x

sem-

sempre in ogni parte la stessa difficoltà di continuarvi la corrosione: e però col maggiore allargamento dell'alveo scemerà la forza dell'acqua senza che la resistenza diventi maggior di prima. Laddove in caso che col maggiore sprofondamento dell'alveo si faccia minore la pendenza, deve scemare la velocità e la forza dell'acqua, e insieme crescere la difficoltà di staccare delle altre parti da un fondo meno inclinato, e di spingere più lontano le altre materie portate al lungo di esso. Adunque nell'escavazione del fondo vi sono più cause, che tendono a agguagliare la forza, e la resistenza, quando ve n'è una sola nel semplice allargamento del alveo: e per conseguenza il raggiuglio succede più presto nel primo caso che nel secondo. Così si ha un altro fenomeno generale dei Fiumi, che la larghezza sia molto maggiore della profondità: per esempio nelle piene del Pò al luogo di Lagoscuro si ha la larghezza di piedi 700 e anche più, e l'altezza delle piene arriva rare volte ai piedi 35.

Ma in oltre spandendosi le acque di fianco, e incontrandovi la resistenza delle ripe, contribuiranno poi meno a tenervi il fondo escavato e libero dalle deposizioni delle altre materie: la sezione di tutto l'alveo da una ripa all'altra farà una curva concava, gradatamente più profonda nel mezzo: e istessamente nel mezzo si manterrà il corso più rapido, o come chiamasi il filone del Fiume. E ciò quando sia seguito una volta, per poco che le acque declinino dalle direzioni parallele, dovranno rivolgersi dalle ripe e dalle altre parti laterali verso il mezzo della sezione, e colmeeggiandovi lascieranno alla sezione medesima superiormente la forma di una curva convessa. Io non credo che in alcuno dei nostri Fiumi la differenza del livello dell'acqua nel filone, e alle sponde sia tanto grande che arrivi ai tre piedi, come porta la livellazione fatta sul Fiume Aveiron dal Sig. Hupeau, e riferita dal Sig. di Buffon. Ma il colmeggiamento e la convessità della superficie è un fenomeno generale di tutti i Fiumi, e per convincersi che non nasce da alcun'altra cagione, basta osservare il moto dei galleggianti, che tutti in poco tempo sono rivolti insieme alle acque dall'una o dall'altra ripa verso il filone.

Il parallelismo delle direzioni, e la forma rettilinea dell' alveo non può aver luogo naturalmente che nella supposizione della omogeneità di tutte le parti del fondo. Considerando gli alvei dei Fiumi, come realmente sono, intrecciati di sassi, di ghiaie, di creta, e di altre materie diversamente tenaci, si avrà la ragione, per cui il filone si accosta ora all' una ora all' altra ripa, e i Fiumi nella loro lunghezza ci presentano una serie di archi concavi, e convessi. Mentre supposto che da una parte sia il terreno più facile ad essere corrosa, o che l' acqua vi venga spinta con maggior forza dai luoghi superiori, la corrosione dovrà internarsi maggiormente nella ripa. In questo caso i primi a sbalzare saranno tutt' i risalti e gli angoli rettilinei della parte corrosa, dove l' urto sarà più diretto e più violento. Però tutta la corrosione acquisterà presto la forma d' una concavità continuata, e il filone piegandosi da quella parte verrà poi ribattuto alla parte opposta: e così replicandosi sempre lo stesso giuoco, seguita una corrosione sulla dritta del Fiume ne succederà un' altra inferiormente sulla sinistra, e più sotto un' altra sulla dritta, e tutto il Fiume si disporrà in una serie di archi alternativamente concavi e convessi. Dove la ripa corrosa è più a piombo si chiama piarda, e dove all' opposto si avvanza verso il fondo con maggiore inclinazione, e resta più scoperta in tempo di acque, si chiama spiaggia.

Ma poichè la forza dell' acqua si va sempre scemando in proporzione, che si fa più acuto l' angolo del filone colla ripa corrosa, con allargarsi sempre di più le concavità di ciascuna corrosione, e con farsi maggiore l' obbliquità del filone battuto e ribattuto, finalmente arriveranno a agguagliarsi le spinte e le resistenze, e ancora la corrosione avrà un limite. Questo è il motivo per cui i Fiumi dove corrono incassati fra terra non si ferrano da vicino cogli argini, ma vi si lascia di mezzo uno spazio, che da noi chiamasi golena, acciò in qualunque caso di qualche nuova corrosione vi possano serpeggiare le acque, e in qualche parte cambiarsi anche il letto senza mettere in pericolo gli argini. Anzi su di ciò è fondata la pratica di molti, che nelle maggiori corrosioni del Pò e di altri Fiumi abbandonano il terreno, e si ritirano indietro

cogli argini, ed aspettano il limite degli effetti senza impegnarsi ad ostare direttamente alle cause delle corrosioni medesime.

Si potrebbe calcolar questo limite se fossero noti precisamente tutti gli elementi della forza dell' acqua e della resistenza del terreno. Ciò che in questa materia può dirsi generalmente si è: I. che data la direzione e il corpo d' acqua tra le ripe cretose i serpeggiamenti dei Fiumi saranno minori che tra le arenose: II. che dato il corpo d' acqua, e le resistenze, faranno maggiori le corrosioni quanto più direttamente il filone anderà ad investire le ripe: III. che in parità delle altre circostanze il vertice di ciascuna corrosione sarà portato più lontano, e tutte le tortuosità prenderanno un giro più largo nei Fiumi maggiori che nei minori. Una semplice occhiata che gettisi sulle mappe geografiche basta per comprendere il fatto, di cui ora si è data la ragione, e ancora per vedere generalmente, che la retitudine degli alvei ed il parallelismo delle ripe può essere in qualche luogo un opera d' arte, ma che non è mai lungamente l' opera della natura. Per esempio l' alveo del Brentone, in cui si è rivolta la Brenta per deviarla dalla Laguna di Venezia, si è tirato per 25 miglia in due o tre linee quasi rette di una piccola inclinazione tra loro. La Brenta vecchia ha un alveo singolarmente tortuoso, e irregolare.

CAPO QUINTO.

DELLE MATERIE PORTATE INSIEME CO' FIUMI;

E DELLE SPERENZE FATTE NELLE GHIAJE.

LE acque scorrendo rapidamente dai piani inclinati delle montagne dentro gli alvei dei Fiumi staccano dalla crosta esteriore del nostro globo, e trasportano seco e terra e arena e ghiaje e sassi piccoli e grossi. Le arene sottili e le parti terree, quantunque siano un poco più pesanti dell' acqua, ciò non ostante essendo pochissimo differenti di peso nell' acqua agitata, e commossa non arrivano a superare tutte le resistenze per la discesa, e

re-

restando incorporate coll' acqua , e togliendone la trasparenza propriamente si chiamano torbide. La maggiore agitazione delle acque può contribuire a tenervi sollevate le torbide in una maggiore quantità. Ma in questo caso ancora , siccome in tutte le fermentazioni chimiche , si ha un limite oltre il quale l' acqua non può caricarsene maggiormente. Ho voluto sperimentare che quantità di torbide portava l' Arno nella gran piena seguita in Pisa alla metà di Novembre del 1761. L' acqua , che ho preso alla superficie del Fiume , detratto il peso del vaso , pesava 16 onze Toscane e denari 3. Il sedimento lasciato in 24 ore pesava denari 3 , che poi s' erano ridotti a due foli dopo ch' erasi lasciata svaporare e asciugare tutta la polvere : e poichè l' acqua dopo 24 ore non era ancora interamente limpida , potrà supporfi la quantità della torbida di circa $\frac{1}{10}$.

Le arene più grosse , i sassi , e le ghiaie vengono strascinate ordinariamente sul fondo dei Fiumi , e abbandonate successivamente a diverse distanze colla gradazione medesima del peso e della grossezza. Qualche volta però succede che le ghiaie si stacchino ancora dal fondo , e vengano quà e là sbalzate irregolarmente. Il Grandi avendo fatto varie sperienze sulle gravità specifiche della ghiaja , e dell' acqua , vi trovò in circa la proporzione di 8 a 3. Onde il peso residuo della ghiaja nell' acqua al peso dell' acqua stessa , non avendo una ragione maggiore di 5 a 3 ; succede benissimo che qualche volta l' impeto della corrente basti a sollevare le ghiaie dal fondo , ed a scagliarle sugli orli delle chiuse e sulle spiagge ancor più alte. Le variazioni seguite in questo secolo sulle montagne , il taglio delle macchie e dei boschi , la coltivazione intrapresa con poco buon ordine anche sulle falde più ripide , sono poi le funeste cagioni , per cui s' è fatta adesso maggiore nei Fiumi come l' altezza delle piene , così ancora le quantità delle materie trasportate insieme colle acque . Mentre levati gl' impedimenti dei cespugli e delle piante , ricadono le acque più presto e più copiosamente nei Fiumi , e passando per terreni già smossi dall' aratro e dalla zappa , si caricano più di terra di arena e sassi di quello che facevano per lo passato. Così adesso si fa maggiore l' interrimento degli alvei , e le piene con essere più brevi riescono ancora più alte e più violente.

La

La gradazione, con cui si arrestano le materie dentro gli alvei dei Fiumi, è la seguente: Scendendo dai primi tronchi di qualche Fiume all' ingiù si osservano sparsi e ammassati sul fondo prima i sassi più grossi e irregolari, poscia i sassi rotondi, e di mano in mano più piccoli: in seguito la ghiaja grossa, e la breccia minuta: e in fine l'arena, e la pura terra. Un attento osservatore troverà ancora delle altre degradazioni nell' ultimo limite delle ghiaje. Mentre da un fondo ricoperto tutto di ghiaja si passa ad alcuni greti quà e là sparsi e divisi: poi non s' incontra continuazione di ghiaja, che dove le acque sono più profonde e più rapide: e finalmente s' interrompe la continuazione anche del fondo, e non succedono che dei minori mucchi di ghiaja e breccia avanti di passare ad un fondo continuamente arenoso e limoso. Ma per avere interamente for' occhio queste degradazioni bisogna fare degli scavi sotto l'ultimo sedimento di arena e terra, con cui vengono ricoperte le ghiaje nel cedere delle piene. Io ho avuto occasione di osservar tutto minutamente nel Reno di Bologna. Il fatto non può essere controverso negli altri Fiumi. Resta ora da rintracciarne la cagione.

Il Guglielmini nel capo quinto sopra la natura dei Fiumi s'immaginò che le arene non fossero altro che pezzetti di sasso stritolato, come tra le ghiaje dei Fiumi si trovano alcuni sassi composti di arene unite insieme. Fece osservare che i sassi spinti dall' impeto delle acque scorrendo l' uno sopra dell' altro e percuotendosi insieme si devono sfregare e logorare continuamente. Ne addusse come due indizj sicuri del loro dibattimento e logoramento, il continuo mormorio che si sente nei Fiumi ghiaiosi, e la maggiore pulitura delle ghiaje che vi si trovano. Pensò adunque che i sassi urtandosi e sfregandosi impetuosamente tra loro si rotondassero, e si diminuissero sempre di mole, e a poco a poco si risolvessero in ghiaje e breccie più piccole, e finalmente si stritolassero e risolvessero in semplici arene. Credendo poi che tutto questo lavoro di logorare, e disciogliere i sassi potesse finirli dentro lo spazio, che stà di mezzo tra il principio del Fiume e l' ultimo limite delle ghiaje; suppose il Guglielmini che colla sopraggiunta di nuo-

ve

ve ghiaje non si dovesse rialzare il letto dei Fiumi, e fosse equilibrata la quantità di esse, che giornalmente entra nell' alveo, col confugio che se ne fa.

Io ho incominciato a considerare quest' importante argomento molti anni fa coll' occasione di un nuovo progetto, proposto allora con molto impegno, e in seguito abbandonato, di rivolgere al Mare direttamente tutte le acque del Bolognese con un solo alveo, che incominciasse sopra la confluenza della Samoggia, e del Lavino, e che tagliasse tutti gli altri influenti dove ancora corrono in ghiaje e materie grosse. Mentre la prima considerazione, che allora mi si è presentata alla mente, era appunto che se non regge l' ipotesi del Guglielmini, se coll' accrescimento della caduta, di tutto il corpo, e dell' impeto delle acque non può sperarsi lo scioglimento delle ghiaje; ammucciandosi esse a diverse distanze, come vi potessero arrivare, vi produrrebbero col progresso del tempo un rialzamento sensibile di fondo, e con ciò un pericolo sempre maggiore di rotte, e una maggiore difficoltà di tutti gli scoli della campagna. E nelle circostanze particolari della campagna medesima questa semplice osservazione doveva bastare per escludere interamente il progetto del nuovo alveo.

Dopo di avere raccolto insieme le mie idee ho creduto primieramente che i sassi rotondi, le ghiaje, le atene siano corpi originati, già preparati dalla natura e largamente sparsi anche dove non è mai corso alcun Fiume, nella superficie, e negli strati inferiori della terra, ed in alto sulle montagne, come già aveva notato il Leibnitz nella sua Protogea, e fin verso le prime sorgenti dei Fiumi, come è occorso a me di osservare in diversi luoghi. In oltre avendo osservato che le ghiaje dei Fiumi sono vetamente più pulite, e più lisce delle altre, che si ritrovano sparte per le pianure, e sulle montagne, ho creduto che non tanto l' urto e il dibattimento dei sassi fra loro, quanto il soffregamento delle arene, interposte bastasse per far saltare le punte irregolari, per lisce di più le ghiaje trasportate dentro gli alvei dei Fiumi, e dar loro naturalmente qualche grado maggiote di pulimento, come vediamo che si ottiene facilmente coll' arte. Di più considerando la
poca

poca durezza delle arene, la figura irregolare e ramosa, e la ragione che vi può essere della leva, mi è parso ancora che nella continuazione del corso intrecciandosi variamente tra loro scuotendosi dibattendosi le arene medesime si dividessero e suddividessero in grani sempre minori, e da se si formassero le gradazioni che si osservano oltre l'ultimo limite delle ghiaje.

Ma venendo all'articolo principale, non ho trovato di poter accordare al Guglielmini nè che le ghiaje si risolvano finalmente in arene, nè che coll'urto e collo sfregamento continuo negli alvei dei torrenti e dei Fiumi arrivino esse a diminuirsi di mole sensibilmente. Però ho creduto che la successione dei sassi e delle ghiaje sempre più piccole, venendo all'ingiù entro gli alvei medesimi, provenga unicamente dalla successiva diminuzione e della caduta e dell'impero delle acque correnti, che abbandonando nei tronchi superiori i sassi più grossi e irregolari non possano trasportare a maggiori distanze, che i sassi rotondi, le ghiaje, e le breccie minute gradatamente, fin dove la minore pendenza del fondo non permetta poi che il trasporto dell'arena e delle altre materie incorporate insieme colle acque. Questa verità non interessa soltanto l'erudizione e la curiosità filosofica, ma influisce ancora sostanzialmente nelle regole pratiche che possono proporsi per regolare riparare e difendere tutt' i tronchi superiori dei Fiumi. Qui adunque bisogna ripetere le ragioni principali, colle quali mi è parso di averla schiarita e stabilita bastantemente.

La prima considerazione, che mi si è presentata alla mente, riguardava l'intrinfeca diversità delle arene, e delle ghiaje. Nei nostri Fiumi, come nel Tesino, nell'Adda, nell'Arno, nel Reno ec. sono assai rare le pietre, che si chiamano propriamente arenarie per essere composte di arene unite insieme: anzi sono assai rare le pietre fusibili, e vitrificabili. I sassi e le ghiaje dei nostri Fiumi sono per la massima parte di natura calcarea, e crederei di assegnare una proporzione assai vantaggiosa se dicessi che in mille sassi del Reno appena uno sarà vitrificabile, e faranno calcinabili tutti gli altri. Ora le arene dei medesimi Fiumi, purgate almeno dalla fanghiglia, per lo più sono di sostanza silicea, e vitrificabile: rarissimi sono i

glo.

globetti di natura calcaria, che vi si trovano frammischiatì: e forse di mille grani di arena appena cinque o sei faranno calcinabili, e faranno gli altri fusibili o vitrificabili. Dunque i sassi, e le ghiaje dei nostri Fiumi, per la massima parte non si compongono di arene unìe. E perchè l'urto e lo sfregamento delle stesse materie non può mutare la natura delle parti componenti, neppure si potrà credere che le arene sian pezzetti di sasso divisi e stritolati, come pensava il Guglielmini.

Il Sig. Pallas celebre Naturalista, in un discorso da lui recitato nell'Accademia di Pietroburgo in presenza di S. M. il Re Gustavo III. di Svezia, ha fatto alcune difficoltà intorno a questa mia opinione: ed ora esige da me qualche risposta e la celebrità di un tale oppositore, e la circostanza di aver egli recitato il suo discorso d'avanti ad un Principe così grande, che conosce egli stesso, e protegge tanto le Scienze, e che adesso rivolge a se gli occhi, e l'ammirazione di tutta l'Italia. Dopo di avere viaggiato una gran parte dell'Asia disse il Sig. Pallas di avervi osservato che le montagne primigenie sono un composto principalmente di Granito, che i letti dei fiumi dell'Asia sono ricoperti di felci rotolati del genere del granito, che l'arena è una dissoluzione dei felci e del granito largamente imbevuto d'acqua: ed avendo egli trovato delle arene sino alla cima de' più alti monti, risguardò questa come una prova sicura d'essere stati i più alti monti anticamente coperti d'acqua, e s'immaginò pure che il mare abbia una volta coperto le pianure, vastissime della Tartaria e della Numidia, e che scomponendovi il granito vi abbia lasciato quei vastissimi ammassi di sabbia. Io non voglio entrare adesso nell'esame di queste e di altre ipotesi analoghe: accordo tutte le osservazioni, e nemmeno voglio negare che i Fiumi dell'Asia e di altri luoghi, che non conosco, abbiano il fondo coperto di pietre silicee e vitrificabili. Dico che nei nostri Paesi, dei quali ho sempre parlato, le pietre fluviali sono per la massima parte di natura calcaria, e che le pietre silicee e vitrificabili sono assai rare nei nostri Fiumi. Dico che le pietre medesime urtandosi e sfregandosi insieme non possono mutar natura, e convertirsi in una materia vitrificabile come l'arena. Dico che nel passare le ghiaje dalla

Meccanica,

Y y

prima

prima origine di qualche fiume fin dove finiscono di vederli sparire sul fondo, non hanno nè tempo nè spazio nè forze bastanti per diminuirli sensibilmente di mole.

Mentre io mi trovava in Pisa ho fatto lungamente arruotare diversi sassi fluviali, e ne ho fatto scuotere degli altri in alcune casse gagliardamente per molte ore. Tutto ciò che coll' azione delle ruote si staccava dai sassi nel primo caso, e che nell' altro trovavasi tra gli angoli delle casse, era un polviglio fortissimo di colore biancastro, che si spargeva con un soffio nell' aria, e che nell' acqua stagnante mai totalmente riducevasi a fondo. E quantunque riaprendo le casse qualche volta vi ritrovavasi alcuni sassi spezzati e delle scaglie cadute dagli angoli delle sezioni; non ho mai potuto ottenere con qualunque continuazione di scosse neppure un grano di arena, nè dalle pietre arenarie, nè dalle altre di natura calcaria. Anzi avendo fatto variamente spezzare e scuotere tra di loro per molto tempo diverse pietre arenarie, non ho potuto istessamente raccogliere altro nel fondo delle casse che il semplice polviglio: il che si può ancora sperimentare da ciascuno prendendo in mano due pietre, e osservando cosa si stacchi dalla superficie di esse con qualsivoglia forza di sfregamento. Adunque se accaderà qualche volta che le pietre arenarie si sciolgano nei piccoli grani di arena, che le compongono, ciò farà certamente per tutt' altre cagioni che per lo sfregamento e per l' urto. La diversa azione del caldo e del freddo dilatando, e restringendo diversamente le loro parti, l' umidità imbevuta dall' aria, ed altre simili cause accidentali le potranno qualche volta dividere e sciogliere. Ma le pietre arenarie, come s' è detto, sono assai rare nei nostri fiumi, e dev' essere ancora più rara la combinazione delle cause accennate. Generalmente parlando l' urto e il dibattimento dei sassi dentro l' alveo dei Fiumi, per quanto sia grande e continuato, non potrà mai formare le arene, nè produrrà mai altro che polvere fortissima.

Per terminare la presente questione ho ricercato che quantità di polvere, e quale diminuzione dei sassi e delle ghiaie si possa ottenere col semplice sfregamento; e in ciò ho voluto considerare e lo spazio e il tempo, in cui si sfregavano. Per fare qualche
conto

conto del tempo ho preso 40 sassi fluviali, tra pietre serene e biglie, di diverse grandezze piccoli e grossi, e gli ho fatti scuotere per tutt'i versi in una cassa di legno ben chiusa, con tutta la forza di un uomo a diverse riprese per due ore continue. Poi raccogliendo la polvere ritrovata nel fondo della cassa con cinque pezzetti irregolari di sasso, aggiugnendovi il sedimento lasciato in 24 ore dall'acqua, con cui aveva lavato i sassi ad uno ad uno, non sono arrivato al peso di due sole once. Onde essendo tutto il peso dei sassi 504 once Fiorentine, nel caso che lo strofinamento si fosse potuto continuare colla forza medesima, l'intero scioglimento dei sassi avrebbe portato in circa giorni 21: tempo di gran lunga maggior di quello, in cui le acque correnti colla velocità di 4 o 5 miglia per ora, che si osserva alla superficie, o colla velocità assai maggiore che osservasi verso il fondo, possono arrivare dalla prima sorgente sino all'ultimo limite delle ghiaie.

Per considerare ancora lo spazio ho fatto arruotare due sassi fluviali, tenendoli sopra la ruota nella parte più piana, e con tutta la forza maggiore. Dopo 2200 rivoluzioni della ruota, che portavano circa 4267 braccia di spazio decorso da qualsivoglia punto della sua superficie, s'erano i sassi appianati un poco di più nella larghezza di circa tre dita, e avevano perso ciascuno circa un denaro di peso. Onde supponendo ancora che i sassi nel fondo dei Fiumi si muovano con una velocità eguale a quella della ruota, e che la forza dello sfregamento rimanga e in un caso e nell'altro la medesima; per l'intero scioglimento dei sassi di 10 o 12 once di peso bisognerebbe trascorrere uno spazio molto maggiore di tutta la lunghezza dei nostri Fiumi: e così in tutte queste supposizioni non avrebbero le ghiaie nei Fiumi nè spazio nè tempo bastante a sciogliersi e consumarsi.

Ognuno vede però che la forza dello sfregamento e dell'urto negli alvei dei Fiumi dev'essere assai minore di quella, con cui i sassi si arruotano e si scuotono nelle casse impetuosamente. L'urto dei sassi fluviali tra loro dee valutarli dalla velocità relativa, ossia dalla differenza delle velocità, con cui sono essi trasportati dall'acqua, e che non può mai essere molto grande. L'urto sul fondo è

Yy 2

assai

affai piccolo nei superiori e più ripidi tronchi dei Fiumi, dove i sassi precipitano rotolandosi e r avvolgendosi intorno al proprio centro, perchè le parti più acute della loro superficie sfuggono senza molta resistenza dai minuti cavi che incontrano: ed anche nei tronchi inferiori, dove sdruciolano i sassi sul fondo presentando sempre al contatto la stessa parte, l'urto e lo sfregamento è affai piccolo, perchè è piccolo il peso che gli stringe e li ferra sul fondo. L'azione dell'acqua non è poi da mettersi in conto, non potendo un sottilissimo velo d'acqua offrire alcuna resistenza sensibile ad una pietra, che obliquamente lo investe. E così da nessuna parte deve aspettarsi che negli alvei dei Fiumi le ghiaje e i sassi arrivino a sritolarsi interamente, o a diminuirsi sensibilmente di peso.

CAPO SESTO.

DEL RIALZAMENTO DEL FONDO DEI FIUMI TORBIDI,

E DELLE DIFFERENZE DEI FIUMI GHIAIOSI, ED ARENOSI.

DAlle accennate supposizioni che le ghiaje dei Fiumi collo sfregamento reciproco a poco a poco si sciolgano in arene, e che tutto questo sia un lavoro da potersi finire nello spazio compreso tra il principio del Fiume, e l'ultimo limite delle ghiaje medesime, ne tirò il Guglielmini un'altra conseguenza importante; che il letto dei Fiumi non si debba continuamente rialzare colla sopraggiunta di nuove ghiaje, e che sia anzi equilibrata la quantità di esse portata in qualunque modo nelle piene col consumo che se ne fa. Ma per lo contrario se i sassi, e le ghiaje restano sempre dentro l'alveo dei Fiumi come vi arrivano, senza sciogliersi in parti così minute che incorporandosi insieme coll'acqua scorrono per tutt' i tronchi inferiori, e giungano a scaricarsi nel Mare; sarà una necessaria conseguenza che i Fiumi, dove corrono in ghiaje, si rialzino continuamente di fondo. Anzi sarà questa la prima diversità sostanziale tra i Fiumi che corrono in ghiaja, e gli altri che portano solamente arene e torbide: che i Fiumi arenosi si rialzino qualche volta di fondo, ed i ghiaiosi si debbano rialzar sempre.

Que-

Questo, che è il risultato di tutto il capo precedente, viene ancora confermato ampiamente da tutte le osservazioni. Tutt' i ponti, che abbiamo in Lombardia sui torrenti e sui Fiumi, che corrono in ghiaja, nelle loro luci ristrette e in parte chiuse, nelle platee ricoperte interamente, e nei piloni sepolti sino ad una considerabile altezza, mostrano ai passeggieri l' accumulazione delle ghiaje che vi si è fatta. Zendrini nel §. XXII. del Cap. XI. ci ha assicurati del rialzamento del fondo del Pò, e di tutti gli altri Fiumi dello Stato Veneto. Nelle pubbliche visite, che si sono fatte sul Bolognese, s' è verificato il rialzamento successivo del Reno, della Samoggia, del Lavino, e di tutti gli altri torrenti di quei contorni. Per esempio il fondo del Lavino al ponte della via di S. Giovanni, dal 1723 sino al 1761, s' è trovato rialzato di circa quattro piedi Bolognesi. Nei tronchi superiori dei Fiumi, dove le materie sono più grosse, è ancora molto maggiore il successivo rialzamento del fondo. Io sono restato sorpreso quando ho avuto occasione di verificare da me medesimo sin dove siano arrivate le variazioni di questo genere. A Pontremoli, dove la Magra riceve un grosso influente, sotto il piano delle case presenti mi hanno fatto vedere i vestigi dei tetti antichi.

In Toscana è già quasi un secolo che il Viviani ha fatto vedere il continuo rialzamento del letto d' Arno, e dove corre in ghiaja, e dove corre in arena, anche nell' ultimo tronco insino al Mare. Lo provò egli generalmente dal perdersi le cadute dei mulini, dal restringersi le luci dei ponti, dal ridursi sempre più alti dei piani delle campagne i letti degl' influenti di Bisenzio, di Ombrone ec. Nei tronchi superiori, dove scendono i sassi e le ghiaje grosse, il rialzamento del fondo è assai più considerabile: ed è ancora molto maggiore nel tratto che interseca Firenze, e che rimane tra le due chiuse o peschaje, erette anticamente per la derivazione di due canali perenni e per gli usi dei mulini. Il Viviani nel suo celebre discorso ci lasciò descritte le osservazioni, che a questo proposito aveva fatto in Firenze, di condotti, di lastrichi, e di fondamenti di fabbriche antiche. L' osservazione più precisa si è che l' anno 1677, essendo egli incaricato di ristaurare i fon-

da-

damenti della gran fabbrica degli Uffizj, e avendo fatto avanzare verso Arno le finestre vecchie del sotterraneo della facciata, prese motivo di farle murare un braccio e mezzo più alte, full' asserto comune di chi allora vi praticava, che nelle piene maggiori degli ultimi anni entrando per esse l'acqua, il che non era mai succeduto in tutte le piene degli anni innanzi, necessitava a condur fuori da quelle stalle i cavalli, ed oltre alla spesa che richiedevassi a cavar la belletta, tenevali infermi per molti mesi. Eppure è da crederli che un Architetto così celebre come il Vasari, che nel 1560 soprintendeva alla fabbrica della predetta facciata, ch'egli stesso chiamava fondata sul Fiume e quasi in aria, facesse fermar tant' alto le finestre che ne' suoi tempi nessuna delle piene maggiori potesse entrarvi.

Ma per lasciare anche il tronco di Firenze, dove la chiufa inferiore deve influire particolarmente nel rallentamento del corso e nell' arresto delle materie grosse, sette miglia più sotto, nel luogo del ponte a Signa, il rialzamento del fondo è tanto grande che alcune luci del ponte sono ormai sepolte nelle deposizioni delle ghiaie, alcune altre si sollevano appena nelle impostature sopra il piano del fondo, e le due luci più alte restano coperte affatto dalle acque nelle piene. Una campanella di ferro, ch'è impiombata nella pila destra dell' arco di mezzo, può servirci di regola per misurare tutto il rialzamento. Diverse persone assicurano che la campanella restava tant' alta sessant' anni fa, che i navicellai per toccarla dovevano salire sulla poppa del navicello. Presentemente l'anello della campanella medesima tocca il fondo del Fiume, che sotto il ponte si spiana in una superficie assai regolare. Però in quel luogo e in tutto il suddetto tempo il rialzamento del fondo dev' essere di cinque o di sei braccia Fiorentine.

E' bensì vero che questo effetto deve in buona parte attribuirsi all' impedimento del ponte, che ha gli archi troppo ristretti, ch'è di figura irregolare, che neppure è disteso in una sola linea retta, formando più tosto due linee inclinate tra loro con un angolo assai sensibile. Ma il rialto del fondo in quel luogo, per tutte le ragioni addotte antecedentemente, arguisce un rialzamento consecuti-

vo e continuato per tutto il tronco superiore sino a Firenze. E generalmente parlando, siccome non vi è Fiume, il cui corso non resti in qualche luogo imbarazzato dai ponti, dalle sezioni irregolari, dalle chiuse o naturali o artificiali; così in tutti vi sarà una ragione di doversi ammuchiare in qualche luogo più copiosamente i sassi e le ghiaie, e queste servendo d'intoppo alle altre, che sopravvengono, dovrà pure il rialzamento del fondo stendersi e continuarsi gradatamente all'insù. E quand'anco il corso d'un Fiume fosse del tutto libero, se vi è un limite delle ghiaie, se la quantità di esse va sempre crescendo nelle piene, se non se ne può sperare una diminuzione sensibile col dibattimento reciproco; vi si avrà sempre il generale fenomeno d'un successivo rialzamento di fondo.

Non ne viene però la conseguenza indicata dal Guglielmini, che se i sassi e le ghiaie non si sciogliessero a poco a poco in arenne, e sotto quest'altra forma non si portassero dalle acque correnti infino al Mare, il riempimento degli alvei sarebbe così grande, che le acque ringorgando inonderebbero le campagne, o devierebbero dal loro primiero corso. Mentre in primo luogo le acque correnti non portano seco delle nuove ghiaie che nei primi violenti scarichi di ciascuna piena: secondariamente la quantità delle ghiaie portate di nuovo in ciascuna piena non è così grande come alcuni si sono immaginati: e finalmente si distribuiscono le materie medesime per tutto l'alveo dei Fiumi, e si consumano in parte negli usi delle fabbriche e delle strade. Secondo un poco di calcolo che si è fatto, si leveranno annualmente dal Reno 12,500 piedi cubici di ghiaia per il solo risarcimento delle strade. Però i Fiumi non possono ordinariamente alzarli il fondo a segno di smontare gli argini, e deviare dal loro corso. Che se mai per qualche combinazione di varie cause accadesse il caso di un maggiore precipizio di ghiaie; allora veramente il fiume, o si dovrà contenere con argini altissimi sopra il piano delle campagne, come accade in Ombrone, o sarà obbligato di mutar letto, come più volte è già accaduto nel Reno, nel Panaro, nel Taro ec., e come frequentemente si vede nei tronchi superiori del Pò, dove le ghiaie sono più grosse e più copiose.

I Fiumi che portano solamente arena e terra si rialzano molte volte di letto, ma non si rialzano sempre, nè tanto, nè per tutta l'estensione dell'alveo. Io non citò per esempio il tronco della Brenta, ch'è superiore al ponte del Dolo, dove il corso del Fiume è così sconcertato dagli impedimenti del fondo, dalle lunghe tortuosità, e dalle varie diramazioni, come dirassi a suo luogo, che nel caso presente non può servire di regola. Basterà qui dire che sotto il Ponte del Dolo, dove l'alveo del Brentone è rettilineo e affatto libero, si trovano ancora degli interramenti considerabili. Se ne può avere una misura precisa nella botte sotterranea che attraversa il Brentone nel luogo di Corte, sopra la di cui volta le deposizioni di arena e terra arrivavano, quando vi sono stato; all'altezza di cinque piedi Veneti. Sopra l'altra botte inferiore, al luogo di Conche non ho trovato degli interramenti che per un piccolo tratto, e all'altezza di piedi $2\frac{1}{2}$ da una parte. Per lo contrario il canale di Pontelungo, che serve allo scarico delle acque residue di Padova, e del canale della Battaglia, si è mantenuto assai più profondo e incassato nel piano della campagna. L'azione del flusso, e riflusso del mare, in eguale distanza dalla foce, vi è sensibile più del doppio che nel Brentone. Mentre ho trovato che al passo di S. Margherita sopra il Brentone la variazione giornaliera è solamente di un mezzo piede, e che al passo di Correzzola sopra il canale di Ponte lungo, in distanza maggiore dal mare, la variazione è di un piede intero.

Ma i Fiumi che corrono in ghiaja, non si distinguono solamente dagli altri che sono puramente arenosi, perchè si rialzano maggiormente di fondo. Si distinguono ancora perchè sono soggetti a maggiori e più frequenti cambiamenti nella direzione del corso e nella forma di tutto l'alveo. Le materie più grosse, spinte con moto lento e sbalzate quà e là irregolarmente in tempo di qualche piena, cominciando essa a cedere, possono poi restare abbandonate a mezzo corso, e ammucciarfi più copiosamente o da una parte o dall'altra: e i nuovi ostacoli così frapposti alla corrente la devono piegare, e rivolgete ad un altro termine, dove se si trovasse un fondo meno consistente si sprofonderebbe il nuovo alveo più del vecchio, e vi si farebbe come una chiamata alla piena soprav-

pravvegnente. Ciò è generalmente conforme a tutte le osservazioni: mentre quasi in tutte le piene si hanno dei cambiamenti di filone nei fiumi che portano ghiaje: e i cambiamenti ordinatamente sono tanto maggiori quanto le ghiaje sono più grosse e più copiose.

Le conseguenze di tutti questi principj sono state indicate dal Guglielmini nel Cap. VI., e da Eustachio Manfredi nelle sue annotazioni, e sono primieramente: che col cambiamento del filone si alternino le alluvioni e le corrosioni: che si abbandonino qualche volta le ripe corrofe, e i ripari vi diventino inutili: che in vece le corrosioni si portino in altri luoghi previamente non riparati: che la linea del corso si allunghi, e così venga a diminuirsi la pendenza ragguagliata del fondo: che qualche volta per lo contrario si accorci la linea, e la pendenza diventi maggior di prima: che la pendenza diminuita o accresciuta in qualche tronco porti nei tronchi superiori delle altre variazioni analoghe a quanto si è detto nel Cap. IV. Di più il Manfredi ha rilevato che siccome i Fiumi ghiarosi hanno una pendenza grande di fondo, così per poco che vi si allunghi la linea, o si raccorci, potrà essere considerabile e la differenza totale della caduta che resterà inferiormente, e l'interamento o l'escavazione, che in seguito dovrà averfi nel tronco superiore.

Coi principj medesimi si può anche rendere la ragione, per cui se un Fiume uscendo dai seni angusti delle montagne, e incominciando a stendersi nella pianura seguirà a portar ghiaja, avrà bisogno di una larghezza d' alveo molto maggiore, che nei tronchi inferiori, dove quantunque s' ingrossi il corpo d' acqua coll' unione di qualche influente, non arrivano però che arene ed altre materie più sottili. Così il Reno, che al ponte della via Emilia si stende per la larghezza di cinquecento e più piedi Bolognesi, sotto la confluenza della Samoggia, dove ha interamente lasciato di portar ghiaje, non arriva alla larghezza di piedi ducento. Si hanno delle differenze anche maggiori paragonando il Telino al ponte di Pavia, o l'Adda al ponte di Pizzighettone colle diramazioni superiori. Ed' è inutile qualunque opera, che tenda ad impedire gli effetti delle cause accennate con restringere il letto, raddrizzare le tortuosità, e prevenire le successive deviazioni dei Fiumi, dove

Meccanica.

Zz

con.

continuano a portar sassi ed altre materie grosse; onde ha detto benissimo il Guglielmini che in tali siti sono i Fiumi *quasi indomabili*, nè diventano *maneggiabili* se non dove incominciano a portare soltanto delle materie più sottili.

Vi è un altro fenomeno più grande che dipende dai principj indicati, la molteplicità dei rami, che nei fiumi ghiaiosi si dividono variamente, e poi si riuniscono insieme, lasciando in mezzo delle Isole. Anche i Fiumi maggiori, dove hanno lasciato affatto le ghiaie e dove hanno pendenze assai minori, presentano lo stesso fenomeno di molte diramazioni. Ma la divisione dei rami vi si conserva naturalmente per molto tempo, quando le acque vi giungano a tale altezza forza e velocità che basti per tenere incorporate le torbide, senza lasciarle cadere a fondo, e incominciare l'interramento. Così, per non parlare delle più antiche diramazioni, dopo che il Pò s'è aperto il ramo di Venezia verso la metà del secolo duodecimo, vi vollero quattro secoli perchè si perdesse il ramo più antico di Ferrara, e in seguito i due nuovi rami delle Fornaci, e di Ariano si sono mantenuti con piccole variazioni fino al presente. Laddove nei tronchi superiori, dove la pendenza è più grande, e le materie sono più grosse, quasi in tutte le piene succedono dei cambiamenti considerabili d'isole, e di rami.

CAPO SETTIMO.

DELLE PENDENZE DEL FONDO DEI FIUMI

PRINCIPALMENTE DEL BOLOGNESE, E DEL PADOVANO.

Tutt' i Fiumi, che portano arene e torbide, correndo ancor solitarj senza ingrossarsi coll' unione di nuove acque, si dispongono il fondo nei tronchi inferiori con una declività minore di quella, che hanno nei tronchi superiori, come ha insegnato il Guglielmini nella regola settima del capo quarto. Tutte le livellazioni, che si sono fatte nei Fiumi di tal natura, tra un' influente e l' altro, prescindendo da alcune non molto grandi nè generali irregolarità, danno una pendenza ragguagliata dei fondi gradatamente minore andando all' ingiù. Così per esempio il Reno nelle prime pertiche 781 sotto allo sbocco della Samoggia, secondo le

ul-

ultime livellazioni, pende in ragione di once $17 \frac{1}{2}$ per miglio: e in tutto il tratto di miglia $7 \frac{1}{2}$ dalla Samoggia sino alla rotta, da cui sboccava ultimamente nelle valli, ha la pendenza ragguagliata d'once $18 \frac{1}{2}$ per miglio, che si fa poi d'once $14 \frac{1}{2}$ nelle ultime tre miglia sopra la rotta. La ragione si è che intrecciandosi insieme diversamente colla continuazione del corso, sfregandosi e dibattendosi le arene si assottigliano sempre di più, e ricercano delle forze sempre minori per essere portate più lontano: e comunque la pendenza del fondo influisca nell'accelerare le acque, e nell'accrescerne la forza, posto ancora il medesimo corpo d'acqua, dove saranno materie più sottili, per tenere escavato il fondo basterà sempre una minore declività. La stessa diminuzione delle pendenze si osserva pure nei Fiumi, e nei torrenti, che corrono in ghiaie e sassi: non perchè i sassi e le ghiaie collo sfregamento continuo si diminuiscono sensibilmente di mole, ma perchè restano di mano in mano più addietro le ghiaie, e i sassi più grossi e irregolari. Così per diverse ragioni si verifica sempre generalmente, che posto ancora il medesimo corpo d'acqua si diminuiscono le pendenze dove si diminuiscono le materie trasportate insieme coll'acqua.

Passando poi a quei Fiumi, che s'ingrossano col concorso di altri Fiumi minori, egli è certo egualmente che vi si richiederà una pendenza di fondo tanto minore quant'è maggiore il corpo delle acque unite. Anche quest'altro principio è stato diffusamente insegnato dal Gugliemini nel capo quinto, e dal Manfredi nelle sue risposte apologetiche: ed è pure un principio autenticato dai fatti e dai fenomeni. Mentre se si misureranno le pendenze di tutt' i rigagnoli che costituiscono un rivo, di tutt' i rivi che formano un torrente, di tutt' i torrenti che sboccano in un Fiume reale, si troverà sempre che i minori hanno un fondo più inclinato e più ripido dei maggiori. E così il Pò che nei tronchi superiori corre con pendenze grandissime di superficie e di fondo, dalla Stellata sino a Lagoscuro, dove il pelo basso può riguardarsi come parallelo al fondo, non ha una pendenza maggiore di once 7 del piede Bolognese per miglio. Il Panaro prima di sboccare nel Pò allo stesso luogo della Stellata corre colla pendenza d'once $18 \frac{1}{2}$.

Z z 2

Questo

Questi due fatti ci sono stati attestati da Eustachio Manfredi. Nella generale livellazione dei Fiumi del Bolognese s'è ritrovato, che il fondo del Lavino pende in ragione d'once $76 \frac{1}{2}$: che la Samoggia nelle ultime due miglia sopra lo sbocco del Lavino pende in ragione d'once $53 \frac{1}{2}$ per ciascun miglio: e che dopo l'unione del Lavino la pendenza ragguagliata della Samoggia si fa d'once $37 \frac{1}{2}$ sino al suo sbocco in Reno. Il Reno poi due miglia sopra la confluenza della Samoggia pende in ragione d'once $26 \frac{1}{2}$ istessamente per miglio, e in tutto il tratto superiore di cinque, o di 6 miglia ha la pendenza ragguagliata d'once 25. Dopo l'unione della Samoggia, come si è detto, la pendenza del Reno incomincia ad essere solamente d'once 18.

Considerando maturamente tutte queste osservazioni, l'esempio del Reno, della Samoggia, e del Livino suggerirà un' altro principio: che se l'influente, e il recipiente porteranno al punto della confluenza materie prossimamente simili, ed omogenee; la pendenza dell'alveo comune sarà minore non solamente di quella dell'influente, ma di quella ancora che il recipiente aveva prima nel proprio alveo. Le altre livellazioni, che si sono fatte nel Tevere sopra e sotto lo sbocco del Teverone, e nella Quaderna sopra e sotto lo sbocco della Gajana, confermano questa verità. E certamente supponendo che le arene e le torbide dell'influente e del recipiente siano prossimamente della medesima quantità e qualità; si avrà un Fiume quasi egualmente torbido e prima e dopo la confluenza, e ad una stessa quantità d'acqua corrisponderà prossimamente la stessa quantità di terra e di arena. Ora qualunque siasi la forza necessaria per sostenere incorporate le torbide, smaltire le deposizioni, e mantenere spurgato il fondo, deve essa dipendere dal corpo d'acqua, e dal declive, e però se un dato corpo d'acqua del solo recipiente si stabilisce sopra una data inclinazione di fondo; dopo l'unione d'un influente, con un maggiore corpo d'acqua, dovrà lo stesso recipiente stabilirsi sopra un declive minore di prima.

E ciò deve egualmente aver luogo nel tempo delle massime piene, e nella maggiore ballezza d'acque, e in tutti gli altri stati intermedi del fiume. Eustachio Manfredi spiegando il Corollario quarto

quarto della Prop. VI. del Cap. V. del Guglielmini, che quanto sarà maggiore l'acqua ordinaria del Fiume sarà ancora tanto meno declive l'alveo, notò che non è limitato il tempo, in cui la forza dell'acqua è capace di spingere più oltre le materie sciolte e staccate del fondo, al solo stato delle massime escrescenze del Fiume, ma potersi tal effetto aspettare in qualche grado anche nello stato ordinario dell'acqua. Nè qui deve si opporre che calando le piene non si diminuisce con egual porzione la quantità delle materie trasportate insieme coll'acqua, e che allora restando quasi egualmente torbido il Fiume potrà lasciare delle deposizioni, se alla minore altezza non supplirà una caduta più grande. Questa difficoltà, che riguarda lo stabilimento dei Fiumi ancor solitarij, non è più applicabile al caso dei Fiumi che si suppongono stabiliti di letto, e che poi si riuniscono insieme. Mentre sarà sempre vero che se il solo recipiente con una data pendenza mantiene espurgato il fondo, e in tempo che le acque sono basse, e quando le piene sono o massime o medie; dopo l'unione di un influente avrà bisogno di minor pendenza per sostenere in ogni tempo le torbide, e non lasciare delle nuove deposizioni.

Ciò pure vale egualmente nel caso che per la differenza del corso e dell'origine non siano contemporanee le piene, e che qualche volta il recipiente sia basso mentre sopravviene la piena dell'influente, o che essendo già passata la piena d'un influente tutti gli altri superiori di corso portino una piena maggiore nel recipiente. Egli è vero che se la piena del recipiente troverà l'influente ancor basso, le acque torbide del primo si spanderanno per qualche tratto all'insù dentro l'alveo del secondo, e che però si rallenteranno di corso, e vi lascieranno delle deposizioni. Ma poi sopravvenendo la piena dell'influente si spugnerà nuovamente il fondo, e la pendenza tornerà ad essere quella stessa, che corrisponde al corpo d'acqua ed alla quantità e qualità delle ordinarie sue torbide. Quest'effetto si osserva principalmente allo sbocco della Samoggia nel Reno: mentre non combinandosi qualche volta le piene, vi ammucchia il Reno delle materie che vengono poscia smaltite sopravvenendo la prima piena della Samoggia. Essendo il solo influente in piena succederà

derà proporzionatamente lo stesso nell'alveo del recipiente. E ciò pure fu già osservato sino dai tempi del Guglielmini allo sbocco del Santerno, e le cui piene anticipando ordinariamente di molte ore, ringorgano per l'alveo del Primaro, correndovi per alcune miglia all'insù, e lasciandovi delle deposizioni, infino a tanto che le piene degli altri influenti superiori tornino a restituirvi il fondo nello stato medesimo di prima.

Lo stesso Autore nella Prop. I. del Cap. V. fece un lungo discorso intorno alla maniera, con cui si stabiliscono le pendenze del fondo dei Fiumi, e poi nei Corollarj della Prop. VI. espone due regole più precise: che quanto maggior copia d'acqua porterà un Fiume, tanto minore sarà la di lui caduta: e che quanto maggiore sarà in ciascuna particella d'acqua la forza, e la velocità, tanto pure sarà minore la declività dell'alveo. Poichè adunque la velocità dei Fiumi, che si uniscono insieme, cresce prossimamente in ragione della quantità d'acqua accresciuta, come si è detto nel capitolo terzo di questo libro: le due riferite regole del Guglielmini verrebbero a risolversi in una sola, che la declività del fondo de' Fiumi si diminuirà nella stessa proporzione, con cui crescerà il corpo d'acqua. Coll'occasione delle ultime controversie di Bologna per dare qualche regola più precisa ho posto il teorema: che in parità di tutte le altre circostanze il fondo del recipiente si potrà credere egualmente stabilito e prima e dopo il concorso d'un influente quando i seni delle pendenze siano reciprocamente proporzionali alle quantità d'acqua. E così essendo evidente, che i seni delle pendenze devono diminuirsi come una qualche funzione della quantità d'acqua accresciuta, ho preso la funzione più semplice, che è la semplice quantità d'acqua: e senza ricercare delle rigorose dimostrazioni, che non possono applicarsi ai teoremi dipendenti da tanti dati, e da tante condizioni, come i teoremi Idraulici, ne ho stabilita la verità sulle più precise osservazioni, che abbiamo intorno alle pendenze dei Fiumi torbidi.

Le quantità d'acqua nella Samoggia solitaria, e nella Samoggia unita al Lavino sono prossimamente come 3: 4. La pendenza della Samoggia sopra lo sbocco dal Lavino in tutto il tratto, a cui non

si estendono le ghiaie grosse, è di once $53 \frac{1}{4}$ per ogni miglio. Se i seni delle pendenze si diminuissero nella semplice ragione della quantità d'acqua accresciuta, farebbe la pendenza della Samoggia sotto allo sbocco del Lavino d'once 40, e dovrebbe poi essere anche minore per la diminuzione delle materie, che deve farsi colla continuazione del corso. Secondo le ultime livellazioni la pendenza totale è risultata d'once $37 \frac{1}{2}$: e così quantunque la Samoggia sia tanto irregolare di fondo, ciò non ostante nelle pendenze ragguagliate si accosta prossimamente alla regola già esposta. Il Reno ha un fondo più regolare, e porta materie meno differenti e sopra e sotto lo sbocco della Samoggia: ed è la portata del Reno solitario alla portata del Reno accresciuto della Samoggia incirea come 5:7. Se i seni delle pendenze si diminuissero nella ragione accennata, e se la pendenza del Reno sopra lo sbocco della Samoggia fosse d'once 25, farebbe la pendenza sotto allo sbocco d'once $17 \frac{1}{2}$: e se quella si prendesse d'once $26 \frac{1}{2}$ riuscirebbe questa d'once $18 \frac{1}{2}$. Ma la pendenza del Reno poco sotto alla confluenza della Samoggia è d'once $17 \frac{1}{2}$, e in tutto il tratto inferiore fino alle rotte la pendenza ragguagliata è d'once $18 \frac{1}{2}$. Abbiamo dunque tutta la corrispondenza che in questo genere di cose si può sperare tra la suddetta regola, e le osservazioni.

Le altre osservazioni che ho fatto intorno alla Brenta, e alle sue diramazioni confermano tutto ciò che si è detto in questo capitolo. Primieramente nel tronco superiore della Brenta per mille pertiche sotto al passo di Cortarolo, dove alle arene grosse si rrova frammischiata ancora della piccola ghiaia, la caduta si è trovata in ragione di piedi Veneti $2 \frac{1}{2}$ per miglio: e nelle susseguenti pertiche 1900, andando sino in vicinanza all' Isola del Ligonto, dove le materie sono più assottigliate, la caduta è in ragione di un solo piede e due terzi istessamente per miglio: e così la caduta si diminuisce coll' assottigliamento delle materie. In secondo luogo la caduta della Brenta che chiamasi vecchia, sotto alla diramazione della Brentella s'è ritrovata ragguagliatamente di più di due piedi per miglio: e così la caduta del fondo della Brenta intera sta alla caduta del fondo della Brenta vecchia prossimamente come 2:3, che
pure

pure prossimamente è la ragione delle quantità d'acqua della Brenta intera, e della Brenta vecchia in tempo di piena, come si è detto al principio del capo terzo di questo libro. In terzo luogo considerando che la Brentella, ch'è un corpo perenne d'acqua, non ha una caduta maggiore d' un piede e mezzo per miglio, quando la Brenta vecchia, che resta asciutta in tempo di acque basse, ha la pendenza di più di due piedi; si avrebbe un altro principio Idrometrico, che i Fiumi temporanei si stabiliscono il fondo sopra una pendenza maggiore di quella delle acque perenni.

CAPO OTTAVO.

DELLA PENDENZA DEGLI ULTIMI TRONCHI,
E DELLA FOCE DEI FIUMI, CHE SBOCCANO
PRINCIPALMENTE NELL' ADRIATICO.

I Fiumi andando a sboccare in mare, ed avendo una pendenza di fondo sempre più piccola in proporzione che vi si accostano, negli ultimi loro tronchi vengono lungamente ringorgati dalle acque istesse del mare. Il celebre la Condamine nella relazione del coraggioso suo viaggio ha riferito, e mi ha replicato molte volte a voce di avere osservato nel Fiume delle Amazoni, assai sensibile il flusso, e riflusso del mare alla distanza di duecento e più leghe sopra la foce. Io nel Tamigi ho osservato che il flusso marino era sensibile fin dieci miglia di là da Londra. Ancora nella Mosa, e negli altri Fiumi del nostro continente, che sboccano nell' Oceano, il flusso e riflusso si stende molto all' insù. Nei Fiumi dell' Italia, che sboccano o nell' uno o nell' altro Mare, abbiamo delle osservazioni più esatte e più precise. L' orizzontale tirata pel pelo basso dell' Adriatico arriva a incontrare il fondo del Pò tra la Stellata, e Lagosfuro alla distanza di più 40. miglia, dalla foce: il fondo del Priaro alla distanza di più di 16 miglia: il fondo del Lamone, e del Ronco unito al Montone, alla distanza di circa tre miglia e mezzo: il fondo del Fiume Savio alla distanza di due. L' orizzontale tirata dal pelo basso del Mediterraneo incontra il fondo del Tevere alla distanza di miglia 15: e proseguendo all' insù per altre 6 miglia si trova il

il fondo del Tevere ora più alto ora più basso dell'orizzontale suddetta: ed essendo le maggiori altezze di piedi $6\frac{1}{2}$, e le bassezze di 8 piedi, si può supporre che il fondo vi resti raggugliatamente inferiore nell'intero tratto di miglia 21.

La profondità della foce è di circa nove palmi Romani nel Tevere, di circa 3 piedi Bolognesi nel Fiume Savio, di $4\frac{1}{2}$ nel Primaro, e quasi di 5 nel Pò. Nel porto di Brondolo, dove sbocca in mare il Brentone unito a tutte le altre acque delle inferiori diramazioni di Padova, ho ritrovato la profondità della foce di circa 6 piedi Veneri sotto il pelo bassissimo dell'Adriatico: ed ho preso per foce l'ultima sezione dove il fiume corre ancora serrato tra le ripe. Il flusso, e riflusso del Mare si rende sensibile nel Brentone anche alla distanza di 15 miglia dalla foce. Onde in tutti questi Fiumi essendo assai maggiore il corpo d'acqua sopra la foce, dal confronto delle accennate osservazioni è manifesto, che tutti lasciano innanzi alla foce una profonda concavità, e che dopo una continua diminuzione delle pendenze del fondo finalmente di declivi diventano acclivi. Si sono fatte delle osservazioni ancor più minute in tutto il fondo del Primaro. Nella grande livellazione del 1761 s'è ritrovato che il fondo del Primaro, in distanza di circa 16 miglia dalla foce, nel luogo di Longastrino, restava per circa 8 once del piede di Bologna sotto il pelo bassissimo dell'Adriatico, e circa piedi 4 sopra la profondità della foce. La pendenza del fondo superiore era allora in ragione di 8, o 9 once per miglio: Nel tratto di miglia $3\frac{1}{2}$ dal suddetto luogo di Longastrino fin oltre lo sbocco del Santerno, la pendenza del fondo era in ragione di sole once 7: e si faceva poi d'once 4 nelle seguenti tre miglia, e mezzo fino in vicinanza allo sbocco del Senio. Sotto allo stesso sbocco tutto il fondo restava al di sotto dell'orizzontale tirata per il punto più basso della foce, e formava una concavità continuata, che raggugliatamente poteva valutarli di due o di tre piedi.

La profondità raggugliata della foce del Primaro in mare di piedi $4\frac{1}{2}$ è quella stessa ch'era si riconosciuta nella visita generale fatta in que' luoghi l'anno 1693. I profili dell'ultimo tronco dello stesso

Meccanica.

A a a

Fiu-

Fiume, che si sono rilevati nelle tre visite fatte negli anni 1739; 1757, 1761, quando si paragonino tra di loro, presentano agli occhi piuttosto delle parziali, che delle totali diversità: e quantunque dopo il 1739, e dopo la costruzione, e l'interramento del Cavo Benedettino si sia tanto rialzato il fondo del Primaro nelle parti più lontane dallo sbocco, non pare che sia seguita una variazione considerabile e continuata in tutto il tratto che resta inferiore all'orizzontale tirata per il pelo basso del Mare. Non vi è alcuna variazione sensibile nel tratto di sei, o sette miglia da Longastrino allo sbocco del Senio. Dallo sbocco del Senio al Mare, prendendo insieme gli interrimenti seguiti in alcuni luoghi, e le escavazioni di alcuni altri, mi pare che si compensino prossimamente, e che però con tutti gli accidenti di 22 anni non possa dirsi, che da Longastrino al Mare sia succeduta alcuna variazione sostanziale di tutto il fondo. Ne do qui annessi i profili nella fig. 139., dove *AB* rappresenta l'argine sinistro del Primaro: *CDL* il pelo delle massime escrescenze: *EGF* il piano della campagna: *ML* l'orizzontale tirata per il pelo basso del Mare: *NOPQRST* il fondo del Primaro riconosciuto nella visita del 1761: *nopqrs* il fondo riconosciuto nel 1757: *n'op'q't's* il fondo del 1739: *G* lo sbocco del Santerno, ed *I* quello del Senio. Le altezze di questo profilo sono espresse in piedi, once, e punti, e le distanze orizzontali in pertiche Bolognesi.

Non so se si possa produrre un fatto più preciso e più autentico per provare che gli ultimi tronchi dei Fiumi torbidi abbisognano di pochissima, e ancora di nessuna pendenza di fondo, e che in vicinanza della foce hanno anzi la declività posta al contrario. Il Guglielmini nella Prop. IV. del Cap. IV. incominciò ad indicare qualche ragione di un fenomeno così curioso ed interessante. Mentre disse che dove il flusso e riflusso è molto grande, l'acqua del Mare entrando nel tempo del flusso dentro l'alveo dei Fiumi, e ritornando indietro in tempo del riflusso, deve servire a tenere aperto lo sbocco, ed impedire che nell'ultimo tronco si lascino delle deposizioni. Il celebre Sig. Gabriello Manfredi seguì in diverse scritture i principj medesimi del Guglielmini, ed attribuì all'azione del flusso, e riflusso l'invariabilità della foce, e dell'ultimo tronco del

Pri-

Primario . Ecco il più semplice aspetto, sotto di cui io vorrei presentare i principj medesimi . Le torbide di tutt' i Fiumi sopravvengono principalmente nel tempo delle piene, e nello stato ordinario si possono riguardare i Fiumi come più chiari . Dunque la corrente del flusso, dov' è sensibile, ringorgando giornalmente dentro l' alveo di un Fiume, e ritardandolo di corso, non deve lasciar luogo alle nuove deposizioni . Ma nello stesso tempo facendolo alzare di pelo deve lasciarvi nel retrocedere una maggiore velocità . Dunque la corrente del riflusso, sempre maggiore di quella del flusso, deve fare le veci di un corpo d' acqua accresciuto, contribuire alla maggiore escavazione del fondo, e stabilirlo sopra di una pendenza minore di quella che converrebbe al corpo ordinario del Fiume .

In occasione delle controversie accennate ho aggiunto a questi principj un' altra riflessione importante, che può applicarsi generalmente anche ai luoghi, nei quali il flusso, e riflusso non sia tanto sensibile come nell' Adriatico . Le teorie dei Fiumi, che sboccano dalle chiuse, e che si spiegheranno distintamente a suo luogo, si possono applicar alle foci dei Fiumi, che essendo, massime in tempo delle piene, superiori di pelo alle superficie del Mare, vi si vanno a spianare liberamente . La libertà del corso, e dell' esito deve verso la foce rendere le acque più celeri, e l' accelerazione delle acque che sboccano in Mare deve stendersi per qualche tratto all' insù alle altre acque che non vi sono ancora arrivate, e la maggiore accelerazione di tutte deve necessariamente cagionare l' escavazione del fondo in tutto il tratto superiore alla foce, come innanzi allo sbocco delle chiuse . Non si può dubitare nè della causa nè degli effetti di questa maggiore celerità: mentre la superficie dei Fiumi, che nelle parti più lontane cammina parallela o quasi parallela al fondo, in vicinanza allo sbocco s' inclina, e si stringe maggiormente sopra lo stesso fondo: e questo curioso fenomeno fu già osservato e notato dal Castelli nel Corollario XIV. sopra le acque correnti, e dallo stesso Guglielmini nella Prop. II. del Cap. VIII. sopra la natura dei Fiumi .

Il Sig. Eustachio Zanotti, celebre Professore di Astronomia in Bologna, di cui onorerò sempre particolarmente il sapere, il carat-

tere, e la memoria, nel suo bellissimo ragionamento, che leggesi sul principio del Tom. VII. della Raccolta degli Scrittori d'acque fatta in Firenze, ha spiegato ampiamente coll'ajuto di tutte le osservazioni come innanzi alla foce la declività della superficie de' Fiumi subentri alla declività del fondo, e ne renda più rapido il corso anche sopra di un fondo acclive. E tra le osservazioni da lui prodotte merita di essere ricordata quella delle due diramazioni del Tevere, chiamate d'Ostia, e di Fiumicino. Il ramo d'Ostia dal punto della prima divisione insino al Mare è di pertiche Bolognesi 1900, ed il ramo di Fiumicino è solamente di 1000. La larghezza delle fezioni nel ramo di Fiumicino è di gran lunga minore che in quello di Ostia. Ciò non ostante la massima profondità nel ramo di Fiumicino arriva sino a 19 piedi, e nel ramo di Ostia arriva a 10 piedi solamente: il che non può attribuirsi se non alla declività della superficie, che è maggiore di circa il doppio nel ramo più corto circa della metà. Considerando poscia lo stesso Autore i profili del Tevere e di altri Fiumi, e quello massimamente del Lamone, ha creduto di poterne dedurre un principio più generale: che la pendenza ragguagliata della superficie d'un Fiume nella massima efcrecenza, dal punto dove arriva il pelo basso del Mare sino alla foce, è eguale alla pendenza ragguagliata del fondo o del pelo basso del Fiume, cominciando dallo stesso punto, e procedendo verso la parte contraria.

Ma nell'applicazione, che ho fatto de' principj indicati al caso delle stesse acque, non mi è parso di poter accordare che l'accelerazione delle acque originata dalla libertà dello sfogo si stendesse all'insù fin dove arriva l'orizzontale tirata dal pelo basso del Mare. Mi è parso che nel profilo, che Eustachio Manfredi ci ha lasciato del Tevere, il pelo alto resti per lunghi tratti parallelo al pelo basso, ed al fondo superiormente al luogo della divisione dei due rami d'Ostia, e di Fiumicino: e che solamente da quel luogo ingiù, cioè per non più di quattro miglia, il pelo alto si stringa sensibilmente, e continuatamente sopra del pelo basso, e sopra l'orizzontale tirata o per la superficie del Mare, o per la profondità della foce. Dal profilo del Primaro quì annesso, fig. 139., apparisce che
da

da Longastrino ingiù sino allo sbocco del Santerno, è piccolissima l'inclinazione del pelo alto delle piene sopra il pelo basso del Mare, e sopra l'orizzontale tirata per la profondità della foce: che la declività del pelo alto delle piene incomincia a crescere sensibilmente e gradatamente andando dallo sbocco del Santerno sino a quello del Senio, e che si fa poi essa tanto maggiore nel tratto delle ultime tre o quattro miglia sopra la foce. Con questa gradazione adunque deve anche crescere la velocità, che nasce dalla libertà dello scarico di tutto il Fiume nel Mare. Considerando poi che l'ultima concavità, per cui il fondo del Primaro resta tutto inferiore all'orizzontale tirata per la profondità della foce, si stende sino in vicinanza allo sbocco del Senio, ed occupa il tratto di circa otto miglia; ho creduto che in parte si dovesse essa attribuire all'accelerazione delle acque, e in parte ancora all'azione del flusso, e del riflusso, che in tutto quel tratto riesce molto sensibile.

Ho fatto uso di tutti i principj antecedenti nei Profili che ho presentato quando trattavasi di una nuova inalveazione delle acque del Bolognese, e delle diramazioni della Brenta. Nel caso di rivolgere tutte le acque della Brenta nel canale di Pontelungo ho supposto che in tutto l'ultimo tronco, dov'è più sensibile il flusso, e riflusso del mare, l'accrescimento del corpo d'acqua, e la declività della superficie dovessero bastare perchè il fondo presente del canale si preservasse da qualsivoglia sorrenamento: ed ho supposto che incominciando dal luogo dove si ha più di un mezzo piede di flusso, ed andando all'insù potesse bastare la caduta del fondo prima di un piede per miglio, e poi d'un piede, e mezzo, e di due. Nel caso delle acque di Bologna ho creduto che se le declività della superficie, e del fondo presente da Longastrino sino alla foce sono bastate finora a preservare il fondo dalle maggiori deposizioni, faranno tanto più sufficienti quando nell'ultimo tronco corra continuamente arginato un maggior corpo d'acqua: e da Longastrino andando in su sino alla confluenza del Sillaro ho creduto che le cadenti si potessero regolare in ragione di 9, o di 10 once del piede Bolognese per miglio, e poi d'once 11, o 12 sino all'Idice, e alla Savena, e di 13, o 14 sino al vecchio alveo del Reno. Il più minuto dettaglio

taglio delle cose allora proposte non interesserebbe adesso bastantemente i lettori: e però mi sono quì limitato all' esposizione dei principj generali, che possono servir di regola in altri casi consimili.

Ma quì non hanno da terminarsi le considerazioni dei Fiumi, che sboccano in mare. I Fiumi d' Italia, dopo di esservi sboccati presentano agli occhj del Filosofo un altro curioso fenomeno di piegarfi sulla sinistra della foce. Il fenomeno nasce dalla combinazione del moto delle acque di ciascun Fiume, e del moto litorale del Mare. Moto litorale, e radente si chiama quello, con cui l'acqua entrando continuamente dallo Stretto di Gibilterra, dopo di aver girata tutta la circonferenza del Mare superiore, e inferiore, cioè dell' Adriatico, e del Mediterraneo, esce poi dalle parti della Spagna. I marinari sino nel secolo decimosesto si accorsero di questo moto per la diversità del tempo, che in parità dei venti e delle altre circostanze impiegavasi nell' andare, e nel tornare da Corsù a Venezia, e s' è incominciata quindi la pratica di costeggiare le rive Settentrionali del Golfo nell' andare da Corsù a Venezia, e nel ritorno verso Corsù di costeggiare le rive Meridionali lungo lo Stato Ecclesiastico, e il Regno di Napoli. Dal moto dei galleggianti si è poi ricavata la direzione precisa della correntia non solamente nell' Adriatico, ma ancora nel Mediterraneo. Geminiano Montanari nel suo discorso sopra il Mare Adriatico ricavò appunto dal moto dei galleggianti, che la velocità della correntia è di 3 o di 4 miglia in 24 ore. Onde essendo la velocità delle acque dei Fiumi di circa 3 o di 4 miglia per ora, la proporzione delle due velocità sarà quella di 1 a 24.

Combinando il moto litorale del Mare col moto di qualche Fiume alla foce, è manifesto che le acque del Fiume devono prendere una direzione media, e rivolgere il corso a dritta, come già notò il Guglielmini nel Coroll. VII. della Propos. IV. del Cap. VII. In questa maniera deviando il Fiume, e la correntia dal corso di prima, e la direzione media e composta accostandosi più a quella del Fiume che a quella della correntia, per essere la velocità della correntia ventiquattro volte minore di quella del Fiume; il Mare più a destra tra la spiaggia e tra il luogo della direzione
com-

composta di tutte le acque, resterà senza il moto della corrente medesima già rotta e deviata. Però incominceranno a deporfi più copiosamente lungo la spiaggia destra le materie mescolate insieme colle acque del Mare, formando diversi scanni o banchi d'arena, che anderanno a poco a poco e continuamente crescendo. E così il Fiume trovando sempre maggiori impedimenti sulla dritta, si volgerà a poco a poco dove avrà il corso più libero, e finalmente arriverà a stabilirsi tutto al contrario della direzione presa a principio, cioè tenendosi costantemente sulla sinistra della foce. Il Montanari osservò che tali si mantengono appunto gli sbocchi del Tagliamento, della Piave, e degli altri fiumi dello Stato Veneto. Il Zendrini nella sua relazione sopra la diversione del Ronco, e del Montone, aggiunse ancora l'esempio dei Fiumi della Romagna: e nel capitolo primo dell'altra relazione sopra il porto di Viareggio applicò i principj medesimi ai Fiumi del Mediterraneo, colla sola differenza, che essendo nel Mediterraneo più debole il flusso e riflusso, riesce più sensibile il moto litorale, e vi si lasciano per lungo tratto sulla dritta delle deposizioni assai più copiose, senza punto vedersene sulla sinistra. La protrazione delle spiagge d'Italia, e il lento e successivo alzamento del livello dell'Adriatico, e del Mediterraneo, suggerisce il soggetto di altre considerazioni, che troveranno un luogo più proprio nel tomo susseguente.

LIBRO SECONDO.

DELLE OPERAZIONI DEI FIUMI.
PRINCIPALMENTE D' ITALIA.

CAPO PRIMO.

DELLE LIVELLAZIONI.

DOpo di avere diretto e di aver fatto eseguire sotto a' miei occhj le più importanti livellazioni, tutt' insieme nel tratto di circa quaranta miglia, credo di servire al pubblico interesse ricapitolando ciò che mi è parso di suggerire in quest' operazione fondamentale di tutte le provvidenze da darsi per le nuove inalveazioni de' Fiumi, e per i canali di navigazione, e d' irrigazione. Ho già fatto avvertire nei corollarj del Teor. I. del Lib. III. che la superficie, sotto di cui si equilibrano i fluidi, può considerarsi come sferica, e nelle distanze non molto grandi si confonde col piano, ch' è perpendicolare alla direzione della gravità: ed ho anche indicato il metodo di calcolare a qualunque distanza la deviazione della linea del vero livello, ch' è l'arco d' un circolo massimo della Terra, dalla tangente, ch' è la linea del livello apparente. Se da un luogo dato a qualunque luogo proposto si potesse tirare un canale, e l'acqua vi si potesse render stagnante, si avrebbero i punti del vero livello, a cui si potrebbero rapportare le altezze, e le profondità di altri punti. Questa è la livellazione della natura, ed è il riscontro indubitato e sicuro di tutte le livellazioni artificiali. A me una volta è riuscito di livellare ad acqua assolutamente stagnante un tratto di più di mille braccia. Ma siccome nei tratti assai lunghi è troppo difficile di tirare dei canali, in cui l'acqua riducafi ad essere stagnante, ed è sempre incerta l' altezza media che si potrebbe prendere nella superficie dei laghi, e di altri maggiori recipienti anche poco agitati dal vento, o da altre cause accidentali; il primo com-
penso,

penso, che l' arte vi ha ritrovato, sino dalle più antiche epoche dell' Idrostatica, è stato quello di replicare l' operazione con tanti canali successivi, o colla trasposizione di uno, o di più tubi comunicanti.

Vitruvio nel Cap. VI. del Lib. IV. ci descrisse la pratica de' suoi tempi scrivendo che si livellava, o col traguardo, o col livello d'acqua, o meno fallacemente col corobate. Chiamavasi corobate un regolo lungo incirca venti piedi, che aveva all' estremità due braccia incastrate ad angolo retto, e tra le due braccia aveva pure pendenti diversi fili con dei piombi attaccati inferiormente. Con alcune linee tirate in un altro regolo, posto al disotto, riconoscevano gli antichi se i fili pendevano ad angolo retto dal primo regolo, e s' esso per conseguenza era orizzontale: oppure avendo uniti insieme, e tenuti i due regoli esattamente paralleli, e poi versando dell' acqua in un canaletto scavato nel regolo inferiore, e procurando che l' acqua ne toccasse esattamente i due margini, riducevano e l' inferiore, ed il superiore ad essere paralleli all' orizzonte. Ma la difficoltà di trasportare, e di connettere insieme due corobati, di tragarli al lungo della superficie senz' alcun altra guida dell' occhio nudo, e di giudicare, quando l' acqua riempisse dappertutto il canaletto scavato nel legno, doveva necessariamente dar luogo ad errori considerabili. Però non è meraviglia se anticamente siano riuscite male delle intraprese ancora grandiose per il solo difetto della livellazione. Così racconta Tacito nel Lib. XII. degli Annali che volendo l' Imperatore Claudio con un taglio del monte asciugare il Lago di Celano, aprendovi un emissario nel Fiume Garigliano, finita l' opera l' emissario non si trovò sprofondato abbastanza per dar esito alle acque: Ed essendosi aperto in seguito uno scavo maggiore e più profondo, le acque ne uscirono con tant' impeto, che strapparono i fondamenti del ponte, e fecero rovinare le case vicine, con pericolo dell' Imperatrice Agrippina, che rimproverò di frode e d' imperizia l' Architetto Narciso.

Il Riccioli nel Cap. XXVI. del Lib. VI. della Geografia Riformata, e il Leupold nella Par. IV. del Teatro Statico ci descrissero alcuni altri livelli antichi, e tra tutti raccomandò il Riccioli l' uso del livello a fluidi colorati. Esso consiste in un lungo tubo di ottone, dalle cui

Meccanica.

B b b

estre:

estremità forgono due bocce di vetro, terminare superiormente in due cannelli più piccoli, che si riempiono di vino, o di qualch'altro fluido colorato, in cui le due superficie forgano allo stesso livello, e si possano distinguere più facilmente. In altri paesi si cerca di fissar meglio la visuale colle diottrie formate o da piccoli fori circolari, o dall'interfecezione di due fili: e in alcuni luoghi ancora essendo saldati e chiusi i due tubi comunicanti si leva l'aria dallo spazio che avanza al fluido colorato, e si fa distinguer meglio la superficie superiore. Tra di noi si trascuravano tutte queste cautele, non si aveva una maggiore attenzione nella misura delle altezze tragguate, e la facilità di maneggiare questa sorte d'istrumenti, e di trovarvi segnati naturalmente i punti di livello coll'equilibrio di un solo fluido non lasciava sentire i difetti e gli errori che si commettevano. Eppure in tutti i Paesi si trovano degli esempj di operazioni riuscite male per difetto delle livellazioni: dappertutto si hanno dei casi che essendosi ripetute con altri metodi più esatti le livellazioni fatte col metodo volgare vi si sono trovati degli errori grossolani: e la molteplicità di questi casi ha dato luogo di sospettare che se qualche volta si è riscontrato bastantemente esatto il risultato delle volgari livellazioni, ciò sia stato unicamente perchè tra le varie combinazioni degli errori, che vi si possono commettere in più e in meno, sia possibile anche quella, in cui gli errori commessi in più e in meno arrivino a compensarsi tra di loro. Io ho un solo caso da addurre di un'antica livellazione che ho riconosciuta per giusta, ed è quella che nel 1519: si è fatta nel tronco superiore dell'Adda, dove dal piede del Monte Robbio andando in giù per due miglia la caduta del pelo basso si è ritrovata di 46 braccia, e alcune once. Ma posso produrre molti casi di livellazioni grossolanamente sbagliate: per esempio che dal fondo dell'ultimo tronco del Naviglio di Milano fino al pelo basso del Tesino a Pavia ho ritrovato 91 braccia di caduta, in vece delle braccia 65, che si erano trovate prima col vecchio metodo di livellare.

E' sempre incerta la stima dell'occhio nudo, e due livellatori difficilmente anderanno d'accordo nella posizione della biffa senza che tra l'uno e l'altro non corra qualche differenza considerabile.

.Ognu-

Ognuno se ne può accertare da se medesimo prendendo una laminetta piana e ben liscia, ed esaminando se sia possibile di determinare, anche alla distanza di poche braccia, in qual punto del muro opposto vada a finire la visuale regolata sul piano della laminetta medesima. Per poco che il centro dell' occhio si tenga rilevato sulla prima delle due linee, o delle due superficie, per cui deve passar la visuale, nasce una sorta di parallasse, che porta qualche angolo di errore: e per quanto piccolo sia l' angolo, alla distanza di alcune braccia la differenza delle altezze può essere non tanto piccola, e moltiplicandosi gli errori colle battute dipenderà da una pura casualità, che si compensino tra di loro, o diano dei risultati lontanissimi dal vero. Queste considerazioni hanno portato la necessità di assicurare la visuale colle diottrie. Ma per assicurare ancora i punti del traguardo, e per non errare nel termine della visuale medesima è convenuto ancora di rinforzare la vista col cannocchiale: e con ciò si è avuto il vantaggio di livellare a tratti più lunghi, e di semplificare tutta l' operazione. Una volta ho fatto la prova di mettere la biffa alla distanza di 777 braccia per parte, e così di livellare da una sola stazione il tratto d' un mezzo miglio. Non mi sono mai esteso di più per la difficoltà di concertare a maggiori distanze la posizione precisa della biffa. Così nel tratto di braccia 55292 da Milano a Pavia, quantunque convenisse di limitare molte battute al fondo dei fossi, e al soprarco dei ponti, mi è riuscito di fare la livellazione tutta di seguito con sole 85 stazioni. Nella pratica volgare di riguardare ad occhio nudo, e attraverso alla superficie de' fluidi colorati, non potendosi prendere più di 80 braccia per parte, vi farebbero abbisognate circa 345 stazioni: e questa semplice riflessione basta per far vedere, che il metodo volgare essendo sempre incerto ed erroneo nei tratti non molto grandi, e non potendo stendersi ai luoghi, dove s' incontrino delle rupi scoscese, o dove s' abbiano ad attraversare dei Fiumi, e dei marazzi, r' esce poi d' una complicazione, e di un imbarazzo grandissimo nelle maggiori livellazioni.

L' Huygens, e il Picart furono i primi a portare nelle operazioni Geodetiche la stessa precisione delle Astronomiche rinforzando

la vista con un cannocchiale d'un piede e mezzo, e anche più, e fissando la linea del traguardo coll'intersecazione di due sottilissimi fili, posti nel foco dell'obiettivo, e con un piccolissimo foro, aperto nel mezzo di una lastra, che vi deve coprir l'oculare. Il Roemer, e il de la Hire hanno dato delle altre forme al livello, e il Picart ha descritto tutti questi stromenti nel suo trattato sulla livellazione. Essi non differiscono che nella maniera di montare il cannocchiale, e di ridurne l'asse e la visuale alla situazione orizzontale. Il Picart, e il Roemer si sono serviti di un sottilissimo crino, chiuso in una lastra d'ottone, sospeso da un ago, e disteso da una palla di piombo, che deve restar immersa nell'acqua perchè le oscillazioni del crino finiscano più presto: ed essendosi una volta assicurati, che mentre l'asse del cannocchiale era parallelo all'orizzonte, il crino corrispondeva ad un dato punto scolpito in una lastra d'argento, facevano che in tutte le stazioni traguardando da una parte e dall'altra, tornasse il crino a corrispondere precisamente allo stesso punto. Il livello dell'Huygens ha il vantaggio che vi si può fissare la linea verticale, e l'orizzontale restando l'osservatore allo stesso luogo: e in primo luogo si può fissare la linea verticale avvicinando, o scostando dal punto di mezzo un anello di ottone infino a tanto che resti bilanciato l'istumento in maniera, che aggiunto o levato inferiormente un altro peso non si cagioni alcun moto nell'istumento, nè si faccia punto variare la linea del traguardo, nel qual caso è manifesto che il centro di gravità dev'essere nella linea che congiugne i due punti di sospensione del peso, e di tutto l'istumento: si trova poi l'orizzontale alzando, o abbassando il filo posto nel foco dell'obiettivo infino a tanto che rovesciando l'istumento, e sospingendolo da due punti egualmente lontani dall'asse si abbia lo stesso punto di traguardo, nel qual altro caso la linea tirata per l'apertura dell'oculare, e per l'intersecazione dei fili, deve tagliare ad angoli retti la verticale, cioè dev'essere orizzontale. Il de la Hire, servendosi anch'esso del cannocchiale, faceva galleggiare sull'acqua le diottré, ed avendo rinforzata la vista, si valeva della superficie del fluido unicamente per rendere la visuale parallela all'orizzonte. Il livello a bolla d'aria, che per la difficoltà di distinguere

il margine della bolla, e per non essere così libero il moto tra l'acqua, l'aria, e il vetro, si riserbava solamente per gli usi di minore precisione, è stato perfezionato dal Dollond, e da altri artefici con sostituire l'aria rarefatta alla comune, e con segnare precisamente i due termini, tra i quali deve restare la bolla.

Il livello Picardiano ha ricevuto gradatamente diversi gradi di perfezione. Quello, che ho fatto venire a Milano, avea servito per le livellazioni dell'ultima visita generale del Bolognese, ed era stato lavorato sul modello di un' altro livello portato dalla Toscana. Il cannocchiale è di due piedi di Parigi, ed è finissimo il meccanismo delle due viti, con cui quando l'istrumento prossimamente sia messo a luogo vi si danno i due piccoli movimenti, l'uno da diritta a sinistra acciò il filo risponda al punto segnato nella lastra, l'altro in un piano perpendicolare alla lastra, acciò il filo nè la tocchi, e così il moto non riesca più libero, nè il filo cada troppo lontano, e così dia luogo a qualche errore di parallasse. Io mi sono qualche volta servito e di questo livello, e del livello Dollondiano. In più di sette miglia di livellazione, che ho fatto sul Padovano, mi sono servito di un livello binocolo, ch'era una specie di doppio livello Ugeniano. La fig. 140. rappresenta il livello Ugeniano di cui mi sono servito in più di trenta miglia di livellazioni fatte sul Milanese. Il tubo di ottone *AB*, lungo 16 pollici di Parigi, passa per un anello *GK*, che ha due ale piane *E*, *H*, pure di ottone, e queste rinchiudono nelle due parti estreme due sottili nastri di seta, che passano per i due anelletti *F*, *S*, dai quali si può egualmente sospendere l'istrumento. *I* è l'anello, colla varia trasposizione del quale si ottiene che il centro di gravità sia nella linea istessa dei due punti di sospensione, e che il peso *P* aggiunto, o levato inferiormente non vi cagioni alcun moto. Ma in quest'istrumento non si riguarda già per un filo orizzontale, come nella prima costruzione del livello Ugeniano. Dai due lembi del tubo sortono in vece due sottili punte di ottone *m*, *n*, come nella fig. 141., che non giugnendo a toccarsi nel mezzo fanno le veci di un filo spezzato, che lascia certamente distinguere i punti traguadati senza coprirli, come farebbe il filo in tutta la sua grossezza. Nel livello Picardiano, e negli altri,

in

in cui si riguarda dal filo orizzontale tagliaro ad angoli retti da un altro filo verticale, si assicura meglio il traguardo disegnando la biffa con un cerchio nero, del diametro di circa un pollice, contorniato da altri anelli di eguale larghezza alternativamente bianchi, e neri: mentre così si conosce più distintamente quando il cerchio, e gli anelli s'iano tagliati in quattro parti eguali da due fili anche di seta, che alla distanza di 1000 braccia coprano la grossezza di circa un pollice. Il circolo, e gli anelli si segnano sopra una tavoletta piana, che si possa alzare, abbassare, e fissare con delle molle ad un' asta di legno, divisa in braccia once e punti, e alzata verticalmente sopra una base croscheggiata. Traguardando colle punte staccate, mi sono servito del lembo di una carra bianca e rettangola, attaccata ad una lastra di latta, che si poteva muovere, e fissare al lungo di un' asta verticale, istessamente divisa in once e punti: e per una maggior precisione ho avuto ancora l'avvertenza di riguardare sempre per la punta medesima, e coll'istrumento sempre sospeso da un dato punto dell'anello.

Il mio metodo ordinario di livellare è stato sempre di collocare il livello di mezzo ai due punti da riguardarsi a dritta e sinistra, o come dicessi di livellare a battute eguali. Con questo metodo non fa bisogno nè di alcuna correzione per la sfericità della Terra, nè di alcuna rettificazione dei livelli a cannocchiale. S' intenda nella fig. 142 che l'asse del cannocchiale BA resti sospeso dal punto F , formando un angolo qualunque ACO colla linea Oa parallela all'orizzontale Kk , e presc le distanze eguali CO , Co si supponga che prima dal punto B si riguardi in M , e che poi facendo girare l'istrumento intorno ad FC si riguardi dall'altra parte il punto m . Saranno manifestamente eguali le altezze MO , mo , e solamente prendendo CX maggiore, o minore di Co si avrà TX maggiore, o minore di mo , e i punti riguardati T , m non saranno di livello se non nel caso che l'asse del cannocchiale AB sia precisamente orizzontale. Questa considerazione, e la semplice ispezione della figura suggerisce un metodo facile di rettificare qualunque livello, e di ridurre l'asse e la linea del traguardo ad essere parallela all'orizzonte. Mentre notati i punti del traguardo a distanze uguali, e trasportato
indi

indi il livello a distanze disuguali dai due termini estremi, se non si troverà di trguardare per una linea parallela alla prima, e se non si noteranno due altri punti o egualmente più alti, o egualmente più bassi dei primi due, bisognerà correggere e inclinare il cannocchiale o da una parte o dall'altra insino a tanto che si arrivi ad ottenere un esatto parallelismo. Nelle livellazioni delle pianure ho sempre diviso per metà la distanza de' luoghi estremi, che doveva paragonare insieme tra loro: e nei luoghi montuosi una volta sola, per evitare l'imbarazzo di salire, e di scendere con moltiplicate operazioni, ho fatto al lungo dell'Adda due battute disuguali, trguardando alla distanza di 493 braccia da una parte, e 647 dall'altra. E siccome nel livello, di cui mi serviva, aveva bensì fissato l'anello *I* in maniera tale che il peso aggiunto o levato inferiormente non vi faceva variazione alcuna, ma le due punte non si erano potute fissare in modo, che rovesciando l'istrumento non vi si avesse nel traguardo una piccolissima variazione; senza impegnarmi nelle ultime rettificazioni di rendere esattamente parallelo all'orizzonte l'asse del cannocchiale, nel caso accennato delle battute disuguali ho avuto l'avvertenza di replicare l'operazione coll'istrumento sospeso prima da un anello, e poi dall'altro anello opposto, e di prendere la semisomma delle due altezze osservate tanto da una parte quanto dall'altra.

Il livello Picardiano ha sopra gli altri il vantaggio che essendo fermamente connesso in tutte le sue parti si può con una vite serrare sopra una tavola, o sopra un treppiede in maniera tale, che tutto il livello regga alle scosse del vento, e che il filo riparato anche inferiormente da una lastra di vetro si riduca presto alla quiete. Ma la riduzione del filo a un punto dato ricerca sempre del tempo, ed il maneggio di tutto il livello non è così facile. Il livello Ugeniano che sta pendente da un anelletto, e da un nastro, si chiude in una cassetta di latta, che non lo tocchi in nessuna parte, e che resti aperta solamente dalla parte dell'oggettivo, e dell'oculare. Con questa precauzione, ancora nei venti più impetuosi del nostro Paese, ho avuto sempre degl'intervalli sensibili di tempo, in cui o l'istrumento non aveva alcun moto sensibile, o le oscillazioni delle punte
era-

erano piccolissime, e in questo secondo caso fissando la linea del traguardo dove le oscillazioni delle punte comparivano eguali e al di sopra e al di sotto, ho avuto dei risultati interamente conformi a quanto ho ritrovato in seguito cessando il vento. Il caso più sfavorevole mi è accaduto nella valle dell'Adda, dove una volta ho dovuto aspettare circa tre quarti d'ora, perchè fossi contento della posizione dell'istrumento. Mi è costato sempre più tempo il maneggio del livello Dollondiano. Le oscillazioni, che succedono nella bolla d'aria rarefatta per qualunque piccolo movimento dell'istrumento, non finiscono così presto: bisogna replicar molte volte i piccoli movimenti perchè due termini estremi della bolla corrispondano ai due punti segnati: e siccome per il caldo, e per il freddo si cambia il volume della bolla, e ordinariamente o resta tutta rinchiusa nella linea segnata nel tubo, o la rinchiede; così è più difficile di conoscere quando dalle due parti ne resti lontana egualmente, e per ogni piccolo errore, che si commetta nell'angolo della visuale, l'errore dei seni, e delle altezze traggiate non è più così piccolo. Seguendo l'idea, che ha suggerito il de la Hire, di servirsi dell'acqua per ridurre la visuale, e l'asse del cannocchiale ad una situazione orizzontale, e rettificando in qualunque modo il livello, vi si avrebbe l'azione dell'aria, come nel livello Ugeniano, e di più vi si dovrebbero riflettere le ondulazioni cagionate da qualunque vento nell'acqua: vi vorrebbe più cautela e più tempo per lasciare che il cannocchiale si riducesse sensibilmente allo stato della quiete, se si adoprassero un cannocchiale della lunghezza di quelli, che si addattano ai livelli Picardiani, e Ugeniani: e nei cannocchiali più piccoli non si avrebbe più l'esattezza e la precisione ch'è necessaria. Così adunque avendo considerato tutto, io riserverei il livello Picardiano per le operazioni più minute, e delicate. La facilità del maneggio, e del trasporto dell'istrumento, la semplicità di tutta l'operazione, la piccolezza dei divarj trovati tutte le volte, che ho voluto ripeterla, mi ha fatto preferire nelle più lunghe livellazioni il livello Ugeniano a tutti gli altri.

Non ho mai ritrovato se non dei divarj di nessuna conseguenza livellando col suddetto istrumento, e con tutte le cautele accennate,

c

e ripetendo varie volte l'operazione a diversi intervalli, maggiori e minori, uguali e disuguali. In tre intere miglia, nelle quali ho ripetuto due volte la livellazione, tutto il divario è stato circa di un' oncia e mezzo. Nel tratto di braccia 970, dove la pendenza totale del terreno risultava di br. 4. 10. $1\frac{1}{2}$, essendosi fatta la livellazione con una sola stazione, e poi con due, prima a distanze uguali, e poi disuguali, il divario non è mai arrivato a due punti: e in quel tratto essendosi ritrovata la maniera di fare la livellazione anche ad acqua stagnante, si è avuto dentro due punti il medesimo risultato. In altri tratti di 1000 braccia essendosi fatta, e replicata la livellazione col livello Ugeniano descritto sopra, la differenza è stata qualche volta di un punto solo del nostro braccio, qualche volta di un mezzo punto, e qualche volta non si è trovata alcuna sensibile differenza. Col cannocchiale binocolo, di cui pure ho parlato sopra, e che avendo un centro di sospensione poteva riguardarsi come una specie di livello Ugeniano, livellando al lungo del Canale di Padova, tra i due luoghi di Ponte Molino, e della Chiavica dell' Olmo, ho ritrovato la caduta del pelo basso, col cannocchiale che rendeva più distinti gli oggetti, di piedi Veneti 2. 7. 2: e col secondo cannocchiale che non lasciava distinguere così bene il margine della biffa, l' ho ritrovata di piedi 2. 6. 6: e così in quindici stazioni assai lunghe, che si erano prese in ambedue le livellazioni, la differenza era di soli otto punti, e questa ancora dovevasi principalmente attribuire alla diversa perfezione dei cannocchiali. Quest' era il grado di precisione, a cui sono arrivato. Ciò che ho già scritto nell'appendice al capo primo dell' Algebra non mi lascia aggiugnere più altro intorno alla soluzione di un problema analogo al presente argomento, in cui si cerca qual sia la somma degli errori, che si possono probabilmente commettere in un dato numero di battute uguali e successive di livello, supposto che in ogni battuta, nel riferire il centro della biffa all' orizzontale tirata per il centro dell' oculare, e per l' incrociatura dei fili, l' errore sia sempre lo stesso nella sua quantità, ma possa essere indifferentemente di eccesso o di difetto. Io ho cercato di far sentire in quel luogo quanto poco siano applicabili al caso fisico le ipotesi dei calcoli astratti delle probabilità: ed ho rilevato

Meccanica.

Ccc

gc-

generalmente per tutti i casi analoghi, che se l'errore può arrivare fino alla quantità $\pm m$, non è mai necessario che vi arrivi, e può essere ancora una parte di m comunque piccola, anzi può qualche volta non esservi: così non è che puramente astratto il caso del problema, e livellando con qualunque strumento non si avrà mai il vero caso, che in una sola battuta, e in tutte le altre l'errore debba essere $\pm m$.

Supposto che nella prima battuta sia a l'altezza traguadata alla diritta, e b l'altezza traguadata alla sinistra, e che la differenza sia $a - b$: supposto che la seconda battuta si legghi collo stesso termine della prima, e sia l'altezza alla diritta c , alla sinistra d , e così la seconda differenza sia $c - d$; farà manifestamente la differenza delle altezze del primo, e del terzo luogo $a + c - b - d$. Così adunque moltiplicando in qualunque modo le battute, si avrà la differenza del livello ne' luoghi estremi, che devono paragonarsi tra loro, prendendo la somma di tutte le altezze traguadate alla diritta, e la somma delle altezze traguadate alla sinistra, e poi prendendo la differenza delle due somme. Questa regola è bastantemente conosciuta da tutti i nostri Periti. Ma non è ancora ben conosciuto il metodo di mettere tutta la livellazione in profilo: nè ciò si ottiene bastantemente disegnando in misura le battute successive, ed esprimendo i risultati numerici di ciascuna di esse con altrettante linee rapportate ad una scala determinata. Bisogna collegare insieme tutte le misure, riferirle ad una orizzontale che sia la più comoda nel caso di cui si tratta, segnarvi con altrettante perpendicolari le altezze, e le profondità dei punti più importanti, cioè il fondo dei cavi, le foglie delle bocche, i sottrarchi dei ponti ec.: e così bisogna disegnare in piccolo ciò che la natura ci rappresenta più in grande. Mentre avendo così sott'occhio l'andamento, e la situazione de' differenti piani del terreno, in qualunque caso, o di regolare gli alvei vecchj dei Fiumi, o di formarne dei nuovi, o per la navigazione, o per l'irrigazione delle campagne, si potranno concertare, e segnare le cadute dei nuovi fondi, calcolare la quantità dell'escavazione, ripartirvi i sostegni, le chiuse, le bocche ec. Nel Profilo che Eustachio Manfredi ci ha dato del Tevere, negli altri Profili, che

che si sono fatti nell' ultima visita del Bolognese , in quello che io ho presentato in Venezia per la nuova inalveazione della Brenta , tutte le perpendicolari erano riportate all' ultimo termine della livellazione , ch' era il pelo basso del Mare . Nel Profilo , con cui ho disegnato la livellazione da me fatta da Milano a Pavia le perpendicolari erano riportate al termine superiore , ch' era il fondo del Naviglio di Milano , da cui proponevasi di continuare la navigazione fino nel Tesino a Pavia . Dirò qualch' altra cosa a suo luogo e di questo progetto , e della livellazione .

CAPO SECONDO.

DELLE NUOVE INALVEAZIONI DEI FIUMI.

Tacito nel primo libro dei suoi Annali riferisce , che essendosi proposta nel Senato Romano la diversione degl' influenti principali dal Tevere , benchè l' urgenza di rimediare alle troppo frequenti inondazioni della Città capitale del Mondo potesse rendere più plausibile quel progetto ; ciò non ostante , sentiti i ricorsi delle Provincie interessate , prevalse a tutti il parere di Pione , che disapprovò qualunque innovazione , dicendo : *optime rebus mortalium consuluisse naturam , quæ ut sua ora fluminibus , suos cursus atque originem , ita fines dederit* . Il Gaglielmini , ed il Grandi citarono questo passo di Tacito : il primo progettando di regolare il corso del Reno , e delle altre acque del Bolognese nella parte inferiore della campagna , piuttosto che di deviarle per altre linee superiori , e farne una nuova inalveazione al piede delle montagne : il secondo disapprovando una nuova terminazione proposta nell' Era , e preferendo il progetto di rassettare , e fortificare l' alveo vecchio di quel torrente al progetto di un alveo nuovo . Anche il Viviani nella terminazione , che fece della Sieve , seguì quanto potè i confini del letto antico delle acque : e così pure nella terminazione del Bisenzio non giudicò di portarvi alcun altro cambiamento di letto , che d' una semplice rettificazione in un luogo , dove prima formavasi un seno lungo e tortuoso .

Potrei addurre molti altri esempi di celebri Matematici; che riguardarono come una massima fondamentale quella di rassettare gli alvei vecchj dei Fiumi, raddrizzarli, rinfiancarli, e regolarli, prima d'immaginarne dei nuovi, e riferbarono le nuove inalveazioni solamente per qualche caso straordinario ed estremo. Ma qui non fa bisogno di alcuna autorità. Le nuove inalveazioni dei Fiumi, oltre alle più gravi spese, portano ancora delle variazioni sostanziali in tutto il sistema delle campagne. Il trasferire gl' inconvenienti ordinarj delle acque da un luogo, che prima ne aveva la servitù, ad un altro, che n'era immune, porta seco come una specie di poca equità, che non può essere giustificata se non nel caso che il pubblico interesse assolutamente lo esiga. E poi dappertutto, dove vi sono Fiumi, vi sono sempre danni, e disordini. Negli alvei vecchj dei Fiumi una lunga esperienza dà luogo di prevedere gl' inconvenienti, che ordinariamente possono occorrere, si accostuma molte volte a soffrirli, e suggerisce sempre qualche maniera di ripararli. Negli alvei nuovi non si prevedono mai bastantemente gli accidenti di più grande importanza: anche le minori disgrazie danno adito ai maggiori clamori: e non conviene mai di mutare il sistema dei pubblici regolamenti se non vi è qualche sicurezza di migliorarlo notabilmente. Adunque ogni prudenza vuole che prima di accingersi ad una nuova inalveazione di qualche Fiume si tentino tutt' i ripieghi di regolare, e accomodar l' alveo vecchio, e che l' impresa di un alveo nuovo si riservi per qualche caso straordinario ed estremo.

Quando si creda arrivato appunto un tal caso, bisogna incominciare da una generale livellazione di tutta la campagna dal luogo dove ha da farsi la deviazione delle acque fino al luogo dove devono esse condursi: bisogna esaminare la diversa qualità dei terreni, per cui hanno a passare: bisogna avere sott' occhio e la pianta e il profilo di tutt' i piani. E nel progresso della livellazione non basta già di rilevare le differenze delle altezze dei punti estremi. Bisogna in oltre osservare con quale proporzione, e di quanto si diminuisca il declive della campagna in tutto il tratto intermedio. E in ciò possono occorrere due differenti, e opposti casi, che i terreni infe-

rio-

riori abbiano una declività o minore, o maggiore di quella che converrebbe al corpo delle acque unite. Nel primo caso converrebbe portare il nuovo alveo sotto il piano della campagna con una proporzionata escavazione: la campagna istessa vi potrebbe mandare più facilmente e più copiosamente i suoi scoli: ma se vi fossero degl' influenti più elevati di fondo bisognerebbe assicurarne lo sbocco con una chiusa. Nel secondo caso bisognerebbe sostenere il nuovo Fiume cogli argini al di sopra del piano della campagna: converrebbe farvi passare al di sotto con una botte sotterranea gli scoli, che non vi avessero caduta bastante: e gl' influenti torbidi, che vi restassero inferiori di piano, porterebbero un impegno maggiore per avere uno scarico libero e continuato. E in un caso, e nell' altro il profilo dei piani della campagna, e la delineazione delle cadenti, e di tutte le gradazioni, che potrebbero convenire al nuovo alveo, indicherebbero bastantemente e la profondità dell' escavazione da farsi, e l' altezza delle chiuse, e degli argini, e le provvidenze da prendersi per tutti gl' influenti piccoli, e grossi.

Ma intorno alla delineazione precisa delle cadenti bisognerebbe nuovamente distinguere due altri casi: o che si trattasse di deviare di corso un solo Fiume: o che convenisse di rivolgervi dentro dei nuovi influenti. Nel primo caso la considerazione dell' alveo vecchio suggerirebbe tutte le dimensioni del nuovo: e quando se ne venisse ad abbreviare la linea, e ad accrescerne la caduta, indipendentemente dalle difficoltà dell' esecuzione, se ne potrebbe pronosticare con maggior sicurezza un buon esito. Nel secondo caso se gl' influenti non avessero da portare delle materie più grosse, nè in una copia maggiore di quelle del recipiente, la semplice delineazione delle cadenti di tutto il fondo del nuovo alveo non farebbe la parte più incerta, e più difficile di tutta l' opera. Mentre secondo ciò che si è detto nel Cap. VII. del libro antecedente basterebbe calcolare i corpi d' acqua da unirsi insieme, osservare quale pendenza potesse convenire a quel corpo, che si avrebbe da riguardare come il primo recipiente, e diminuire i seni delle pendenze successive del fondo in ragione delle quantità d' acqua accresciute. Il Guglielmini nel Cap. XIV. trattando appunto delle nuove inalveazioni dei

Fiumi.

Fiumi disse, che ancora mancava il metodo di delineare le cadenti del fondo dei Fiumi in ogni possibile circostanza, e che nessuno non aveva neppure tentato questo difficile problema. Ed io pure sono ben lontano dal riguardare come generalmente sciolto il problema per ogni circostanza possibile. Ciò non ostante nella circostanza particolare, che gl'influenti non portino delle materie più grosse di quelle del recipiente, e che colla forza accresciuta del corpo d'acqua si debba in qualche maniera diminuire gradatamente la pendenza del fondo; credo che gli esempj precisi del Reno, e della Samoggia, della Samoggia, e del Lavino somministrino un fondamento bastante per regolare tutta la diminuzione prossimamente nella ragione indicata.

Il Guglielmini nel capo sopracitato incominciando dal caso che i Fiumi da unirsi insieme in un solo letto vi dovessero tutti portare delle materie omogenee, come per esempio le arene, riguardò come sicuro l'esito della nuova inalveazione, quando potesse avervi nel recipiente caduta, e forza bastante per non lasciarvi delle deposizioni, e quando la situazione della campagna fosse concorsa a mantenerlo incassato. Riguardò ancora come più semplice, e più facile il caso che i Fiumi superiori portassero materie più pesanti degl'inferiori, come per esempio se il Fiume principale portasse ghiaja grossa, il primo influente più piccola, e più piccola ancora il secondo, e così successivamente sino agli ultimi influenti, che portassero arena, o terra. E finalmente considerò come ardua e dubbiosa per ogni parte l'impresa d'inalveare degl'influenti, che dovessero portare materie più pesanti di quelle del Fiume principale al luogo dell'interfezione. Disse che ciò non potrebbe praticare accertatamente se non nel caso, che vi fosse stata caduta esorbitante, e considerabile altezza del piano della campagna. Aggiunse ancora che manca una regola certa per fare delle operazioni di questo genere, e che il solo metodo, che potrebbe dar qualche lume in un'impresa così ardua, farebbe quello di considerare l'inalveazione come se si avesse da incominciare dall'ultimo influente venendo all'insù, e vedere cosa dovrebbe riuscire, e poi passare alla considerazione del secondo, del terzo, e di tutti gli altri successivamente, e quando vi sia spe-

ran-

ranza di buona riuscita, eseguire effettivamente l'inalveazione dell'ultimo, e quando poi il successo corrisponda a ciò, ch'era si figurato, passare all'inalveazione del secondo.

Ma ancora nel caso, che gl'influenti inferiori potassero nel recipiente delle materie più sottili, se gl'influenti fossero tanti di numero, e il recipiente di tanta lunghezza, come nel caso proposto, e tanto dibattuto a Bologna, si presenterebbe un'altra difficoltà di esecuzione. Mentre se si volesse preparare il nuovo alveo scavandolo, o arginandolo per tanti tronchi differenti da un influente all'altro, non vedo in che maniera si potessero scolare le acque e sorgenti e piovane, o come si potessero estrarre con qualche macchina nel caso di un lungo tratto e di una profonda escavazione. E poi quando fosse preparato il nuovo alveo, e si trattasse di rivolgervi dentro tutte le acque, tagliando tutte le intestature degl'influenti, non saprei prevedere bastantemente tutti gl'inconvenienti, che potessero nascere in una volta. Ed ogni errore, che si fosse commesso nelle dimensioni del nuovo alveo, farebbe senza rimedio per non potersi deviare di nuovo gl'influenti, e divertire negli alvei vecchj, per meglio sistemare i lavori. Che se poi si volesse incominciare l'inalveazione dagli ultimi influenti procedendo gradatamente all'insù; egli è certo che disponendo il nuovo fondo colla cadente, che potrebbe convenire al corpo delle acque unite, e dovendovi scorrere gl'influenti medesimi insino a tanto, che si arrivasse ad unirvi insieme tutti gli altri, vi si farebbero delle continue deposizioni: e quando tutt' i lavori della nuova inalveazione ricercassero un tempo più lungo, potrebbe anche darsi il caso che si trovasse interrato l'alveo prima di arrivare a rivolgervi il Fiume principale. In somma per qualunque parte io riguardi l'esecuzione di un' opera di questo genere, non so trovarvi che delle gravi e moltiplicate difficoltà.

Le difficoltà riuscirebbero sempre maggiori nel caso, che gl'influenti portassero materie grosse, e tanto più se le portassero ancora più grosse di quelle del recipiente: e credo che in questo caso l'abbondanza della caduta non gioverebbe per diminuirne gl'inconvenienti. Per meglio intenderne la ragione bisogna qui incominciare da alcune considerazioni più generali, e dalle diverse conseguenze

ze

guenze , che nascono dalla diversa maniera , con cui nel Cap. V. del libro antecedente abbiamo rappresentato la continua degradazione dei sassi , e delle ghiaje , e delle altre materie dei Fiumi . Se i sassi urtandosi , e sfregandosi dentro l' alveo dei Fiumi si andassero logorando continuamente , se le ghiaje si sritolassero , e si risolvessero in semplice arena , se questo fosse lavoro da potersi compire dentro lo spazio , che vien compreso tra il principio del Fiume , e tra l' ultimo limite della ghiaja , come supponeva il Guglielmini , accrescendo in qualunque modo la velocità , e la forza delle acque , o con riunirle insieme , ed accrescerne l' altezza , o con abbreviarvi la strada , ed accrescerne la pendenza , si potrebbe almeno sperare , che una maggiore quantità di ghiaje si disciogliesse , e venisse poi trasportata colle altre arene infino al Mare . Per lo contrario se collo sfregamento , e coll' urto non può ottenersi una diminuzione sensibile di mole , se non possono sritolarsi le ghiaje , e disfarsi in arene , se i sassi restano sempre sassi , come si è già provato ampiamente nel Cap. V. del Libro antecedente , accrescendo la caduta il corpo e l' impeto delle acque , non si otterrà altro effetto , che di spingere più lontano le ghiaje . Ma resteranno sempre sul fondo le stesse ghiaje , e lo rialzeranno subito nelle parti inferiori , e col progresso del tempo lo dovranno pure rialzare superiormente , come si è di già detto nel Cap. VI. Mentre continuando a discendere le acque cariche di nuova materia , sopra il piano inferiore già rialzato colle deposizioni delle ghiaje , saranno ivi obbligate di raffrenare l' impeto già concepito per la caduta antecedente , e non potendo spingere più lontano il peso , che seco portano , lo lascieranno cadere a fondo : con che attaccandosi la nuova arena , e la nuova ghiaja all' altra già condotta , e spianata in detto sito , vieppiù lo rialzerà , e le nuove deposizioni , accumulate inferiormente , serviranno di appoggio alle successive , che resteranno nel tronco superiore .

Mi sono appoggiato su questi dati nel rilevare , e sostenere una difficoltà decisiva contro un progetto , immaginato già verso il fine del secolo passato , e riproposto con alcune modificazioni nel 1760 , di rivolgere il Reno , e tutti gli altri torrenti del Bolognese in un nuovo alveo , che incominciassero sopra la confluenza del Lavino , e della

della Samoggia, e passando poco sotto a Bologna andasse direttamente ad unirsi coll' ultimo tronco del Primaro, e di là a sboccare nell' Adriatico. Ho detto che il nuovo alveo taglierebbe tutt' i torrenti dove ancora corrono in ghiaja piccola, e grossa: che supponendo la pendenza necessaria le ghiaje del Lavino arriverebbero sino alla Samoggia, e quelle della Samoggia entrerebbero in Reno, e le altre dei torrenti inferiori, ajutate dall' impeto di tutte le acque, verrebbero spinte più avanti: che dalla maggiore caduta del nuovo alveo non si potrebbe giammai sperare una diminuzione sensibile della grossezza, e quantità delle ghiaje medesime: e che però si farebbe così avuto un continuato rialzamento di fondo, un maggiore pericolo di rotte, ed una maggiore difficoltà degli scoli della campagna. A ciò ho aggiunto il sentimento del Guglielmini, e del Manfredi, che trattandosi d' una nuova inalveazione per circa quaranta miglia, quantunque vi fossero concorse tutte le circostanze più favorevoli dei piani della campagna, ciò non ostante l' accingersi a tale impresa sarebbe stato un operare alla cieca per più capi, e principalmente perchè tutta la Storia Idraulica non ci somministra un esempio, da cui si possa cavar qualche lume. E certamente la diversione fatta da Quinto Curio Ostiglio del Mincio dalla Fossa Filistina in Pò, e le diversioni del Ronco, del Montone, del Sile, e degli altri influenti della Laguna di Venezia, ed altre opere simili, quantunque grandi, e dispendiose, non farebbero da paragonarsi colla progettata diversione di tutt' i fiumi, e torrenti del Bolognese.

Queste generali ragioni, e le altre difficoltà particolari, che adesso farebbe inutile di ripetere, e che allora aveva ricavato dalla situazione degli sbocchi di ciascun influente, dall' altezza delle chiuse, e degli argini, dal numero, e dalla profondità delle borti sotterranee, dall' escavazione, e dalle altre circostanze del nuovo alveo, ne hanno fatto abbandonare l' idea, ed hanno dato luogo a sostituirevi un altro progetto d' incominciare la diversione della Samoggia sotto alla confluenza del Lavino, e quella del Reno più di sette miglia sotto a Bologna, e di portare proporzionalmente più basso la diversione delle altre acque. Ma ancora quest' altra linea di deviazione non restava al di sotto dell' ultimo limite delle ghiaje.

Meccanica.

D d d

L'Idi-

L'Idice, la Centonara, e la Quaderna avrebbero portato nel nuovo alveo e ghiaie, e arene più grosse di quelle, che vi poteifero arrivare superiormente dal Reno. Le difficoltà di esecuzione erano poco differenti in questa seconda linea che nella prima. Il Sig. Giacomo Mariscotti Soprintendente delle acque di Bologna in varie sue dottissime scritture ha fatto ottimamente sentire questi, ed altri consimili inconvenienti: e finalmente s'è abbandonato il progetto di qualunque linea superiore. Ma giacchè s'è incominciato a discorrere delle controversie di Bologna, la celebrità e l'importanza del caso, che ha tanto occupato i Matematici Italiani, ed in cui pure ho avuto io qualche parte, esige che a tutte le altre precedenti teorie si aggiunga ancora una succinta esposizione di tutto il resto, che merita maggiormente di essere tramandato alla notizia degli esteri.

CAPO TERZO.

DELLE CONTROVERSIE DEL RENO, E DEGLI ALTRI FIUMI, E TORRENTI DEL BOLOGNESE.

IL Pò anticamente correva unito in un ramo solo a Ferrara. Prima di arrivarvi riceveva tutte le acque del Panaro, e del Reno: e poche miglia più in là si divideva in due rami, chiamati il destro di Primaro, e il sinistro di Volana, che con poca differenza corrispondono ai due rami chiamati da Polibio, e da Plinio col nome di Padusa, e di Olana. Il poco declive del piano della campagna, la mancanza degli argini, dei quali non si ha memoria nei tempi antichi, i bassi fondi dei quali si vede ancora un resto nelle valli di Comacchio, lasciavano che il Pò inondasse vastamente la spiaggia dell' Adriatico, dal porto di Ravenna, che allora trovavasi sul Mare istesso, sino allo sbocco del Fiume Tartaro. I luoghi delle maggiori profondità formavano le sette bocche, e i sette rami, dei quali hanno parlato Plinio, e Strabone. Sulle testimonianze degli antichi Storici, e Geografi si è delineata la carta del corso antico del Pò, che può vederfi nel secondo tomo degli Atti dell' Accademia di Torino. La figura 143. qui annessa può dare in

in piccolo un' idea del corso del Primaro, e del Reno, e degli altri Torrenti del Bolognese, di cui occorrerà di parlare principalmente in questo capitolo.

Una particolare rivalità verso l'anno 1151. indusse gli abitanti delle campagne situate sulla destra del Pò a tagliare l'argine sinistro, poche miglia sopra la confluenza del Panaro, nel luogo di Ficheruolo. Le acque sboccando allora copiosamente dalla rotta in un piano assai più declive, si formarono un nuovo ramo, che chiamossi il Pò di Venezia, o di Lombardia. Il ramo antico di Ferrara continuò a ricevere il Panaro, ed il Reno, e si mantenne profondo quanto bastava per la comodità della navigazione: sino alla metà del secolo decimosesto. Dopo quel tempo il Pò di Venezia rivolse a se il corpo principale delle acque, e il ramo di Ferrara restò altamente interrato in diversi luoghi, e incapace di sostenere dei legni di maggior carico. Gl' interramenti crebbero a segno, che nella piena del 1577. il Panaro, dopo di essere sboccato al Buondeno, invece di continuare come prima il suo corso verso Ferrara, incominciò a rivolgersi con un corso contrario e retrogrado al luogo della Stellata, ed ivi si aggiunse anch' esso a ingrossare il Pò di Venezia.

Furono inutili tutt' i tentativi impiegati dai Duchi di Ferrara, prima per chiudere la rotta di Ficheruolo, e poi per mantenere un maggior corpo d'acqua nel letto vecchio. Gl' interramenti furono principalmente attribuiti alle torbide del Reno: ed essendosi impadronito di Ferrara Clemente Ottavo, sui replicati ricorsi dei Ferraresi, per consiglio di un certo Spemazzati Gesuita Lodigiano, ordinò nel 1604. che il Reno fosse deviato nelle valli della Sanmartina per modo di provvisione, e insino 'a tanto che nel Pò di Ferrara fossero levati tutt' i ridossi, e restituito, come speravasi, il comodo della navigazione. Ma il Pò di Ferrara mancando anche del corpo d'acqua di Reno appunto allora finì d'interrarsi, e l'escavazione di tutto il letto di Ferrara fu riconosciuta tanto operosa, che in poco tempo se ne dovette abbandonare l'impresa. Il Panaro si stabilì la pendenza al contrario dal Buondeno alla Stellata, e nel 1612. fu fatta al Buondeno un' intestatura dell' argine già sinistro del Pò, ed ora destro del Panaro, per impedire alle acque del Pa-

D d d 2

naro,

naro, e del Pò di volgersi verso Ferrara. Questa intestatura tagliavasi poi nel tempo delle maggiori piene del Pò, sulla lusinga che il taglio e il diversivo potesse servire per diminuirne sensibilmente l'altezza. L'inutilità sperimentata del taglio lo fece poi tralasciare fino dal 1638., e somministrò una delle prime prove dell' inutilità dei diversivi delle piene, come replicheremo a suo luogo. Così restarono deviate per sempre le acque del Panaro, e del Pò dagli alvei vecchj di Volana, e di Primaro, e si prese il partito di accomodare il ramo di Volana ai bisogni di una piccola navigazione colle acque del piccolo canale di Cento.

Intanto le valli della Sanmartina furono prestamente bonificate dalle molte deposizioni del Reno, e rialzate ad un segno tale, che il Reno non potendo scorrervi più sopra colle sue acque, sboccò superiormente dagli argini, e si rivolse prima nelle valli di Marara, e poi in quelle del Poggio Lambertini, inondando così le più belle campagne del Bolognese, dal cui recinto non potevano uscire le acque che in parte, lentamente rivolgendosi al Mare per l'antico, e tortuoso letto del Primaro. Le ultime tre rotte seguite nel Reno, dove correva ancora inalveato e arginato, sono quelle del 1731., 1738., 1751., e con esse si sono sempre più estese le acque nelle parti superiori della campagna verso Bologna. E così andando il Fiume a sboccare in luoghi successivamente più rilevati, vi si è rialzato ancora tutto il fondo sopra le rotte, fino a restare nell' ultimo tronco ancor più alto del piano della campagna, e ad avere perciò bisogno di argini altissimi. L'interramento degli altri fondi inferiori ha portato in conseguenza la perdita degli scoli di moltissime campagne, che sono però restate incolte, e impaludate. Si sono a ciò aggiunte le inondazioni degli altri cinque torrenti inferiori, la Savena, l'Idice, la Centonara, la Quaderna, ed il Sillaro, lasciati ampiamente vagare senz' alveo, e senza sponde. Uno spettacolo così grande e compassionevole interessò vivamente i più illustri Matematici dell' Italia, e nel cercarne il rimedio diede occasione ai principali progressi, che ha fatto l'Architettura Idraulica.

Castelli, Castini, Viviani, Guglielmini, Grandi, Manfredi, e molti altri proposero che si togliesse la causa principale di questi dan-

dan-

danni con restituire il Reno in Pò grande, e seppero soddisfare superiormente a tutte la difficoltà fisiche ed idrometriche, che si opponevano ad un tale progetto. Le difficoltà politiche obbligarono finalmente a deporne il pensiero. Escluso il partito di continuare l'alveo del Reno sino a raggiungere il Pò, tutti gli altri progetti sostanzialmente si riducevano a due: o d'inalveare le acque tra le proprie alluvioni nella parte inferiore della campagna, dove seguivano a spandersi, e di adattarne allo scarico il tronco inferiore del Primaro: o di deviare il Reno superiormente alle valli ed alle rotte, come si è indicato nel fine del capitolo precedente. Il Guglielmini accreditò il primo progetto, e cominciò a combattere il secondo. Eustachio Manfredi seguì le medesime idee. Monsig. Galiani, e il Sig. Gabriello Manfredi proposero un cavo di otto miglia, che alle valli di Reno desse un esito più felice in Primaro, e colle acque di Reno raccogliesse anche quelle della Savena, e dell' Idice. Il Cavo fu incominciato al principio del Pontificato di Benedetto XIV., e non era ancora finito quando vi fu introdotto l' Idice nell' anno 1749. La principale disgrazia a mio credere è stata che in poco tempo è rovinata la chiusa, da cui l' Idice si faceva sboccare nel Cavo, e si è abbassato per molte miglia il fondo dell' Idice, e colle materie staccate dal fondo istesso venne a interrarsi notabilmente il Cavo Benedettino, ed il Primaro. Vi fu ancora un' altra disgrazia che il nuovo Cavo era condotto attraverso alla valle di Gandazolo, il cui fondo sradicio e vacillante non reggendo al peso degli argini cagionò le vastissime rotte, che finirono di sconcertare tutta l' opera. La prima disgrazia influì moltissimo sulla seconda: mentre le deposizioni dell' Idice, altamente ammucchiate intorno allo sbocco, tagliando alle acque del Reno lo scarico libero nel Primaro, e facendole ringorgare sino alla valle di Gandazolo vi recero i danni più grandi, e più difficile il rimedio.

Le controversie inforte fra i Matematici di Bologna, e di Ferrara intorno alle generali providenze da darsi divennero ancora più servide in Roma, dove io mi ritrovava nell' Estate del 1760. Insistevano i primi perchè si accomodasse il Cavo Benedettino cingendo all' intorno la valle con nuovi argini, scavando gl' interrimenti dell'

Idi-

Idice, e rivolgendosi tutte le acque in Primaro, continuando anche ivi gli argini dov'erano interrotti sulla dritta, e rialzandoli, e rinfiancandoli sulla sinistra. I secondi riproponevano con alcune modificazioni il progetto di una nuova inalveazione del Reno, e degli altri torrenti inferiori: e contro il primo progetto opponevano che il Primaro, nel tratto di dieci miglia, dallo sbocco del Cavo Benedettino alla Bastia, è molto irregolare e tortuoso, ed ha poca pendenza di fondo, e insistevano che raccogliendovi tutte le acque del Bolognese si farebbe messo in un pericolo sempre maggiore il vicino, e più basso piano del Polesine di S. Giorgio. Allora essendo io entrato per comando supremo nelle medesime controversie, ed avendo sempre trovato delle difficoltà insuperabili in qualunque progetto di una nuova inalveazione dei Fiumi, e Torrenti del Bolognese, credetti che si potesse provvedere abbastanza ai danni, e ai pericoli dei terreni posti al di là del Primaro nel Ferrarese continuando il Cavo Benedettino direttamente alla Bastia, nel tratto di sette miglia, attraverso alla minore sezione della valle di Marmorta, dove il terreno si riconosceva più stabile, e consistente, come si trova indicato nella stessa fig. 143. E così pensando di declinare le principali difficoltà, che opponevasi allora contro il progetto del Primaro, tra tutti i provvedimenti variamente proposti fino a quel tempo per regolare il corso delle acque, i più convenienti ed opportuni fossero quelli: d'inalveare il Reno tra le proprie alluvioni nelle valli superiori, dove sboccava dalle rotte, e di condurlo a poco a poco ad entrare arginato e regolato nel Cavo Benedettino: di accomodare il Cavo, levando le deposizioni dell'Idice, chiudendo le rotte, e rinfiancando gli argini dove se ne trovasse il bisogno: di rimettere nel Cavo Benedettino la Savena, e di far passare con una botte sotto il letto dell'Idice gli scoli delle campagne situate tra l'Idice, e la Savena, che non potevano scolare interamente e continuamente nel Cavo: di unire la Centonara alla Quaderna, e di portare la Quaderna, ed il Sillaro uniti insieme, e arginati a sboccare nel Primaro alla Bastia, come già inferiormente erano condotti in Primaro il Santerno, e il Senio, che fino dai tempi più antichi si erano lasciati spargere nelle valli.

Con

Con tutte queste particolarità fu accettato allora il progetto, ed io nel mese di Agosto del 1760 ne ho portato a piedi di N. S. Papa Clemente XIII. l'approvazione fatta per parte di Bologna dal Sig. Gabriello Manfredi, e per parte di Ferrara dal Sig. Romoaldo Bertaglia. Ma nell' abbozzo stampato allora di quel progetto io mi era espressamente riservato di riconoscere i luoghi, e di specificare le particolarità dei lavori, ed esporre dettagliatamente il progetto in tutte le sue parti. Fu allora ordinata una visita generale, e dai Periti delle Provincie interessate furono fatte le livellazioni, e prese tutte le misure, delle quali mi è occorso già varie volte di parlare nei capitoli antecedenti. Io dopo di aver avuto sotto ai miei occhi, e di avere considerati i risultati di tutte le osservazioni della visita, dopo di avere riconosciuto da me medesimo tutti i luoghi in questione dal Reno infino al Mare, ho esposto più precisamente il mio sentimento in un libro stampato a Lucca nel 1762. Allora le valli superiori di Galliera, e del Poggio Lambertini erano in gran parte bonificate, e quando vi si fosse protratta l'arginatura, tutto il Reno colle sue torbide si sarebbe potuto rivolgere nelle valli inferiori di Malalbergo, e queste similmente si farebbero colmate e bonificate in pochi anni, ed avrebbero resa più facile la continuata inalveazione del Fiume sino al Cavo Benedettino. La valle di Gandazolo mi era parsa bastantemente assodata colle deposizioni dell' Idice, che vi aveva già da molti anni un corso retrogrado, nè vi era difficoltà alcuna di chiudere le rotte, e di rassettare il Cavo per contenervi tutto il corpo delle acque unite. Andando dal Cavo suddetto alla Bastia, e piegando un poco sulla dritta, dove la valle di Marmotta sino d'allora restava asciutta per qualche tempo, era già stato riconosciuto il terreno abbastanza sicuro, e stabile, e tant'alto da tenervi incassato per alcuni piedi il nuovo alveo. Neppure vi era difficoltà alcuna d'inalveare nel labbro inferiore della stessa valle la Centonara, la Quaderna, ed il Sillaro, e di condurre le acque di questi torrenti regolarmente in Primaro. I principj, che novamente ho spiegato nei Cap. VII., e VIII. del libro antecedente, sino d'allora mi sono parsi bastanti per far vedere che la caduta di 14, o di 13 once per miglio dalle Rotte del Reno sino alla Savena, di

12, o 11 dalla Savena, e dall'Idice fino al Sillaro, e di 10, o 9 fino ad incontrare il livello del mare a Longastrino, e di là di once 7 fino allo sbocco del Santerno, e di 4 fino allo sbocco del Senio, ch'erano le cadute dei piani riconosciute colle livellazioni dell'accennata Visita, erano sufficienti al corso felice di tutto il recipiente, all'ingresso più libero degli influenti, allo scolo delle campagne superiori, ed inferiori di tutto quel Territorio. Mi è parsa questa la maniera più semplice di riparare ai disordini delle acque del Bolognese, e ridurli dentro i limiti degl'inconvenienti, e delle cautele necessarie per gli altri Fiumi. La maggiore sicurezza della Romagna, e delle Valli di Comacchio non mi è parsa che ricercasse altro se non di allargare in alcuni luoghi più ristretti il Primaro, di rinfiancarvi gli argini, di raddolcirvi qualche tortuosità: e finalmente mi è parso che convenisse di restituire il Lamone in Primaro, d'onde era stato inopportunamente divertito.

Non occorre quì di entrare in un più minuto dettaglio delle ragioni, a cui s'è appoggiato allora il progetto, nè delle opposizioni, che vi si sono mosse contro da tante parti, nè delle risposte che successivamente si sono pubblicate. La controversia divenne allora più clamorosa, e chi adesso dasse un'occhiata alle tante scritture che in quell'occasione si sono stampate in Bologna, in Ravenna, in Roma e in altri luoghi, vedrebbe qual è la sorte di tutti quelli che hanno proposto e sostenuto qualche utile progetto in Italia, di essere contraddetti a principio per ogni parte, e di essere appena ricordati quando il progetto è stato riconosciuto generalmente come utile. Vedrebbe ancora che la vivacità naturale degl'Italiani in somiglianti occasioni ha servito pur troppo a dar corpo ad ogni obbietto più piccolo, a mettere tutta l'asprezza nelle questioni letterarie, a molestare e ributar quelli, che maggiormente cercavano di distinguersi nello studio delle verità utili, o astratte. Tutta la Storia letteraria d'Italia è piena di esempj consimili. Dopo la morte del Sig. Gabriello Manfredi, il Sig. Eustachio Zanotti, il Sig. Giacomo Mariscotti, ed io eravamo quasi i soli uomini di lettere che sostenessero il progetto di rimettere il Cavo Benedettino, di regolar tutte le acque nel piano inferiore della campagna, e di condurle arginate nel

vec-

vecchio alveo del Primaro. Il partito più forte sembrava quello, che dimandava una nuova inalveazione di tutti i Fiumi, ed i Torrenti nel piano superiore della campagna: ed era anche considerabile il partito di quelli che si opponevano a tutti i progetti, e facevano difficoltà sopra tutto. Nel fervore della questione anche in Roma si perdettero di vista il progetto del Primaro, e la continuazione del Cavo Benedettino alla Bastia. Furono in Roma proposte, esaminate, ed escluse quattro linee differenti: la prima, ch'era proposta dal Sig. Fantoni, di portare il Reno in un nuovo alveo superiormente a tutte le valli fino a sboccare in Primaro a S. Alberto: la seconda, proposta dal Sig. Bertaglia, di tirare il nuovo alveo alquanto più basso, e sul margine delle valli: la terza, proposta dal Sig. Perelli, di continuare il Cavo Benedettino sul labbro superiore della valle di Marmorta istessamente fino a S. Alberto: la quarta, che chiamavasi Friso-Manfrotti, e che io non ho mai proposto di continuare il Cavo nella parte inferiore della valle fino allo sbocco del Santerno in Primaro. Le prime due linee sono segnate nella fig. 143.

Calmato un poe il fervore delle questioni nel 1765 furono nominati tre altri Periti, i Sigg. Lecchi, Temanza, e Verace, che dopo una nuova visita propossero qualche temperamento. Essi avendo trovato che il fondo del Primaro, dove correva incastrato tra rive alte ed arginate, s'era in quattro anni scavato notabilmente, crederono, che arginandolo dappertutto, ed allargandolo in alcuni luoghi senz' alcun'altra rettificazione vi si potessero rivolgere le acque del Cavo Benedettino: e in tutto il restante convennero nelle altre idee di riadattare lo stesso Cavo, di rimettervi dentro la Savena, di far la botte sotto il letto dell' Idice, d' inalveare successivamente il Reno dalle rotte superiori fino allo sbocco nel Cavo, e la Centonara, la Quaderna, ed il Sillaro fino al Primaro: anzi nel loro voto, che leggesi nel Tom. VI. della Raccolta pubblicata in Firenze, addottarono molte delle mie precedenti teorie intorno alle difficoltà delle linee superiori, intorno al riparto delle cadute, ed intorno allo sbocco dei Fiumi in Mare. Dopo quel tempo un Porporato di somma intelligenza fermezza e attività ha fatto metter mano ai lavori per ogni parte. Si sono chiuse le rotte, levati gli interrimenti,

Meccanica.

E e e

c

e rimesso tutto il Cavo Benedettino. Per evitare il risvolto, con cui prima andava esso a finire in Primaro, se n'è portato lo sbocco circa un miglio più sopra: e per facilitare l'escavazione si è giudicato opportuno di gettar l'Idice nelle valli situate sulla sinistra, e poi, restituito l'Idice nel proprio alveo, gli scoli delle stesse valli vi si sono fatte passare al disotto con una botte. S'è arginato tutto il Primaro sulla dritta sino all' altezza di 5., e di 6. piedi sopra le piene ordinarie: si è lasciata tra gli argini, e il cavo una golena sino di 30., e di 35. pertiche: e si sono rinfiancati gli argini a dritta, e a sinistra con una scarpa sino di due, e di tre piedi per ogni piede di altezza. E comunque potesse riuscire poco più operosa, ed assai più vantaggiosa la semplice continuazione del Cavo Benedettino alla Bastia, così però si è ottenuto il vantaggio principale di avere un Fiume arginato e regolare, ed esposto ai soli ordinarij inconvenienti degli altri Fiumi. L'inalveazione del Sillaro, la protrazione degli argini degli altri torrenti inferiori, lo scolo aperto in molti luoghi alle valli, e alle campagne ha già portato degli altri vantaggi considerabili. La bonificazione continuata in tutte le valli superiori ha avvicinato il tempo d'inalveare tutto il Reno al disopra del Cavo Benedettino, e di avere un solo Fiume continuato regolarmente dalla prima sorgente insino al Mare.

CAPO QUARTO.

DELLE RETTIFICAZIONI DEI FIUMI GHIAIOSI, E TORBIDI,
E PARTICOLARMENTE DELL' ARNO.

V Incenzio Viviani nel suo discorso sul Fiume Arno, dopo di avere fatto vedere con tutte le osservazioni, che abbiamo ricapitolato nel Capo VI. del Libro antecedente, il rialzamento continuato, e sensibile di tutto il fondo, suggerì ancora i provvedimenti, che credeva più opportuni da prendersi. Propose primieramente di moderare la sovrverchia pendenza delle valli più prossime, attraversando il letto dei principali influenti con varie chiuse stabilmente fondate su larga pianta, con grandissima scarpa all' infuori, con a
piedi

piedi le loro banchine, e con più gradi, o riseghe, affine di poterle ridurre in progresso di tempo a maggiore altezza, dopo che per di dietro si fossero rincalzate colle deposizioni delle materie portate insieme dalle acque. In secondo luogo superiormente alle chiuse, e dentro alle valli medesime suggerì di fare diverse e folte piantate di bosaglia, la più appropriata alla qualità del terreno: e dove non si potesse fare piantata di forte alcuna, per impedire il trabocco delle materie già smosse, suggerì di eleggere giù nel basso un competente spazio piano della peggiore qualità che vi fosse, per tenerlo arginato all' intorno, acciò servisse di scaricatojo, dentro il quale esse materie si potessero deporre comodamente. In terzo luogo propose di torre all' Arno sotto all' Incisa gran parte della sua eccedente caduta con rimettere in piedi alcune chiuse, che già vi erano, e col fabbricarne delle nuove, e istessamente di far de' simili ripari attraverso al letto della Sieve per qualche distanza dal suo sbocco in Arno, e negl' ingressi degli altri torrentelli, che vi si scaricano. Credette in somma il Viviani, che si dovesse attraversare e impedire in qualunque maniera il corso d' Arno, e obbligare quanto fosse possibile le materie più grosse di ghiaie, e sassi a restare nelle parti superiori.

Diverse ragioni di rendere comodamente navigabile il Fiume, e di acquistare i terreni occupati colle maggiori tortuosità, hanno fatto abbracciare un partito interamente contrario. Si sono levati certi gran massi, che attraversavano il corso d' Arno, e ch' erano come tante chiuse naturali. Si è raddrizzato, e ristretto il corso del Fiume sopra Firenze, e si è messo in canale da Firenze a Signa. L' abbreviazione del corso è stata di circa tre miglia sopra, e di un miglio sotto a Firenze. Senza parlare della spesa, che ha portato tutto questo lavoro, vediamo cos' è seguito. Superiormente a Firenze in alcuni luoghi ha deviato l' Arno dal nuovo alveo rettilineo, e non vi si mantiene negl' altri luoghi, che a forza di grandissime e dispendiose pietraje. Nel tratto che passa per Firenze, quantunque compreso tra i termini stabili delle due chiuse, o peschaje, che servono per la derivazione dei Mulini, all' entrata e all' uscita dalla Città, si è rialzato il fondo notabilmente dai tempi del Viva-

E c c z

ni,

ni, si sono riempiti i seni e le concavità più profonde, e vi si è perduto interamente l'uso della pesca, come mi hanno concordemente attestato i pescatori. Da quanto si dirà poi intorno allo stabilimento del fondo dei Fiumi al disopra delle pescaje, s'intenderà come sia possibile il caso di un rialzamento continuato, e sensibile del fondo. Mentre dovendosi regolare le cadenti da quel punto all'insù, dove finisce di stendersi l'accelerazione delle acque originata per la caduta da tutta l'altezza della pescaja, quando il fondo si rialzi al disotto, e si diminuisca l'altezza della caduta, verrà ancora a restringersi il tratto delle acque accelerate, e ancora il fondo superiore si dovrà per conseguenza rialzare.

Il Viviani al principio del suo discorso avea notato espressamente, che al suo tempo i sassi sotto a Firenze si andavano diminuendo sempre di mole, e terminavano tutti alla Badia a Settimo, per modo che ne' piaggioni da essa Badia in giù non se ne ritrovava più uno. Presentemente da Firenze fino al Ponte a Signa, tre miglia più sotto della Badia a Settimo, l'Arno continua a correre in ghiaja, e sassi. Oltre lo sbocco di Bisenzio si vede un piaggione di circa novecento piedi, in cui si trovano pietre grosse come pine: e se ne vedono pure degli altri di ghiaja grossa sotto al Ponte a Signa andando verso bocca d'Ombrone, e fino alla Golfolina. Poichè adunque nè Bisenzio, nè Ombrone non portano ghiaje in Arno, la sola abbreviazione di quattro miglia nel corso d'Arno ha portato una continuazione di sassi e ghiaje, almeno per tre altre miglia di più di prima, e per conseguenza ha portato ancora un maggiore rialzamento di fondo, ed ha deteriorato il sistema di tutto il Fiume. E per conferma di quanto si è detto nel Cap. II. che l'abbondanza della caduta nei Fiumi, che corrono in ghiaja, non può diminuirne gl' inconvenienti, come pensava il Guglielmini, conviene in oltre avvertire, che la caduta d'Arno da Firenze al Ponte a Signa era certamente abbondante, e che il Viviani l'avea riputata com'era allora soverchia, e sovrabbondante al bisogno. Dopo d'allora coll'abbreviazione di circa un miglio vi si è reso anche più rapido il corso di tutto il Fiume. Eppure con ciò non si è già ottenuta una qualche diminuzione delle ghiaje, ma se n'è anzi protratto l'ultimo limite di alcune miglia.

Il Guglielmini, quantunque si fosse formato delle idee poco esatte intorno alla successiva degradazione e all' intero discioglimento delle materie ghiaiose, ciò non ostante nel Cap. XIV. disse di riguardare le rettificazioni, e l'unione dei Fiumi, che cotrono in ghiaja, come imprese d'esito incerto e di grandissime difficoltà. Eustachio Manfredi addottò più generalmente le idee ed i principj del Viviani intorno alle conseguenze pericolose delle rettificazioni fatte nei tronchi, dove ancora continuano i sassi e le ghiaje grosse. Mentre nell' anno 1718. essendo consultato il Manfredi intorno ad un taglio, che volea farsi nel Reno sopra l'ultimo limite delle ghiaje, produsse due differenti ragioni per disapprovarlo. La prima si è, che i Fiumi ghiaiosi non s'accomodano per lo più a quelle strade, per le quali si procura condurli, oppure accomodandovisi le abbandonano di nuovo, e si aprono un altro cammino, rendendo molte volte vani tutti gli sforzi dell' arte, e tutte le spese impiegate per frenarli. La seconda si è, che rettificandosi un Fiume, ed abbreviandosi confidentabilmente di corso, quantunque si debba avere un proporzionato abbassamento del fondo superiore, questo buon effetto però resta distrutto dallo spingersi più avanti la ghiaja, e dall' elevazione del fondo inferiore al taglio. Però il giudizio uniforme dei più esatti Osservatori dei Fiumi, il Guglielmini, il Manfredi, il Viviani, e l'esempio di quanto è seguito, concordano insieme a fare, che si riguardino come sommamente pericolose e difficili le rettificazioni dei Fiumi dove seguitano ancora a portare delle materie grosse.

Da quanto si è detto nel Cap. V. del libro antecedente intorno alla natura dei sassi, e delle ghiaje, si può ricavare un pronostico più preciso dell' esito di simili operazioni. Mentre generalmente accrescendo in un Fiume ghiaioso la caduta e la forza, non si farà altro che spingere più lontano le ghiaje, come ancora si è detto nel Capo II. di questo libro: le ghiaje spinte, ed abbandonate sul fondo a distanze maggiori, lo rialzeranno gradatamente, prima nelle parti inferiori, e poi col progresso del tempo anche superiormente: il maggiore rialzamento del fondo porterà subito in conseguenza, e la maggiore altezza delle piene, e la difficoltà degli scoli della campagna, e la

ne-

necessità di alzare, e fortificare sempre più gli argini: e così con raddrizzare il Fiume generalmente non si farà che deteriorarne tutto il sistema. Però le regole ordinarie di mantenere diritti, e maggiormente inclinati gli alvei dei Fiumi non si potranno estendere ai tronchi superiori, e sin dove arrivano i falci, e le ghiaje, se non in qualche circostanza particolare: o che il fondo resti incassato tanto profondamente fra terra, che non vi siano più da temere i sinistri effetti del successivo rialzamento: o che il principale riguardo debba portarsi sui piani superiori, e che per renervi più libero il corso delle acque convenga anzi dividerne per un tratto più lungo le deposizioni: o che il Fiume riunito, raddrizzato, e ristretto arrivi a scaricare le ghiaje in qualche ampio recipiente, dove non possano esse portare alcuna conseguenza pernicioso. Ma generalmente dovrà tenersi per massima fondamentale, che i fiumi, e i torrenti insino a tanto che portano materie grosse, si lascino come sono, e che conviene tenerli divisi e tortuosi, e impedirne il libero corso più tosto che riunirli insieme, raddrizzarli, restringerli di letto, abbreviarvi il cammino, e accrescervi la caduta, il corpo, e l'impeto delle acque.

Nei Fiumi che portano materie più sottili di arena, e terra avranno luogo generalmente le regole di mantenerli diritti, liberi, ed uniti. Mentre queste materie si possono più facilmente dividere, affottrigliare, staccarsi dal fondo, incorporarsi insieme coll' acqua, e spingersi sino agli ultimi tronchi, ed alle foci dei fiumi, come pure si è detto nel Capo V. del Libro antecedente. Però in luoghi di tal natura i tagli, e i raddrizzamenti dei fiumi non potranno riuscire che vantaggiosi. Le avvertenze generali da averci in simili operazioni sono: che il taglio s'incominci in maniera da venire imboccato direttamente dal filone superiore del fiume: e che si conduca quant' è possibile per i terreni più facili ad essere corrosi. Ma poi bisogna particolarmente distinguere tra di loro due casi differenti, che il fiume da raddrizzarsi abbia più o meno caduta di fondo. Nel primo caso quando la linea del taglio sia molto più breve, e in eguale lunghezza vi si accresca notabilmente il declive, se il terreno sarà più facile ad essere corrosivo riuscirà ancora più facile tutta l'operazione, e basterà di scavare in parte il terreno, ed aprirvi dei fossi

paralleli, tanto che le acque incomincino a scorrervi, e neppure sarà necessario in questo caso di obbligarle con qualche lavoro nel fiume ad entrare nel taglio. Mentre incominciando le acque a scorrere per quei foili, e trovandovi una pendenza maggiore, e maggiormente accelerandosi, non mancheranno esse di allargare, e sprofondare gradatamente il nuovo alveo, deviando più copiosamente dal vecchio, e gettandovi delle deposizioni sempre maggiori. Ma se si trattasse di fiumi che corrano con pochissima caduta di fondo, e che l' abbreviazione del corso non porti un accrescimento sensibile di pendenza, allora per la felice riuscita del taglio non si potrà contare che sulla più facile imboccatura, e sulle minori resistenze dell' alveo rettilineo, e più breve: e nei fiumi maggiori, che corrono principalmente per la pressione e per l' altezza del corpo d' acqua, infino a tanto che l' alveo vecchio resterà molto più profondo del nuovo, vi si manterrà pure il corso principale, e vi vorranno i maggiori ajuti dell' arte per poterlo deviare.

Tra i casi del primo genere, che hanno avuto buon esito, io posso addurre il taglio fatto nel Reno poco lontano da Bologna per suggerimento di Eustachio Manfredi, e l' altro taglio che si è fatto nell' Adda di fianco a Pizzighettone colla direzione del Barattieri. Pare che sia del secondo genere il taglio del Pò fatto poco sopra Piacenza sei anni fa: e pare che ivi la maggior consistenza del terreno, in cui s' è incominciato lo scavo, e le ghiaie della Trebbia, che vi entrano qualche volta dalla parte inferiore, abbiano contribuito a impedire il buon esito di una operazione, che era già stata in qualche maniera collaudata dal Guglielmini. Anche nel taglio fatto alcuni anni prima nell' ultimo tronco d' Arno tra Pisa e l' Mare, si è incontrata la difficoltà di un fondo più stabile e consistente: nel qual caso non potendosi aspettare una maggior escavazione dall' impeto delle piene, per ovviare agl' inconvenienti di vederle divise in due alvei, conviene sempre preparare il nuovo alveo su tutte le dimensioni del vecchio. Ma ancora in quest' altro taglio pare che vi sia stato lo stesso errore di massima, di contare sull' accrescimento della forza del fiume, che potesse ottenersi coll' abbreviazione del corso: e negli ultimi tronchi dei fiumi essendo piccolissima la pendenza

denza del fondo, con raccorciare sensibilmente la linea non può ottenersi un accrescimento di pendenza che sia sensibile. E bensì vero che coll' abbreviazione del corso potrebbe accrescere sensibilmente la declività della superficie, come nell' esempio già addotto dei due rami del Tevere, d' Ostia, e di Fiumicino. Ma nell' ultimo tronco d' Arno concorrono delle particolari circostanze ad impedire una parte dei buoni effetti, che si potrebbero da ciò aspettare, i scanni d' arena, e gli altri impedimenti, che vi si trovano innanzi alla foce.

Dopo l' inondazione seguita nell' anno 1680 in Pisa, dove l' acqua in alcuni luoghi arrivò sino all' altezza di tre braccia sul piano della Città, il Gran Duca Cosimo III. con un suo Editto invitò tutti ad esporre quanto credevano più opportuno perchè la Città in avvenire restasse meglio difesa dai trabocchi delle piene. Furono allora proposti sette progetti differenti, e l' Ingegnere Mejer nella relazione che ne fece al Gran Duca, dopo di averli esaminati, e dopo di avere riconosciuti da se medesimo tutt' i fatti, sostenne che il primo, e più sostanziale provvedimento da prendersi era quello di rendere più libera, e più stabile la foce del Fiume in Mare. Propose, adunque di escavare un nuovo alveo rettilineo della lunghezza di pertiche 370, che cominciasse alla distanza di 100 pertiche dalla torre di bocca d' Arno, e che accorciasse il cammino al Mare di poco meno di tre quarti di miglio. E perchè le acque fossero spinte con maggior forza fin dentro il Mare, e si potessero più facilmente tener aperta la foce, propose di piegarla a tramontana, e di fiancheggiarla e munirla con una doppia palificata di 30 pertiche sulla dritta, e di 40 sulla sinistra. E finalmente dopo di avere così preparato l' ultimo scarico delle piene, propose il Mejer di metter mano all' altro raddrizzamento d' Arno, nel luogo di Barbaregina, e disse che venendosi con ciò a guadagnare tre altri quarti di miglio, ed essendo levati gli altri impedimenti inferiori, si farebbe più contribuito a togliere le cagioni delle inondazioni di Pisa di quello, che che la difesa delle sponde d' Arno, e l' alzamento continuo dei muricciuoli ne potesse impedire gli effetti.

I progetti anticamente proposti, e dibattuti con più fervore ai
giot-

giorni nostri per liberare la Città di Firenze dai trabocchi, e dal ringorgli delle piene, si trovano esposti dal Lupicini, Architetto e Geometra ne' suoi tempi di qualche stima, in un libro stampato nel 1591. Il primo progetto era di aprire nell' Arno un diversivo al disopra della Città, che ne deviasse una porzione delle piene, e tornasse al disotto a restituirla nel Fiume. Ma oltre a tutte le particolari difficoltà, che la situazione dei piani e delle fabbriche e da una parte e dall' altra della Città presenterebbe per l'esecuzione di questo progetto, le ragioni generali già addotte nel Cap. III. del Libro antecedente, e le altre osservazioni che aggiungeremo sufficientemente, non lascerebbero sperare da un diversivo una diminuzione sensibile dell' altezza delle piene, se non nel caso che si volesse deviare da Firenze una gran parte di tutto il Fiume, e allora gl' interramenti, che seguirebbero nei due alvei, non potrebbero che peggiorarne la condizione. L' altro progetto era di rialzare i muricciuoli d' Arno sino al colmo maggiore delle piene, di chiudere tutte le aperture, a cui potessero ringorgare le acque dentro il recinto della Città, e di portare con due fogne al disotto di essa tutte le immondezze, e le piogge che vi cadessero. Ma la fabbrica delle nuove fogne porterebbe uno sconcerto maggiore alle fabbriche della Città, e chiudendo le fogne presenti, e tutte le altre aperture d' Arno, non si provvederebbe che ai soli incomodi originati dal ringorgo delle piene, e non vi si provvederebbe ancora che in parte. Mentre essendo fondata la Città sulle antiche deposizioni del Fiume, quand' anche fossero assicurate le sponde, attraverso agli strati inferiori d' arena e ghiaja trapellerebbero sempre le acque, sgorgando nei luoghi sotterranei in proporzione che si alzassero le piene. Poi rinfermando le stesse piene tra i muricciuoli tanto al disopra del piano della Città non vi si levarebbe il pericolo, e dipenderebbe sempre da qualche casuale inavvertenza, che rompendosi un muricciuolo restasse vastamente inondata una Città così bella e magnifica come Firenze.

Per togliere tutto il male dalla radice bisognerebbe tener le piene incassate sempre fra terra, e non sostenute in aria cogli argini. A questo fine indicò il Lupicini confusamente diversi altri provvedi-

Meccanica,

Fff

menti,

menti di abbassare il letto d' Arno , o coll' escavazione manufatta, o con abbattere totalmente , o ancora in parte ambedue le pescaje di S. Niccolò , e dell' Uccello . L' escavazione tra due termini stabili non si potrebbe mantenere per molto tempo , e non servirebbe punto a diminuire l' altezza delle piene sopra il ciglio delle istesse pescaje . La pescaja superiore di S. Niccolò serve piuttosto a trattenere il trabocco dei sassi e delle ghiaje , e a questo fine sarebbe più espediente di alzarla che di abbassarla . Il progetto di demolire la pescaja inferiore dell' Uccello è stato troppo leggermente rigettato per le ragioni che la Città verrebbe così a privarsi del comodo dei mulini , e che i ponti e gli altri edifizj situati sulla sponda del Fiume resterebbero esposti al pericolo di rovinare . Al comodo dei mulini si potrebbe provvedere in molte altre maniere , o tirando miglior partito dal ramo d' acqua che si deriva colla pescaja superiore , o trasportando i mulini , e la chiusa inferiore più lontano dalla Città , o sostituendovi una pescaja amovibile in tempo delle piene . E intorno al fatto , che adducesi della rovina dei due ponti della Carraja , e di S. Trinita , caduti nella gran piena del 1333 dopo di essere rovinata in parte la pescaja dell' Uccello , bisogna primieramente avvertire , che i due vecchj ponti caddero ancora nella piena del 1557 senza che rovinasse la pescaja . Bisogna in oltre riflettere che il ponte di S. Trinita dopo quel tempo fu rifabbricato dall' Ammanati d' una consistenza assai maggiore , e che non dovrebbe abbassarsi la pescaja se non a poco a poco , e infino a tanto che il fondo del Fiume si fosse pareggiato colla platea inferiore dei ponti . E finalmente bisogna considerare che questa sarebbe la sola maniera di ferrar le piene fra terra , e di togliere e gli effetti e le cause di tutte le inondazioni .

CAPO QUINTO.

DEGLI SBocchi DEGL' INFLUENTI, E DELLA DIVERSIONE
DEL TIDONE, E DI FIUME MORTO.

IL Pò raccogliendo insieme nel fondo della gran valle di Lombardia le acque e le materie, che scendono dagli Apennini, e dalle Alpi, e cambiando spesse volte di letto nei tronchi superiori, come già s'è accennato nel Cap. VI. del Libro antecedente, negli altri tronchi inferiori presenta agli occhi del Filosofo un altro fenomeno importante, che dopo d'aver finito di continuamente correre in ghiaja nel proprio alveo, non riceve più ghiaja di sorte alcuna dai Fiumi tributarj, come ha già notato il Guglielmini nella Proposizione V. del Cap. IX. Ed è assai verisimile quanto ivi aggiunse lo stesso Autore, che avendo anticamente vagato il Pò vicino agli Apennini, e agli Euganei (come anche portano le antiche storie) dopo di essere stato quà e là respinto dalle deposizioni ghiarose degl' influenti, si sia poi stabilito di letto dove avendo finito di correre sopra un fondo ghiaroso, non poteva ricevere da alcuno degl' influenti altre materie che arenose. Nè ci mancano esempj di Fiumi stabiliti di letto alla stessa maniera anche in una vicinanza maggiore delle montagne. Il Reno tra gli Apennini riceve dei grossi sassi dalla Limentora, dall' Orsigna, e da altri influenti. Ma dopo di essersi reso nella pianura, e di avere lasciato le ghiaje, riceve la Samoggia, e così pure la Samoggia riceve il Lavino, dove non ritrovasi altro che arena e terra. Così ancora l'Arno sotto Empoli, e il Tevere sotto al luogo detto della Capannaccia, nè portano nel proprio letto, nè ricevono più ghiaje dai letti degl' influenti.

E certamente se qualche Fiume, dopo di avere lasciate tutte le ghiaje, ne ricevesse di nuovo da qualche influente, non si potrebbe credere stabilito nel fondo e nella forma di tutto l'alveo. Mentre in primo luogo se non vi fosse molto divario nella portata e nel corpo d'acqua dell' influente e del recipiente, le ghiaje del primo scendendosi per tutto l'alveo del secondo incomincerebbero

F f f 2

ad

ad alzarlo di fondo sotto alla confluenza, e poi produrrebbero un simile e proporzionato alzamento in tutto il tronco superiore: onde in progresso di tempo tenderebbe il Fiume a rivolgersi nei piani opposti allo sbocco, dove non arrivando le ghiaie, formato che fosse l'alveo, si manterrebbe sempre più libero e più profondo. Che se poi l'influente avesse una proporzione più piccola a tutto il recipiente, e le ghiaie si tenessero tutte nell'angolo, e sotto al lato della confluenza, vi formerebbero un respingente, che aumentandosi sempre più ne farebbe allungare la linea, e quando il lato opposto allo sbocco non resistesse insuperabilmente alla corrosione, obbligherebbe tutto il Fiume a deviare verso quei luoghi, dove non giugneste più ghiaia di sorte alcuna.

Però se si trattasse di sistemare il tronco superiore di qualche Fiume, di portarvi qualche nuovo influente, o di mutarne semplicemente la foce, bisognerebbe osservare prima di tutto, che la stessa foce restasse in luoghi, dove non arrivassero dall'influente materie più grosse di quelle del recipiente. Il Guglielmini quantunque si fosse formato delle altre idee intorno alla natura delle materie dei Fiumi, ciò non ostante nel Cap. IX. convenne generalmente in questa regola, e disse nella Proposizione V., che se un Fiume maggiore correrà con poca caduta, e dopo di aver lasciato le ghiaie se gli unirà un Fiume, che ve ne porti dentro delle altre; sarà il Fiume maggiore obbligato o a mutar corso o ad elevare il proprio fondo nelle parti superiori. E da questa proposizione ne cavò poi quattro regole generali: I. di non introdurre mai alcun Fiume, che corra in ghiaia, dentro l'alveo di un Fiume reale, che abbia il fondo arenoso, o limoso: II. di non abbreviare mai la linea a quei Fiumi influenti, che portano il sasso assai vicino alla propria foce: III. che le corrosioni delle ripe dei Fiumi reali, prodotte dai sassi degli influenti, sono inimedabili, ed è opera e spesa egualmente inutile che dannosa al corso del Fiume reale l'ostarvi: IV. che quando sia cosa possibile, torna più a conto o portare più basso la foce del Fiume influente, o allungargli la strada colle tortuosità per farli deporre i sassi prima dell'introduzione. Anzi nel Cap. XIV. raccomandò di badar bene, che quantunque gl'influenti non portino a' luogo

luogo dell' intersecazione ghiaie e materie più grosse di quelle del recipiente, può però darli il caso che ve le portino quando sia abbreviata la linea, ed accresciuta la declività dello sbocco: e in questo caso bisognerebbe sostenere il letto di ciascun influente, e moderare la pendenza e la forza con una, o con più chiuse, come dirassi in un altro capitolo.

Le circostanze particolari dei luoghi potrebbero portare delle eccezioni a queste regole, egualmente che alle altre già stabilite nel capo antecedente: come se non vi fosse da temer nulla nel recipiente, e se convenisse di provvedere principalmente al libero corso dell' influente, ed allo scarico delle materie piccole, e grosse. In questo caso si potrebbero regolare gl' influenti, che portano materie grosse, come gli altri che le portano più sottili, e resterebbe da fissarsi la regola fondamentale della mutazione degli sbocchi. Il Guglielmini, e gli altri Autori antichi non hanno scritto nulla di ben preciso intorno a quest' altra parte dell' Architettura Idraulica. Le controversie ultimamente insorte intorno al taglio del Tidone hanno dato occasione di pensarvi, e di disputarne. Il Tidone, che prima scorreva per lungo tratto sulla riva istessa del Pò, si è portato in questi ultimi anni a sboccare tre miglia sopra lo sbocco vecchio. L' abbreviazione di tre miglia di strada è bastata per farne pronosticare un buon esito da tutti quelli, che l' avevano progettata a Piacenza. Per lo contrario quegli altri, che l' hanno contraddetta in Milano, sostennero che non già la brevità della linea, ma la maggiore bassezza dello sbocco conferisca principalmente all' abbassamento del fondo, ed allo scarico delle piene di un Fiume: onde essendosi portato il Tidone a sboccare in un punto più alto dell' intera caduta, che ha il fondo del Pò nel corso di tre miglia, condannarono essi la nuova operazione, e credettero che anzi se ne dovesse aspettare un maggiore alzarimento delle piene, ed una maggiore corrosione delle sponde. Io credo che s' ingannassero e gli uni, e gli altri, e credo che nè la maggiore brevità della linea, nè la maggiore bassezza dello sbocco, ma la sola maggiore pendenza del fondo contribuisca principalmente al corso più felice di un Fiume. Poichè accresciuta la pendenza assoluta, e libera del fondo, secondo tutto ciò che

che si è detto, devono le acque tenerlo maggiormente escavato, e farvi abbassare il pelo delle piene: onde quando non vi fosse da temer altro per un più copioso trabocco delle materie nell'alveo del recipiente, il corso dell'influente verrebbe certamente a migliorarsi.

Per fare adunque un sicuro pronostico dell'esito felice di qualche taglio, bisogna misurare la caduta totale dell'influente dal luogo dove incomincia la diversione insino al luogo del nuovo sbocco, bisogna ripartirla per tutta la lunghezza del corso, e vedere se l'inclinazione del fondo riesca o maggiore o minore o pur anche la medesima di prima. E così nelle operazioni di questo genere possono occorrere tre differenti casi. Se la pendenza e l'inclinazione del fondo fosse la stessa nell'influente, e nel recipiente, non si farebbe alcun'altra variazione portando l'influente a sboccare o più sopra o più sotto: non si farebbe che trasferire da un luogo all'altro i danni, e i pericoli delle piene. Ma se l'influente avesse una pendenza minore di quella del recipiente, allora farebbe meglio di portare più lontano lo sbocco, e in un luogo sempre più basso. Questo è il caso degli scoli delle campagne, che vanno a finire nell'alveo di qualche Fiume. Mentre per le acque chiarificate, come sono ordinariamente gli scoli delle campagne, non abbisognando alcuna pendenza di fondo, in qualunque caso che il fondo del recipiente venga ad alzarsi colle successive deposizioni, e che gli scoli non vi abbiano un ricapito libero e facile come prima, protraendoli con tanti fossi paralleli fino a trovare un luogo tanto più basso, si potrà andare al riparo di tutt'i ringorghi delle campagne. Il metodo dei fossi paralleli è riuscito benissimo in diversi luoghi della Toscana, e massime del Valdarno inferiore. Ed io non avrei dubitato di proporre lo stesso metodo in altri luoghi, e massime nel tronco superiore dell'Adige, dove non potendo scolare liberamente le acque dei bassi fondi situati di fianco al Fiume, si guadagnerebbe moltissimo riparando il trabocco delle piene cogli argini, e protraendo gli scoli fin dove il fondo dell'Adige fosse bastantemente basso per poterli ricevere.

Questo appunto è il celebre caso di Fiume morto, prodotto per un esempio e dibattuto principalmente nelle scritture che si sono pubblicate intorno al taglio del Tidone. Chiamasi Fiume morto quel
falso,

fosso, in cui si uniscono gli scoli di tutte le campagne comprese tra l'argine destro d'Arno, e l'argine sinistro del Serchio, e i monti che si stendono da un Fiume all' altro. Anticamente il fosso andava a sboccare in Serchio, che alzandosi di alcune braccia e ringorgando in tempo delle piene, teneva indietro gli scoli, e cagionava l'allagamento delle campagne. Sul principio del secolo passato il celebre Castelli propose di deviare Fiume morto dal Serchio, e portarlo a sboccare in mare, allungando bensì la linea, ma guadagnando tutta la caduta del pelo basso, e del pelo alto del Serchio sopra il pelo basso del mare. Non essendo che colaticce le acque di Fiume morto, e non avendo bisogno d'alcuna pendenza di fondo, come i Fiumi ghiaiosi ed arenosi e tutte le acque torbide; l'allungamento della linea non diminuiva punto il vantaggio, che si poteva ricavare dalla bassezza e dalla libertà dello sbocco. L'obbiezione promossa dai volgari Ingegneri di quel tempo era che atteso l'impeto dei venti, e la quantità dei sorrenamenti, sarebbe stato difficile di tenere aperta in mare la nuova foce. Il Castelli rispose che l'impeto dei venti faceva la stessa resistenza, e lo stesso contrasto alla foce del Serchio, e che rispetto ai sorrenamenti il corpo d'acqua di Fiume morto bastava per riaprirsi da se la strada, cessati che fossero i venti contrarj, massime se tra le arene in caso di bisogno si fosse scavato qualche fossetto, che richiamando le acque ringorgate, e mettendole in moto, le facesse servire a sgombrare tutta la foce, ed a rimetterla nello stato medesimo di prima. L'esperimento fu fatto solennemente in presenza del Gran Duca, e un fossetto non più largo di due palini bastò perchè in poche ore tutta la foce restasse libera: ed è questo uno degli esempi più illustri, che abbia l'Idraulica, della superiorità delle profonde speculazioni dei Matematici sopra tutte le pratiche volgari.

Ma se poi l'influente abbisognasse d'una pendenza di fondo maggiore di quella del recipiente, allora abbreviando la linea, e portando più vicino lo sbocco, si verrebbe ad accrescere la caduta, e il corso si farebbe più libero. Questo è il caso preciso del Tidone. Poichè quantunque a tutte le controversie non sia preceduta una livellazione, che servisse di regola e di base; è però certo, che
por-

portando il Tidone materie grosse, e avendo un corpo d'acqua tanto minore, non si poteva stabilire l'antico letto, che sopra una pendenza di fondo assai maggiore di quella del Pò. Supponiamo che avesse il Tidone tre piedi di caduta per miglio, e il Pò solamente uno: e supponiamo che le ultime sei miglia sopra lo sbocco essendosi ridotte a tre, la caduta totale di piedi 18 si sia ridotta a 15. Così farebbe adesso la caduta del Tidone non più di 3, ma di 5 piedi per miglio: il fondo vi si dovrebbe maggiormente escavare, e incassarsi a poco a poco le piene: e l'altezza delle piene del Pò essendo eguale nei luoghi dello sbocco vecchio e del nuovo, anche il ringorgo nel letto presente del Tidone dovrebbe estendersi meno che prima non si estendeva nell'alveo vecchio. Coll'occasione di scorrere le scritture pubblicate intorno a quel taglio essendomi parso che nè da una parte nè dall'altra fosse ben conosciuto il principio fondamentale, con cui deve regularsi la mutazione dello sbocco, ho voluto spiegare in questo luogo le differenze dei casi del Tidone, e di Fiume morto, e avvertire generalmente che se l'influente ha maggiore pendenza del recipiente conviene anzi abbreviare la linea dell'influente, quantunque lo sbocco venga così a portarsi in un luogo più alto di quel di prima.

CAPO SESTO.

DELLA DIVERSIONE DEGL'INFLUENTI DELLA LAGUNA DI VENEZIA,
E PRINCIPALMENTE DELLA BRENTA.

LA Brenta, il maggiore Medoaco degli antichi, nasce dal Lago di Caldonazzo tra le montagne di Trento, scorre per tutta la Valsugana, ed esce dai seni delle montagne a Bassano. Anticamente senza diramazioni, e senz'argini, in un letto assai più profondo di quel d'adesso, andava a sboccare nella Laguna di Chioggia. Ivi pure finiva il minore Medoaco, il Bacchiglione, che da Vicenza correva unito insino a Padova, e dopo di esservisi diramato nei tre canali principali, che ancora presentemente servono ai comodi della Città, tornava a riunirsi nel canale chiamato adesso di Ron-

Roncajette. Gli antichi ponti, che ancora esistono, sono un monumento sicuro dell' antichità di quelle tre diramazioni: e il luogo, dove sboccavano i due Medoaci, è certamente indicato con quelle parole di Plinio *Athesis . . . fecit Brundulum, sicut Edronem Medoaci duo, ac fossa Clodia*. Il Rolandino nella sua cronica riferisce che l' anno 1189 fu diramato dal Bacchiglione il Naviglio detto della Battaglia, e che l' anno 1209 fu aperta la navigazione dei canali di Padova sino alla Brenta coll' altro canale chiamato il Piovego: e riferisce l' Ongarello ch' essendosi impoverito sempre più d' acque il Bacchiglione per le altre diramazioni fatte dai Vicentini nel loro Territorio, e non bastando i canali di Padova ai bisogni della Città, l' anno 1314 fu preso dai Carraresi il partito d' ingrossare il Bacchiglione con un ramo perenne d' acqua derivato a Limena dalla Brenta, e chiamato perciò la Brentella. La figura 144 può dare una qualche idea del corso della Brenta, e della diramazione della Brentella, e degli altri canali del territorio di Padova, dei quali occorrerà più di parlare nel presente, e nell' altro capitolo susseguente.

Per derivare il ramo della Brentella si dovette attraversare sotto di Limena con una chiusa tutto il letto della Brenta, ch' era tanto basso, e profondo, che come abbiamo da una sicura testimonianza del Bembo, *ea si moles non sit, omnis fluminis vis in breviorum alveum, qui demissior est, se se fundat, neque pars aquae ulla Patavium perveniat (neesse est)*. Ma la chiusa nella sua prima costruzione fu portata a tale altezza, e versò nel Cavo della Brentella tanta quantità d' acqua, che nelle prime piene della Brenta divennero inofficiosi i Mulini di Padova, e si ritrovò inondato tutto il basso Padovano. La bocca di Limena fu rifarsita l' anno 1370 sotto Francesco il Vecchio da Carrara, e fu ripartita in due vani della larghezza di 14 piedi Veneti ciascuno. Ciò non ostante continuò la Brentella ad assorbire un maggior corpo d' acqua, e nella piena dell' anno 1633 essendosi rovinato il regolatore di Limena, vi si rivolse dentro quasi tutta la Brenta, che lasciò vastamente interrato sotto di Limena il letto vecchio. Dopo varj provvedimenti l' anno 1680 per consiglio, e per opera del Montanari fu levata l' antica chiusa, perchè il fondo rialzato della Brenta faceva le veci di una chiusa

Meccanica.

G g

con-

continuata: la bocca di Limena fu ridotta ad un vano solo della larghezza di piedi $10 \frac{1}{2}$: e il Montanari propose ancora di regolarla colle opportune chiaviche in tempo di acque più alte. Nell'ultima fabbrica, diretta dal Ferracina, vi fu lasciata la larghezza di piedi 18, e l'anno 1777 vi ho trovato la foglia 8 piedi più bassa del fondo della Brenta vecchia diffotto a Limena, che restava affatto asciutta in tempo di acque basse, e presentava l'apparenza di un letto abbandonato più tosto che di un Fiume soggetto a piene così rapide e così grandi.

Passato il Dominio di Padova dai Carraresi alla Serenissima Repubblica, la salubrità dell'aria di Venezia, e l'interramento, che andava sempre crescendo nel fondo della Laguna ricercò una provvidenza affai più grande, e coraggiosa, quella di deviare il Bacchiglione, la Brenta, il Sile, la Livenza, la Piave, e gli altri influenti più piccoli dalla Laguna, e di portarli a sboccare fin dentro il Mare. Il Montanari, e il Guglielmini sostennero che il maggiore interramento della Laguna proveniva dalle deposizioni degl' influenti torbidi, e che l'insalubrità dell'aria di Venezia, e de' luoghi circonvicini proveniva dalle cattive esalazioni originate dal miscuglio delle acque dolci colle acque salse. Per lo contrario il Castelli sostenne che la Laguna s'interrava principalmente per le materie, che vi erano gettate dal Mare, e attribuì l'insalubrità dell'aria, e le infezioni epidemiche alle esalazioni putride del terreno, che si andava successivamente scoprendo. Pensò ancora il Castelli, che mantenendo nella Laguna un maggior corpo d'acqua si farebbe accresciuta la forza di respingere le deposizioni del Mare, e di portare più lontano le torbide dei Fiumi: ed aggiunse l'esempio del Rodano, che non ha mai interrato il Lago di Geneva, ed altri esempj consimili dei Fiumi, e dei Laghi di Lombardia. Fu del medesimo sentimento il Borelli, ed esso ancora propose certi rastrelli per solcare, e sconvolgere il fondo della Laguna, e per fare che le acque più facilmente trasportassero altrove una parte delle materie di già deposte. Prevalse il sentimento dei due primi. La Brenta, e il Bacchiglione furono deviati nel porto di Brondolo, il Sile nel porto di lesolo, la Piave, e la Livenza in quello di S. Margherita: nè restano ade-

fo

so da divertirsi dalla Laguna, se non i tre piccoli influenti, Marzenego, Dese, e Zero, il primo dei quali facilmente potrebbe rivolgersi nel secondo, e poi ambidue nel terzo, e tutti tre insieme nel Sile. La salubrità dell'aria, che si è ottenuta a Venezia dopo la diversione dei cinque Fiumi da tutto il recinto della Laguna, è un bastante compenso degl' inconvenienti, che necessariamente ne dovevano seguire dell' allungamento delle linee, della diminuzione delle pendenze, e del rialzamento dei fondi superiori di ciascun Fiume. L' interrimento poi quantunque vada sempre crescendo nei bassi fondi della Laguna, quantunque vi faccia bisogno di macchine maggiori, e di un lavoro più assiduo per allontanare maggiormente quel tempo, in cui la Laguna si cambi in terra ferma; ciò non ostante egli è certo si allontanerebbe meno quel tempo, se le deposizioni dei fiumi torbidi si aggiugnessero alle altre materie che il mare nelle tempeste trasporta dalle bocche dei porti di Chioggia, di Malamocco, di Venezia, del Lido, e al di sopra degli Isolotti, che a Levante dividono la Laguna dal Mare.

Fu incominciato nel 1484 il Brentone, ch'è l'alveo per cui la Brenta, dopo la diramazione del Canale di Venezia, si volge dal Dolo a sboccare nel porto di Brondolo, e in Mare: e per deviare dalla Laguna anche le acque di quel Canale s'è poi tirato nel 1610 parallelamente al Brentone, e poco lontano dall' ultimo sostegno, per cui le barche passano nella Laguna, un altro Cavo, che chiamasi il taglio novissimo, e che va similmente a finire nel porto di Brondolo. Questa grand' opera fu ottimamente ideata, ed eseguita per ciò che appartiene all' ultimo tronco, ed alla foce, essendosi unite alle acque di tutta la Brenta anche quelle del Bacchiglione, e di altri canali, che insieme hanno avuto forza bastante per mantenere la stessa foce profonda e libera, come si è detto nel Cap. VIII. del Lib. antecedente. L'errore principale di tutta l'opera è stato quello di non aver preveduti gli effetti perniciosi, che l'allungamento della linea dovea portare nel tronco superiore, e di aver trascurati i compensi, che potevano combinare insieme il vantaggio maggiore della Capitale coi danni minori della campagna. Una rettificazione che allora si fosse fatta nei tronchi superiori di tutti i Fiumi, che divertivansi dalla La-

guna, poteva raccorciare, e compensare quanto aggiugnendosi coll' allungamento dei tronchi inferiori: e se il nuovo alveo del Brentone si fosse tirato in linea retta, non già dal Dolo, ma da Noventa, o da Strà sino alla svolta di Corte, si farebbe potuto colla stessa spesa portare il Fiume in Mare senza allungarlo di corso sensibilmente. Un altro errore di costruzione è stato quello di tirare il Brentone ad angolo acuto col vecchio alveo della Brenta nella svolta del Dolo: mentre essendosi così divertita nel Canale di Venezia una quantità d'acqua maggiore di quella che abbisognava per gli usi della navigazione, e dei mulini, le acque così divise, e rallentate di corso nella svolta suddetta, hanno incominciato a lasciarvi delle deposizioni, e queste si sono fatte anche maggiori per la cattiva struttura del ponte, che si è fabbricato a giorni nostri. Mentre essendosi tirato il ponte in una linea obliqua al filone del Fiume in vicinanza alla svolta, e la grossezza dei piloni avendo una proporzione sensibile alla larghezza della sezione, ed essendosi ancora tenuta la platea del ponte cinque piedi più alta della foglia del sostegno del Dolo, in poco tempo tutto il fondo del Fiume s'è pareggiato colla platea medesima, ed io vi ho ritrovato sopra due o tre piedi di forrenamento dalla parte del sostegno, e cinque o sei dalla parte opposta.

Gl'interramenti si vedono lungamente continuati e sopra, e sotto il ponte del Dolo. Nell'alveo rettilineo del Brentone il difetto della pendenza vi ha fatto rialzare il fondo sin dove arriva ad esser sensibile il flusso, e riflusso del Mare: e sulla botte sotterranea di Corte, sette miglia lontano dal Dolo, l'interramento si è ritrovato di piedi cinque, come si è detto nel Cap. VI. del Libro antecedente. Dal Dolo a Limena all'impedimento del Ponte si sono aggiunte due altre cagioni di farvi alzare il fondo ancor maggiormente: le lunghe tortuosità, che tutte insieme prendono il giro di miglia 18 in un tratto, che andando per linea retta è di miglia 12, e la diminuzione del corpo d'acqua, per cui la Brenta dalla diramazione della Brentella sino alla confluenza del Piovego ha l'apparenza di un fiume più tosto temporario che perenne. Il rialzamento del fondo della Brenta ha reso inofficioso ed inutile il sostegno, che l'anno

1481, come attesta il Zendrini nel Cap. XII., fu fabbricato a Strà per facilitare e assicurare il passaggio delle barche dal Piovego nella Brenta. Il Ponte di Strà, che sappiamo essersi fabbricato nel 1549, ci dà un'altra misura del rialzamento del fondo in quel luogo: mentre vi si vede interrato non solamente tutto il pilone di mezzo, ma ancora una porzione de' due archi laterali, e le vicine chiaviche del Veraro, che dovevano esser poste a principio sopra il fondo del fiume, restano presentemente per tre o quattro piedi sepolte nelle deposizioni. Onde arrivando a otto piedi l'interramento della Brenta sotto alla bocca di Limena, come si è detto antecedenemente, è manifesto che dopo l'ultimo risarcimento della stessa bocca, e dopo la fabbrica del Ponte del Dolo, da Limena sino a Corte si è avuto un continuato interrimento, che dagli otto piedi va fino ai cinque.

L'alzamento del fondo ha portato la necessità di alzare proporzionalmente anche gli argini, che a Limena sono di 9, o 10 piedi d'altezza sul piano della campagna, e di 14, o 16 nel Brentone: e con ciò il fondo del fiume resta tanto meno incassato nel piano della campagna. Io ho osservato che il fondo della Brenta vecchia restava a Limena 9, o 10 piedi sotto il piano della campagna, e l'ho ritrovato di egual bassezza due miglia e mezzo più sotto nel luogo della Croce. Ho ritrovato pure che il fondo si andava gradatamente accostando al piano della campagna nelle parti inferiori della Brenta, e del Brentone, e che vi si pareggiava prossimamente nel luogo di Codevigo. L'alzamento del fondo, e degli argini ha reso dappertutto assai più frequenti e perniciose le rotte in tempo di piena. Nel tronco inferiore del Brentone sono in maggior pericolo gli argini, che dalla parte sinistra servono di antemurale alla Laguna, e rovinandosi minaccierebbero un intero sconvolgimento del presente sistema della Laguna, e del Brentone. Nel tronco più tortuoso e irregolare della Brenta tra Limena, e il Dolo si fa sempre maggiore il pericolo delle nobili e deliziose abitazioni fabbricate dall'una e dall'altra parte del fiume. A Limena poi si rivolge una tanta quantità d'acqua nella Brentella, e quindi nel Canale di Padova, che non è più così raro il caso di vedere inondata tutta quella

quella porzione della Città, ch'è fabbricata intorno alle vecchie mura dei Carrarefi: e finalmente per un altro errore di costruzione essendosi tenuto il Piovego, e il Canale della Battaglia ad una larghezza molto maggiore di quella che abbisognava al cambio delle barche, e al comodo della navigazione, vi si sono formati due fiumi considerabili in vece di due canali regolati: e così il Canale della Battaglia, il Piovego, la Brentella, la Brenta, il Brentone mettono tutto il Territorio, e la Città di Padova in un continuo pericolo d'inondazioni.

CAPO SETTIMO.

DI VARIE PROVIDENZE CHE SI POTREBBERO PROPORRE SUL FIUME BRENTA.

LA serie dei mali di già seguiti, e di quelli che possono seguire, hanno fatto pensare proporre esaminare varj progetti per meglio sistemare tutta la Brenta, e le sue diramazioni. La regolarità del corso della Brentella, e del Canale di Pontelungo, e l'incassamento dei due fondi fra terra, e il raccorciamento della linea presente, ha suggerito l'idea di allargare i due cavi trasportando gli argini da una parte, di congiungerli insieme cou un nuovo taglio che riuscirebbe di pertiche 8470, e di rivolgere la Brenta intera nella Brentella, e dopo l'unione del Bacchiglione, e la diramazione dei due canali della Battaglia, e di Padova, portarle nel Canale di Pontelungo, e di là nel porto di Brondolo, e in Mare. L'attento, e minuto esame, che l'anno 1777 si è fatto per ordine supremo, ed in cui pure io ho avuto parte, non ha dato da rilevare in quel progetto alcuna difficoltà fisica, e topografica nè per l'allargamento dei canali, nè per la qualità del terreno, per cui dovrebbe condursi il nuovo taglio, nè per l'incassamento del fondo, che non sarebbe minore di 8 piedi, nè per la quantità della pendenza, che sotto all'unione della Brenta, e del Bacchiglione farebbe di due piedi, ed alcune once per miglio, e così farebbe maggiore di quella che conviene alla sola Brenta poco sotto

sotto all'ultimo termine delle ghiaie. Vi si sono anche rilevati; vantaggi di sfaccare il fiume dalle più belle abitazioni del Territorio di Padova, di allontanarlo maggiormente dalla Laguna, di ridurlo a 33 miglia tra Limena e il Mare, e così di abbreviarlo per più di sette miglia di corso. Non vi si sarebbe trovata neppure difficoltà alcuna di derivare il canale di Padova, e provvedere ai bisogni della Città se si fosse potuto attraversare il nuovo alveo con qualche specie di chiufa, che rivolgesse la necessaria quantità d'acqua in Città, Ma in questo caso l'elevazione del fondo superiore, e gli altri inconvenienti, che ne verrebbero, e che già sono seguiti per una causa consimile al Dolo, deluderebbero le migliori speranze della nuova inalveazione. Esclusa l'idea d'una chiufa ecco la difficoltà che si presenta da se medesima per la suddetta derivazione.

Presentemente in tempo di acque più basse tutte quelle della Brenta superiore si rivolgono nella Brentella, ed aggiunte quelle del Bacchiglione, e sottratto il ramo della Battaglia passano tutte nel canale di Padova, e si dividono in tre altri canali, e servono per 33 diversi edifizj, dai quali in gran parte dipende la sussistenza della Città. Nel caso che il Bacchiglione, e la Brenta si continuassero in un alveo libero direttamente sino a incontrare il Canale di Pontelungo, colla pendenza di più di due once per miglio, e colla larghezza proporzionata allo scarico delle piene, una gran parte delle acque basse si volgerebbe da quella parte, e ne mancherebbe altrettanto per Padova, dove molte volte appena bastano quelle, che vi si rivolgono presentemente. Supponiamo che sotto alla confluenza del Bacchiglione, nella situazione più comoda, sulla sinistra del nuovo alveo, s'apra una bocca che sia o del tutto libera come quella del Canale della Battaglia, o sia ripartita in tante chiaviche, con di fianco un sostegno per continuarvi in ogni tempo la navigazione. Supponiamo che si raddrizzi il Canale presente di Padova, e che sino a Ponte molino dalle quattro miglia riducasi a pertiche 2300, e che però la caduta totale di piedi cinque vi si ripartisca in ragione di due piedi per miglio, prossimamente come riuscirebbe la caduta del nuovo alveo. Supponiamo finalmente, che la bocca, e tutto il canale di Padova si tenga alla stessa larghezza del nuovo

alveo, la quale dovrebbe essere di piedi 120. In queste supposizioni tutto al più si potrebbe rivolgere a Padova la metà del corpo d'acqua, che vi si rivolge presentemente: e in tempo di acque basse la metà sola non basterebbe per il bisogno de' mulini, e degli altri edifizj. E poichè in tempo di acque basse la portata del Bacchiglione è di poco minore della portata della Brentella, come si è detto nel Cap. III. del Libro antecedente, quando le acque si unissero insieme, e si ripartissero nuovamente in due canali egualmente larghi, e inclinati, uno de' quali restasse nella direzione continuata del tronco superiore, l'altro fosse aperto di fianco, farebbe quasi lo stesso per Padova come se vi si rivolgesse il solo Bacchiglione, cioè si ridurrebbe Padova nelle circostanze medesime di quel tempo, in cui i Carraresi hanno trovato necessario di aprire con tanta spesa la bocca di Livenza, e di diramare la Brentella della Brenta.

Nei 53 mulini di Padova si contano 18 ruote stabili, e queste hanno una caduta maggiore, e servono meglio in tempo di acque basse, ma in tempo di piena restano inofficose per il ringorgo de' canali inferiori. Le altre 25 ruote sono in luoghi di minor caduta, ed hanno le ale più larghe, e si sono collocate sopra le barche, che galleggiando, e adattandosi ai differenti stati d'acqua servono ancora in tempo delle piene. Nelle ruote stabili si è cercata una maggiore attività con limitarla allo stato d'acqua ordinario: e nelle ruote galleggianti si è cercato di provvedere ai bisogni della Città anche nei giorni di piena, che non sono di numero così piccolo in in tutto l'anno. Il Marchese Poleni soleva mostrare ai forestieri il sistema delle diramazioni di Padova come un monumento della sagacità, e dell'industria de' tempi, che si riguardano generalmente come più rozzi. Presentemente nelle ruote galleggianti riesce assai scarso il lavoro quando l'altezza del corpo d'acqua sopra la foglia de' mulini è di piedi 5, nel quale stato d'acqua continua tutta la Brenta a decorrer per la Brentella. Ora seguendo le tracce dei principj Idrometrici, che si sono addottati in tutti i casi consimili, e calcolando l'altezza della radice cuba del quadrato della quantità d'acqua, come si è detto nel Teor. VIII. del Lib. III., e supponendo che essendo l'altezza di piedi cinque si riducesse la quantità d'acqua alla metà;

rifulterebbe l'altezza residua di piedi $3\frac{1}{2}$, e l'altezza che adesso è la minore di piedi 2 si ridurrebbe a $1\frac{1}{4}$. Nel caso adunque che il corpo d'acqua nei presenti canali di Padova si riducesse alla metà, in tempo di acque basse appena lavorerebbero i mulini, e non lavorerebbero più bene in quello stato che adesso è più vantaggioso, e più comune.

Sarebbe un piccolo compenso per la metà d'acqua, che venisse a mancare, quello di sgombrare alcuni impedimenti del fondo, di rimettere qualche ruota che vi era prima, di migliorare la costruzione delle ruote presenti, serrando le ale di fianco, e incastrandole come si pratica dove vi è un poco più di caduta, o in fine di mettere a foglia stabile le ruote, che si sono lasciate galleggiare acciò nel sistema presente servano ancora in tempo di piena. Poichè nei mulini a ruota stabile non essendovi una caduta maggiore di un piede e mezzo, ed essendo solamente di un mezzo piede la caduta nelle altre ruote, che sono sopra le barche, con i maggiori raffinamenti dell' arte non vi si potrebbe guadagnare che poco: e farebbe poi un incomodo troppo grande per Padova quello di trasportare una parte degli edifizj, che servono per la sussistenza ordinaria, fuori e lontano dal recinto della Città. E poi quand' anche si potesse fare un tal cambiamento nell' organizzazione economica, e fisica d'una Città così grande e conspicua, io non saprei trovare ragione alcuna di farla. La Città di Padova è bastantemente provvista in tempo di acque basse e mezzane, e per ovviare alle inondazioni in tempo di piena non vi è da far altro che di regolare la bocca di Limena, com' erasi proposto sempre di fare fino dalla prima costruzione della Brentella: e per il territorio di Padova tutt' i vantaggi del progetto già esposto si avrebbero egualmente quando invece di deviare tutta la Brenta nel piano superiore della Città si deviasse nel piano inferiore, e invece di rivolger la Brenta nella Brentella, e di là con un nuovo cavo portarla nel Canale di Ponte lungo, il nuovo cavo si aprisse dalla Brenta vecchia al Canale di Roncagette, ch' è il vecchio alveo per cui tutto il Bacchiglione una volta passava nello stesso Canale di Ponte lungo, e che adesso non avrebbe bisogno se non di essere raddrizzato, allargato, e proporzionato al corpo delle acque unite.

Meccanica .

H h h

In

In quest' altra linea, che chiamerò la linea inferiore, si avrebbe ancora l' abbreviazione di sei miglia di corso sopra gli alvei presenti della Brenta, e del Brentone. L' adattamento del Canale di Roncagette patrebbe di un impegno poco maggiore dell' allargamento della Brentella nell' altro progetto della linea superiore. E l' una, e l' altra linea sono segnate nella fig. 144. Nella linea inferiore regolando la bocca di Limena, e togliendo qualche piccola tortuosità, potrebbe servire benissimo allo scarico delle acque residue l' alveo presente della Brenta nelle prime due miglia sotto a Limena, dove la larghezza è tra i 100, e 140 piedi, e dove il fondo resta incassato per 9, o 10 piedi tra il piano della campagna: e così la lunghezza del nuovo alveo, che unisse direttamente la Brenta vecchia col Canale di Roncagette non farebbe che di pertiche 5300. La derivazione del Canale di Venezia riuscirebbe tanto più facile disotto a Padova perchè dopo l' unione di tutte le acque della Città nel nuovo alveo non vi sarebbe da divertire nel Piovego che la sola quantità necessaria per continuare la navigazione sino alla Laguna: e il Canale della Battaglia, ed altri Canali navigabili potrebbero servire di norma. Le providenze per i mulini del Dolo, per il canale dell' acqua da bere a Venezia, per rimettere il sostegno di Strà, se ve ne fosse il bisogno, per i ponti, e per le strade, e per gli argini, farebbero precisamente le stesse nella linea superiore, e inferiore. La pendenza del fondo nella linea inferiore sarebbe ripartita in ragione di tre piedi per miglio dell' alveo presente della Brenta vecchia sino all' intersecazione del Piovego, e di là sino al Canale di Ponte lungo in ragione di un piede e mezzo. L' abbondanza della caduta porterebbe un successivo e considerabile abbassamento di fondo in quel tronco della Brenta vecchia, in cui le acque continuassero ancora a decorrere, e la caduta proporzionata nei canali inferiori non darebbe luogo a temervi alcun altro inconveniente: e restando le acque presentemente all' altezza di 5 piedi sopra la foglia di Limena quando sono più basse, e il fondo della Brenta vecchia restando all' altezza di 8 piedi, come si è detto sopra; un abbassamento di 2, o di 3 piedi di fondo lascierebbe le diramazioni di Padova nello stato medesimo di adesso in tempo di acque basse, e la diminuzione di

di due soli piedi di altezza delle piene, senz' alcun' altra providenza, toglierebbe ogni pericolo di vedere inondati i sobborghi della Città.

Ma quand' anco non si potesse ora dar mano ad una mutazione generale del presente sistema, o si dovesse differire più lungamente, per ovviare alle inondazioni di Padova non vi vorrebbero che delle providenze assai facili. Poichè nella Brenta vecchia essendovi 3 piedi di più di fondo che non abbisogna per rivolgere tutte le acque nella Brentella quando sono più basse, si potrebbe rialzare senz' altro la bocca di Limena di 3 piedi, senza che in Padova venisse a mancar nulla nel tempo di acque basse: e quando così le piene innanzi alla stessa bocca dall' altezza di 18 piedi si riducessero solamente a 15 piedi, fatti i soliti calcoli si troverebbe che la quantità d'acqua nella Brentella verrebbe a diminuirsi in ragione di 38 a 29, e che l'altezza delle piene nella Brentella si diminuirebbe in ragione di 6 a 5, cioè che le piene si abbasserebbero di più di due piedi: ch' è quanto basta perchè più non venga a inondarsi quella Città. Al rialzamento della foglia di Limena potrebbe anche equivalere il semplice restringimento, e farebbe un problema assai facile quello di ricercare la larghezza da darsi alla bocca, perchè sotto l'altezza di 8 piedi versasse la stessa quantità d'acqua, che si ha presentemente nella larghezza di 18 piedi, e sotto l'altezza di 5 piedi. Col metodo istesso, di cui si sono già fatte tante applicazioni in questo libro, si troverebbe che la bocca si potrebbe restringere quasi della metà: e se si cercasse il restringimento equivalente al rialzamento di 2 piedi, così che l'altezza del corpo d'acqua innanzi alla bocca di Limena non dovesse mai esser minore di 6 piedi, si troverebbe la larghezza di 12 piedi.

Con queste facili providenze si otterrebbe lo stesso intento, ch' erasi proposto già di ottenere regolando la bocca colle cateratte opportune. Ma nello stesso caso di continuare più lungamente nel sistema generale di adesso vi sarebbero delle altre providenze da suggerire per facilitare lo scarico del corpo d'acqua accresciuto nella Brenta vecchia in tempo di piena: cioè di togliere le due maggiori tortuosità di Altichiero, e della Vandura. Così con due piccoli tagli si potrebbero guadagnare circa due miglia di strada: la pen-

denza del fondo da Limena a Strà si accrescerebbe di circa un fello: e il fondo essendo composto di arena successivamente depositate, e facilmente amovibili, coll' accrescimento di un fello di pendenza, e di un ottavo del corpo d'acqua, si dovrebbe successivamente abbassare sino a quel segno, in cui convenisse fissare con qualche chiusa il fondo della Brenta, perchè non mancasse nella Brentella la necessaria quantità d'acqua. Il di più d'acqua, che in tempo delle piene arriverebbe da Limena a Strà, in vece di rinalgorgare per le diramazioni di Padova farebbe che i vantaggi medesimi si continuassero nel tronco inferiore della Brenta, se tagliando fuori non tanto la piccola svolta di Paluello, quanto la svolta maggiore, e l'angolo acuto, e il Ponte del Dolo, il canale di Venezia si protrasse all' insù sino a Paluello, e si trasportassero ivi le chiviche, i mulini, e il sostegno del Dolo. Mentre così rimossi i maggiori impedimenti, e abbreviata la linea del corso, e accresciuta insieme la caduta e il corpo e l'impeto delle acque, se ne dovrebbe aspettare uno scavamento proporzionato anche nell' alveo del Brentone: e con queste providenze il Brentone, e la Brenta avrebbero un corso più regolare, e non avrebbero di bisogno che del rinforzo, e della custodia degli argini, e delle sole diligenze ordinarie degli altri Fiumi. Non occorre adesso di entrare in un più minuto dettaglio nè di queste ultime providenze per regolare la Brenta nel proprio alveo, nè di quei due primi progetti d'una nuova inalveazione, che si potrebbe fare nel piano superiore, o inferiore di Padova. Tutto il dettaglio è già stato sottoposto agli occhi di quelli che ne dovevano essere più particolarmente informati. La qualità di questo mio libro esigea solamente che vi s'inferisse una generale informazione di questa così celebre controversia, e si facesse parte agli Idrometri delle osservazioni che si sono già fatte in occasione di esaminarla, e che potrebbero dar qualche lume per altri casi consimili.

CAPO

CAPO OTTAVO.

DEL RINGORGO CAGIONATO DALLE CHIUSE,
E DELLE SPERENZE DI ROVEREDO.

Chiuse, traverse, o pescaje si chiamano tutti gli ostacoli o naturali o artificiali che attraversano il letto di un fiume, e che trattengono l'acqua al disopra, e la lasciano poi cadere precipitosamente al disotto. Le variazioni cagionate in un fiume per l'erezione di qualche chiufa possono appunto considerarsi nel tronco o superiore, o inferiore. Inferiormente precipitando le acque non trattenute formeranno al piede della chiufa dei vortici, e se il fondo non sarà ben tenace e consistente, vi scaveranno ancora dei gorghi, e vi metteranno in pericolo prima il piede, e poi tutto il corpo della chiufa: e in questi casi bisogna che l'industria degli artefici prenda tutte le precauzioni, o con dare alla chiufa una scarpa assai larga al di fuori, per modo che la caduta non abbiassi tutta a piombo, o con disporla a gradini per modo che resti come divisa in altre più piccole cadute. Ma quando siasi bastantemente provveduto al piede, e ai lati inferiori della chiufa, per tutto il tronco susseguente non vi è più altra considerazione da fare. Mentre nelle cadute ancora maggiori e verticali si osserva generalmente che la velocità acquistata, per la contrarietà istessa dei moti vorticosi, e per le ripercosse del fondo e delle ripe arriva prestamente al suo termine, e dopo poche centinaia di braccia si riduce a quel solo grado, che corrisponde all' altezza del corpo d'acqua, ed alla pendenza del fondo susseguente: come ho varie volte osservato anche sotto alle cascate maggiori della Savoia, e del Vallese.

Superiormente alla chiufa sono da considerarsi il ristagno, o come propriamente chiamasi ringurgito, o ringorgo dell'acqua, e le maggiori deposizioni, e il rialzamento, che in conseguenza si deve avere di tutto il fondo. Intorno a questi due articoli conviene esporre separatamente, e ciò che hanno prima pensato i più celebri Autori, e ciò che ho poi avuto occasione io medesimo di osservare, e di

ag-

aggiugnere. Il Guglielmini nel Cap. X. sulla natura de' Fiumi, Eustachio Manfredi nel Cap. VII. della sua risposta apologetica, e il Grandi nella Proposizione XXXVI. del Libro II. credettero che il ringorgo cagionato in un fiume per l'opposizione di qualche ostacolo dovesse stendersi fin dove l'orizzontale tirata per la sommità dell' ostacolo arriva a incontrare il fondo del fiume. A me pare che ragionando su gli altri principj addottati da medesimi Autori si possa ricavare che il ringorgo arrivi veramente più in su. Sia BR il fondo di un canale, fig. 145., e tolti gl' impedimenti inferiori la superficie dell' acqua Pp sia parallela al fondo, come principalmente succede ne' canali artefatti. S' intenda che nel luogo M venga alzato l'ostacolo MNm , e per la sommità N s' intenda pure tirata l'orizzontale NF , che arrivi a incontrare il fondo del canale nel punto F . Il corso dell' acqua resterà manifestamente impedito in tutto il tratto FNm : e non scorrendo più l'acqua da F in N colla stessa velocità, con cui prima scendeva da F in M , e in R , quell' istesso rallentamento di corso; che si avrà sotto il punto F , necessariamente dovrà portare qualche ritardo anche al disopra. La stessa conclusione si può dedurre considerando che ridotto il corso dell' acqua allo stato di permanenza, come si è detto sopra, dovrà passare per ciascuna sezione in ugual tempo un' uguale quantità d'acqua, e bisognerà perciò che le sezioni intersecate dall' orizzontale NF , e impedita nella parte inferiore s' alzino di superficie, e si rigonfino sotto a P . L' elevazione della superficie sotto al punto P la renderà meno declive anche al disopra, e sarà meno libero il moto superficiale, e così per l'opposizione dell' ostacolo MNm si avrà qualche rallentamento del corso e nella superficie, e nel fondo anche dove il fondo è superiore all' orizzontale tirata dal punto N .

In vicinanza all' ostacolo la superficie Pa deve anzi farsi più declive di prima. Mentre precipitando le acque liberamente da N in M devono acquistare una velocità maggiore di quella, con cui prima scorrevano da F in R , e per la naturale adesione, e viscosità delle parti, le acque attualmente cadenti devono tirar con se le altre che non sono ancora arrivate al ciglio della caduta, e così l'accelerazione si deve stendere: per qualche tratto al disopra del punto N .

N. Ciò ancora è manifesto per essere del tutto libera la sezione *Nn* corrispondente al punto *N*, e doverfi per conseguenza abbassare di altezza, e rendere meno declive superiormente la superficie *n*. Questo è un fenomeno già osservato e considerato da altri Autori, e massime dal Guglielmini nel Capo VII. sulla natura dei fiumi, e dal Manfredi nelle sue annotazioni. Ma inoltre osservò il Manfredi che nelle cadute libere per l'ordinario l'altezza del corpo d'acqua non incomincia a diminuirsi sensibilmente, e i galleggianti non incominciano ad accelerarsi che in poca distanza dalla chiusa, e che però non si estende molto all' insù quell' aumento di velocità, che dipende o dalla maggiore declività della superficie, o dall' azione dell' acqua, che liberamente cadendo dal ciglio della chiusa, e accelerandosi rende più celere anche quella, che si avvicina al luogo della caduta. Nei canali che servono per l'uso dei mulini molte volte ho trovato che l'accelerazione dei galleggianti incominciava a distinguersi coll' occhio alla distanza di 8, o 10 piedi dalle chiuse. Nei fiumi, e nelle chiuse maggiori è ancora più lungo il tratto, in cui si vede più celere il corso dei galleggianti: e nei fiumi che vanno a sboccare liberamente nel mare, si è detto già verso il fine del libro antecedente sino a quale distanza incominci a risentirsi l'accelerazione, che nasce dalla libertà dello sfogo.

Dallo stesso principio della naturale adesione, e dell' azione reciproca delle particelle d'acqua fra loro ne segue ancora che quanto minore sarà la totale caduta dell' acqua, che dà moto ad una ruota, anche restando pari tutte le altre circostanze, si farà tanto minore la velocità della ruota: il che si può facilmente verificare alzando il fondo del canale sotto alla ruota, o con sovrapporre ad esso delle tavole, o in qualunque altra maniera: mentre alla maggiore elevazione del fondo, ed alla minor caduta corrisponderà sempre una minore velocità e dell' ultim' acqua che cade, e di quella che incomincia a cadere, e di quella che urta nella ruota, e si offerverà un proporzionato rallentamento di moto in tutto l'edifizio. E posto tutto ciò se vi faranno varj edifizj successivamente collocati l'uno sopra l'altro, e se per esempio nella fig. 145. sarà *DB* l'altezza della caduta superiore, quand' anche l'angolo *B*, a cui corrisponde la

ruo-

ruota, resti al disopra dell' orizzontale FN tirata per la sommità dell' alzata inferiore, potrà darsi benissimo il caso che il ringorgo si stenda sino in B , e che l'acqua s'alzi sotto alla ruota più che non farebbe se rimossa l'alzata potesse scorrere liberamente da F in M sul piano BR : e con ciò diminuendosi l'altezza della caduta libera da D in B si diminuirà pure l'urto e la velocità della ruota, e reciprocamente se alzata la chiufa MNa si troverà diminuita la velocità della ruota B si avrà una prova sicura che il ringorgo si stenda anche sopra l'orizzontale FN . La quantità del tratto ringorgato farà maggiore o minore secondo le circostanze particolari del corpo d'acqua, dell' inclinazione del fondo, e dell' altezza dell' ostacolo inferiore: e in qualunque caso proposto le sole sperienze potranno verificare se in un dato corpo d'acqua, e ad una data distanza dall' orizzontale tirata per la sommità dell' ostacolo, il ringorgo sia sensibile o no. Le controversie insorte a Roveredo mi hanno dato e l'occasione e il comodo di fare intorno a ciò le sperienze più precise ed autentiche.

Sotto l'alzata DB , che serviva per la ruota di un grande filatojo, era stata posta l'alzata Nm per l'uso consimile di un' altra ruota. Il fondo del canale in B restava superiore all' orizzontale FN per circa due once, e tre quarti del piede di Roveredo: l'orizzontale tirata per la sommità N andava a incontrare il fondo del canale BF alla distanza 84 piedi: ed era poco minore la distanza dei punti B , ed F . Il piede di Roveredo sta al piede di Parigi prossimamente come 12 ad 11. Si disputava se l'edifizio inferiore fosse di qualche pregiudizio al superiore: ed avendo io la commissione di appurare un tal fatto ho incominciato a riconoscere se veramente il limite del ringorgo sia l'orizzontale tirata per la sommità di un ostacolo opposto al libero corso dell' acqua. Ho fatto alzare di un' oncia e un terzo la chiufa MNa per modo che restasse ancora inferiore di un' oncia e $\frac{2}{3}$ al fondo del canale in B . Poi chiuse le cateratte, e prese tutte le cautele possibili perchè in tempo delle sperienze non succedesse alcuna mutazione estranea nel corpo d'acqua, ne ho misurato l'altezza in un luogo dato tra B , ed F , e in oltre ho misurato il tempo che vi voleva perchè il filatojo connesso alla ruota superiore
fa-

faceffe 40 rivoluzioni: e ciò ne' due differenti ftati del folo oftacolo *MNa*, e dell' alzata accrefciuta. Le fperienze dell' altezza del corpo d' acqua, e del tempo delle 40 rivoluzioni del filatojo fuperiore in quelle due combinazioni dell' oftacolo ordinario, o accrefciuto fono ftate ripetute in differenti ftati d' acqua alta e bafsa, come dicefi a roggia piena, a mezza roggia, e a roggia fcarfa. Furono ancora fatte le fperienze abbaffando l' oftacolo, e l' efito fu come fegue.

ESPERIMENTO I.

Polto fulta chiuſa <i>MNa</i>	Altezza dell' acqua.	Tempo di 40 rivoluz.
l' obice di un' oncia, e un terzo.	once 17	min. 22 $\frac{1}{4}$.
Levato l' obice, e reſtando la ſola chiuſa.	16 $\frac{1}{2}$	21.

ESPERIMENTO II.

In altro ſtato d' acqua coll' obice di un' oncia, e un terzo.	16 $\frac{1}{2}$	20.
Colla ſola chiuſa ordinaria ſenz' obice.	16	18 $\frac{1}{4}$.

ESPERIMENTO III.

In altro ſtato d' acqua coll' obice.	21 $\frac{1}{2}$	19 $\frac{1}{4}$.
Senz' obice, e colla ſola chiuſa.	11 $\frac{1}{2}$	18 $\frac{1}{4}$.

ESPERIMENTO IV.

Colla ſola chiuſa ordinaria a roggia piena.	15 $\frac{1}{4}$	20 $\frac{1}{16}$.
Abbaffando la chiuſa d' once 2 $\frac{1}{4}$.	15	18 $\frac{1}{16}$.

ESPERIMENTO V.

A mezza roggia colla ſola chiuſa.	12 $\frac{1}{4}$	21 $\frac{1}{16}$.
Colla chiuſa abbaffata d' once 2 $\frac{1}{4}$.	11 $\frac{1}{4}$	20 $\frac{1}{16}$.

ESPERIMENTO VI.

A roggia ſcarfa colla chiuſa ordinaria.	11	20 $\frac{1}{4}$.
Abbaffata la chiuſa come prima.	10 $\frac{1}{4}$	20 $\frac{1}{16}$.

Queſte, e molte altre eſperienze conſimili ſono ſtate fatte l' anno 1770 a Roveredo in prefenza dei Giudici, e in tutt' i binarj delle ſperienze, che dovevano paragonarſi tra loro per riconoſcere le variazioni originate dalla ſola varierà dell' oftacolo, ſi ſono adoperate tutte le diligenze perche veniſſe ſomminiſtrata al canale la ſteſſa quantità d' acqua, e tutte le altre circonſtanze foſſero pari. Nei tre binarj del quarto, quinto, e ſeſto eſperimento le differenze delle altezze erano ſucceſſivamente di $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, e $\frac{3}{4}$ d' oncia, cioè in ragione

Meccanica,

I i i

dei

dei numeri 5, 4, 2. La differenza del tempo di 40 rivoluzioni nel quarto esperimento era di un minuto e 26 secondi in minuti 18, e secondi 56, cioè di più di sette centesimi di cinque centesimi nel quinto esperimento: e di meno di tre centesimi nel sesto. Però essendosi io richiesto dall' Eccelsa Reggenza dell' Austria Superiore se per ragione della chiusa dell' inferiore edifizio ne venisse all' edifizio superiore qualche danno, e quale; ho risposto precisamente che il danno cagionato dall' edifizio inferiore nel superiore, in parità di tutte le altre circostanze, era di circa un settè per cento in tempo di roggia abbondante, di un cinque per cento in tempo di mezza roggia, e di un tre per cento in tempo di roggia bassa.

Da tutte queste sperienze si raccoglie ancora generalmente che il ringorgo cagionato in un canale, o in un fiume per l' opposizione di qualche chiusa si stende oltre i limiti dell' orizzontale tirata per la sommità della chiusa medesima. Non è da trascurarsi quest' avvertenza nei canali che servono per dar moto ai mulini, filatoj, ed altri edifizj successivamente disposti l' uno dopo l' altro. Nei fiumi torbidi, e maggiori nell' erezione di qualche chiusa vi sono altre considerazioni da fare. Polchè trattentata l' acqua nell' angolo della chiusa col fondo primitivo del fiume vi si devono facilitare le deposizioni delle ghiaje, e delle altre materie piccole e grosse: e riempito che sia tutto l' angolo, e continuando a discendere insieme alle acque delle altre materie simili, e queste non ritrovando più innanzi alla chiusa la primiera, e necessaria pendenza, vi si devono ammucchiare sopra: e così pure queste altre deposizioni devono servire di appoggio a quelle, che continueranno successivamente a discendere. Il riempimento dell' angolo, e il successivo rialzamento del fondo è una conseguenza diretta di quanto si è detto sopra intorno alla natura dei fiumi torbidi. La difficoltà sarebbe di assegnare i limiti di tutto il rialzamento, il che cercheremo di fare nel capitolo susseguente.

C A P O N O N O .

DEGL' INTERRAMENTI CAGIONATI DALLE CHIUSE,
E DELLE CONTROVERSIE DELLA FERSINA.

IL Guglielmini nel Capo XII. asserì, che alzandosi il fondo di un fiume sino a tutta l'altezza della chiusa deve dare occasione ad un simile e proporzionato alzamento nelle parti superiori, e che così tutto il fondo superiormente alla chiusa deve ritornare col tempo alla primiera declività. Il che se si dovesse intendere a rigore, porterebbe in conseguenza che la linea del nuovo fondo dovesse tirarsi dalla sommità della chiusa all' insù parallelamente al fondo vecchio: per esempio che alzata una chiusa di 10 piedi tutto il fondo superiore del fiume, e per conseguenza anche il fondo degl' influenti sino all' origine o vera o equivalente si dovesse pure rialzare di 10 piedi: effetto che certamente non si è avuto in alcuna delle chiuse fabbricate anche ai giorni nostri in tanti luoghi d'Italia. Questo delicato argomento s'incominciò a dibattere tra il Grandi, ed Eustachio Manfredi coll' occasione delle controversie insorte per una pescaja, che volevasi alzare sul fiume Era. Credette il Grandi che alzata una chiusa in qualche fiume vi si dovesse alzare il fondo con una continuata degradazione dalla chiusa medesima sino all' origine del fiume: cioè che posta la chiusa *MN*, fig. 146, e il fondo primitivo *MF*, la nuova linea del fondo non dovesse essere *Nf* parallela ad *MF*, ma *NF*. Qui cominciò il Manfredi ad osservare che la pendenza del fondo è data, e determinata in qualunque fiume quando sia dato il corpo d'acqua, e data la quantità delle materie portate insieme coll' acqua: e che però non mutandosi nè le materie, nè il corpo d'acqua, non è possibile che colla fabbrica d'una chiusa si venga a mutare la pendenza del fondo passando da *FM* ad *FN*, e così divenendo minore, come porta l'ipotesi del Grandi. Seguendo il filo delle teorie già esposte sopra, considerando il rallentamento del corso che deve averfi per l'opposizione di qualche chiusa, e supponendo che la velocità innanzi alla chiusa dipenda intera-

mente dalla caduta superiore, egli è vero che il nuovo fondo si dovrebbe stabilire a poco a poco in una linea parallela al fondo vecchio, e tirata per la sommità della chiufa. Ma vi è ancora un altro elemento che necessariamente influisce nella velocità delle acque superiori: cioè l'accelerazione di quelle, che attualmente precipitano dalla chiufa, e che per la tenacità delle parti si stende, e si comunica alle altre, che non vi sono ancora arrivate. Considerato quest' altro elemento la nuova cadente del fondo dovrà incominciare a tirarsi all' insù parallelamente alla cadente primitiva, non dalla sommità della chiufa, ma da quell' altro punto superiore, dove incominciano le acque a maggiormente accelerarsi per l'azione di quelle, che già precipitano liberamente da tutta l'altezza della chiufa.

Questo in sostanza è il parere prodotto già dal Manfredi in occasione delle controversie accennate, e poi spiegato più diffusamente da' Sigg. Zanotti, e Baciatti nel secondo tomo degli atti dell' Accademia di Bologna. Così il problema della cadente, a cui si deve conformare il fondo di qualche fiume per la fabbrica di una chiufa, si riduce a trovare il termine dell' accelerazione ragionata dalla discesa libera, e poi a tirare da quel punto all' insù una linea simile, e parallela alla cadente del fondo vecchio fino all' origine vera del fiume, o fino a quell' altra chiufa, o sostegno che interrompa superiormente la continuazione del corso, e che si abbia perciò a considerare come l'origine equivalente del fiume. Suppongo adunque che alzata la chiufa MN sul fondo FM le acque incomincino in p ad accelerarsi prima di arrivare al ciglio N della chiufa; la linea del nuovo fondo sarà pP , parallela bensì ad MF , ma sempre inferiore ad Nf : e così per l'opposizione di qualche chiufa si avrà bensì qualche elevazione del fondo superiore del fiume, ma non si avrà mai una elevazione che uguagli l'altezza della chiufa. L'interrompimento di tutto lo spazio $FMNpP$ ricercherà una porzione delle materie, che altrimenti dovrebbero ricadere nel fondo inferiore alla chiufa. Ma riempito che sia questo spazio dovrà continuare il fiume a spingere sul fondo pP , e trasportare oltre la chiufa MN le ghiaie, e le altre materie che sopravverranno di nuovo nelle piene.

Però

Però è un inganno di credere che interrompendo il letto di qualche fiume con varie chiuse si possano trattenere tra i seni delle montagne i sassi le ghiaie le altre materie grosse, e che si possano così impedire gl' interramenti del letto inferiore, e prevenire i pericoli degli argini delle pianure. Tutto il vantaggio per questa parte non può essere che temporaneo. Il Guglielmini ha già fatto quest' avvertenza nel Capo XII. sulla natura dei fiumi: e quand' anco il nuovo fondo per l' erezione della chiufa MN dovesse accomodarsi alla cadente *fN*, vi vorrebbe bensì più tempo, ma riempito che fosse tutto lo spazio *fNMF* continuerebbe il fiume a portare oltre la chiufa e sassi e ghiaie come prima. Il Manfredi nelle sue annotazioni ha eccettuato il solo caso che i sassi e le ghiaie del fiume vengono dalle falde delle montagne laterali dirupate in tempo di pioggia, e che l' alzamento della chiufa e del fondo superiore del fiume sia tanto grande che arrivi ad assicurare le stesse falde, e prevenirne il maggiore dirupamento. Il Viviani che avea progettato di fabbricare tante chiuse nell' Arno, e negl' influenti principali per impedire il trabocco delle ghiaie del tronco superiore nell' inferiore, come si è detto nel Capo IV., soggiugnendo che poi le chiuse dovevano di tanto in tanto portarsi a maggiore altezza, ha fatto abbastanza comprendere che veramente non ne sperava se non un utile temporaneo. Tutte queste dottrine, quantunque già esposte da Autori, e in opere così celebri, non erano state ancora ben avvertite e considerate da quelli, che prima di me aveano scritto sui vantaggi e i pericoli, che potevansi prevedere alzando maggiormente la grandiosa chiufa o ferraglia già fabbricata sopra il Torrente Fersina, nel luogo di Pontalto, vicino a Trento. Essendo io incaricato nell' anno 1773 di esaminare quest' altra controversia, dopo di avere riconosciuto da me medesimo e la chiufa e il Torrente, vi ho fatto l' applicazione delle teorie e dei principj antecedenti.

La Fersina sorge tra le Alpi del Tirolo dal piccolo lago di Nardemol, e dopo di essere corsa per alcune miglia tra i seni delle montagne, e di essersi ingrossata coll' unione di varj influenti, sbocca nel piano di Pergine, e vi corre arginata alla distanza di circa un miglio dalle Paludi, che comunicano col lago di Caldò-
nazzo,

nazzo, onde ha origine la Brenta. Passato il piano di Pergine s'interna nuovamente la Forcina tra le montagne: poi sceso al luogo di Pontalto si restringe di sotto fino a pochi piedi di larghezza, e si precipita da una chiusa dell' altezza di 82 piedi di Tifento, che sono circa 90 piedi di Parigi: e finalmente dalle angustie delle montagne passa nel piano di Trento, e con un letto assai spazioso va a sboccare nell' Adige poco lontano dalla Città. La chiusa fu incominciata nel 1547 a fine di provvedere che il Torrente scendendo dal piano superiore all' inferiore con tanta differenza di livello non scavasse il fondo maggiormente, e non facesse dirupare le falde dei monti vicini, e le abitazioni che vi si erano fabbricate sopra. Ma quella prima chiusa, ch' era costrutta di soli legnami e poco ferma, fu portata via dall' impeto d' una piena cinque anni dopo. Ve ne fu poi sostituita un' altra di pietre tutte murate, che rese per 42 anni, e in tempo di un' altra piena ebbe la stessa sorte della prima. Dopo di ciò il torrente si lasciò correre senz' alcun segno fino all' anno 1600, e in seguito si prese il partito di fabbricarvi due differenti chiusi alla distanza di circa un miglio l' una dall' altra: e si credette che in questo modo si potessero arrestare le materie più grosse nel tronco superiore, e preservare il tronco inferiore. Ma in pochi anni una chiusa si trovò affatto sepolta nelle deposizioni del torrente, e l' altra chiusa, ch' era molto più alta, non arrivò ad impedire che inferiormente non traboccassero le materie istesse di prima.

La chiusa di Pontalto fu rifabbricata di nuovo nel 1612, e dopo varie mutazioni, e restaurazioni fu quasi interamente distrutta nella piena del 1747. Sugli avanzi di essa s' incominciò a fabbricar quella, che ancora sussiste presentemente, e ch' è di circa 90 piedi Parigini di altezza. Il lavoro fu diretto dal celebre Ferracina, e fu terminato nel 1752. Ma il Ferracina avea tutto l'ingegno per la migliore esecuzione di un lavoro proposto, e non avea studj e cognizioni bastanti per immaginare il lavoro migliore, e saperlo proporzionare al bisogno. Si è già avvertito in un altro capitolo che l' edificio diretto a Limena dal Ferracina per la derivazione della Brentella dalla Brenta, o come chiamasi volgarmente i Colmelloni di Limena, sono costrutti colla maggiore solidità, ma non essendo ben regolati, e pro-

e proporzionati al bisogno hanno portato in conseguenza il maggiore incremento del tronco inferiore della Brenta, e le più soavi inondazioni di Padova. La chiusa di Pontalto fu fabbricata di pietre grandi, quadrate, e incastrate solidamente nei due opposti lati del monte. Ma quando credevasi con tal lavoro di preservare il tronco inferiore della Ferlina da un maggiore interrimento, in poco tempo si trovò riempito l'angolo della chiusa, e il nuovo fondo arrivò a spianarsi sulla stessa orizzontale tirata dal ciglio della caduta, e continuò il torrente a portare più oltre e ghiaie e sassi ed altre materie grosse. Io nel visitare quei luoghi ho ritrovato che per circa un quarto di miglio sopra la chiusa non arrivava a pareggiarsi col ciglio suddetto che il fondo di un canale non molto largo, in cui decorrevano tutte le acque, quand' eran basse. Tutto il resto del letto, che ivi è affai largo, si trovava coperto di ghiaja e di grossi sassi sino all' altezza di 10, 15, e in qualche luogo ancora di 20 piedi sopra il fondo del canale contiguo, e sopra l'orizzontale tirata per la sommità della chiusa. Il letto inferiore del torrente in vicinanza di Trento si trovava rialzato di alcuni piedi sopra il piano della campagna, e si erano resi più frequenti negli ultimi anni le rotte, e le inondazioni qualche volta erano arrivate sin dentro alla Città.

Non si potrebbe addurre un esempio più grandioso, ed autentico del piccolo è breve vantaggio che può sperarsi dalle chiuse per liberare i fondi inferiori dal precipizio delle ghiaie: e quest' esempio medesimo dovea far deponere l'idea di maggiormente rialzare la chiusa di Pontalto. Ciò non ostante essendosi proposto di rialzarla per 30, e 60 piedi, e anche più, e dovendo io dire che danni, e che vantaggi se ne dovessero aspettare, ho detto primieramente che il trabocco delle ghiaie non si farebbe impedito se non per tutto quel tempo che vi voleva a colmare la cavità compresa tra la chiusa rialzata, e il fondo presente: il qual tempo, considerata la quantità delle materie che riceve la Ferlina da' suoi influenti e dalle falde dei monti contigui, non potendo essere molto lungo, si farebbero avuti novamente nel tronco inferiore i danni e i pericoli di prima. E rispetto al tronco superiore ho incominciato a riflettere che quando

il

il fondo innanzi alla chiufa si fosse rialzato, arrivandovi le acque, e ritrovandovi una pendenza minore di prima, si farebbero rallentate di corso, vi avrebbero lasciato delle nuove deposizioni, e queste servendo successivamente di appoggio ad altre, ed altre materie avrebbero occasionato un successivo rialzamento fin dove l'alveo del torrente è continuato in un tronco solo.

Per applicare più precisamente a questo caso i principj, e le teorie antecedenti ho osservato che da Pontalto andando in sù per tre, e per quattro miglia fin oltre al piano di Pergine non ha la Fersina alcun altro interrompimento, e non presenta agli occhj che un tronco unico e solo. Ho osservato ancora che alcune centinaia di passi sopra la chiufa allargandosi moltissimo il letto della Fersina, e dovendovisi diminuire proporzionatamente la velocità delle acque anche in tempo di piena, non vi era da sperare che l'accelerazione originata dalla caduta susseguente per tutta l'altezza della chiufa si avesse a stendere molto all' insù. Posto adunque che l'azione delle acque inferiori non si potesse stendere superiormente oltre l'orizzontale tirata per la sommità della nuova chiufa, dentro il quale spazio col rialzamento della chiufa succederebbe qualche rialzamento di fondo, posto che dove finisse di stendersi l'azione suddetta si avesse il rialzamento di qualche piede, senza di che sarebbe affatto inutile la speranza di preservare neppure per qualche tempo il piano inferiore dal trabocco delle ghiaje; ho preannunziato che si avrebbe pure il rialzamento di qualche piede continuatamente sino al piano di Pergine, dove essendo già tanto difficile la custodia degli argini, essendo tanto maggiore la declività verso le paludi e il Lago di Caldonazzo, onde ha origine la Brenta, essendo già seguito il caso di vedere che rotti gli argini tutto il torrente deviasse da quella parte, non ho trovato neppure troppo rimoto, ed irragionevole il timore che portando a maggiore altezza la chiufa di Pontalto; e col maggiore alzamento del fondo rendendosi più frequenti e più perniciose le rotte, non si venisse finalmente a rivolgere la Fersina nella Brenta.

Queste ed altre consimili considerazioni avendo fatto deporre il pensiero di rialzare maggiormente la chiufa, ed essendo pur necessaria

faria qualche provvidenza per la pianura inferiore, e per la stessa Città di Trento; ho riguardato come un' impresa troppo rischiosa quella di restringere il torrente sotto alla chiusa, dove così difficilmente si contiene adesso tra gl' argini, e di restringerlo tanto, e accelerarlo tanto di corso, che potessero le acque staccare dal fondo; e trasportare nell' Adige le materie da tanto tempo ammucchiate, e mantenersi un alveo bastantemente incassato nel piano della campagna. Ho adunque proposto che dove la Fersina esce dai seni delle montagne, ed incomincia a scorrere nel piano di Trento si deviasse interamente dal presente suo letto, e si portasse con un nuovo alveo più lontano dalla Città, e al piede delle colline, sino a sboccare in un punto inferiore dell' Adige. I terreni più bassi per cui si condurrebbe il nuovo alveo, l' abbreviazione del corso, l' accrescimento della pendenza, la maggiore felicità dello sbocco, che potrebbe ottenersi, tutto mi farebbe sperare l' esito più felice dell' opera: e per qualunque accidente d' una piena straordinaria il letto presente della Fersina servirebbe di contrargine, e di difesa per la Città, e per tutto il piano di Trento, e vi toglierebbe affatto il pericolo di qualsivoglia inondazione: Questo in sostanza è il progetto, che ho proposto dieci anni fa, e di cui potevano ricercare qualche succinta informazione in questo libro gl' Idrometri.

CAPO DECIMO.

DEI DIVERSIVI DELLE PIENE, DELLE ROTTE, E DEI RIPARI DEI FIUMI.

NEi secoli più rozzi fermandosi sulle prime apparenze i primi osservatori dei Fiumi credettero facilmente che si potesse diminuire l' altezza delle piene e il pericolo delle rotte deviando altrove una porzione delle acque sovrabbondanti: e così quelli che proposero di diramare il Gravelone dal Tesino, la Brentella dalla Brenta, l' Adigetto, e il Castagnaro dall' Adige si lusingarono di migliorare con ciò il sistema di que' Fiumi. Vi voleva un giudizio più lento e più maturo per comprendere che colla quantità

Meccanica,

K k k

d'ac-

d'acqua diminuendosi ancora la forza di spingere più lontano le ghiaie le arene e le altre torbide portate insieme coll' acqua, si devono facilitare le deposizioni e gl' interramenti del fondo: che in progresso di tempo col succeduto rialzamento del fondo devono farsi più pericolose le piene: e che anche il sollievo temporaneo d'incominciare a rivolgere nei canali più bassi una porzione delle piene deve avere il compenso vantaggioso, che colla divisione delle acque diminuendosi la velocità, deve crescere proporzionalmente l'altezza. Gli ultimi tronchi del Pò, e dell' Adige principalmente ci danno una prova sicura dell' inutilità, e dei danni dei diversivi. Mentre il Pò grande con tutto il corpo delle sue acque si mantiene l'alveo più regolare più incassato fra terra e più libero, nè cagiona mai le rovine, e gl' inconvenienti dell' Adige, eh' è impoverito da tanti diversivi. Sono tanto più frequenti i casi delle rotte dell' Adigetto, e dell' Adige: vi si rendono sempre più difficili gli scoli delle campagne e delle valli, nè si porterà mai un sicuro rimedio ai mali ed ai pericoli presenti se non quando con un colpo più ardito si torneranno le acque ad unire in un alveo solo.

Il Castelli fu il primo che nel corollario XIII. del suo libro sopra le acque correnti facesse osservare che il sollievo portato dai diversivi e dai tagli si riduce a poche ore, e che un tale vantaggio non è punto da valutarli nelle piene dei Fiumi, che durano per molti giorni. L'osservazione principale del Castelli è assai precisa ed autentica. In quei tempi credevasi di ritrovare qualche sollievo nelle piene maggiori del Pò, tagliando l'argine destro poco lontano da Ferrara, nel luogo detto il Bondeno, e lasciando traboccare le acque negli alvei vecchj di Primaro, e di Volano. Le acque vi sgorgavano veramente a principio con grandissima furia, e in poche ore vi si vedeva scemare il Pò di circa un piede di altezza. Ma appena riempito il vecchio alveo di Ferrara, non ritrovandovi le acque la necessaria pendenza, si rallentavano di corso, e in poche ore tutto il Pò ripigliava l'altezza medesima di prima. In tanto i terreni vicini ai due rami di Primaro, e di Volano si mettevano in un rischio grandissimo, andavano sempre più interrandosi le valli inferiori, e le campagne restavano senza scoli. La continuazione dei danni, e la
bre-

brevità dei primi vantaggi ha poi fatto tralasciar per sempre quel taglio sino dall' anno 1638.

Il Guglielmini nel Capo XII. del libro sulla Natura dei Fiumi confermò la stessa opinione del Castelli intorno al poco utile che portano i diversivi per la poca quantità d'acqua che levano in proporzione di tutta l'acqua del Fiume. Eustachio Manfredi consultato sopra alcuni diversivi, che volevansi aprire sulla diritta del Fiume Serchio, li disapprovò tutti come inutili e pericolosi. Così pure il celebre Sig. Perelli disapprovò i diversivi progettati nel torrente Maroggia, e produsse l'esempio dei due diversivi fatti aprire dal Viviani nel fiume Celone, uno degl' influenti della Chiana, i quali cagionarono in poco tempo l'interramento e la perdita del tronco principale del Fiume. Il Sig. d'Alembert nel Dizionario Enciclopedico all' articolo Fiume si esprime più precisamente dicendo, che può impedirsi l'inondazione di un Fiume più tosto con farvene entrare un altro, che con aprirvi un diversivo. Questo paradosso Idrostatico è una conseguenza di tutto ciò che si è detto nel Capo III. del Libro I. di questa seconda Parte. Gli esempj delle inferiori diramazioni del Pò, e del Tevere non possono avere eccezione alcuna: e a tutti gli altri esempj addotti in quel capitolo potrei aggiugnere ancora un' osservazione mia propria. La notte dopo il giorno 14 di Novembre dell' anno 1761, mentre io mi trovava in Pisa, sopravvenne una gran piena d'Arno, e continuò con piccole variazioni sino alla sera del giorno 15. Anticamente nelle piene maggiori si costumava di tagliare l' argine sinistro d'Arno sette miglia al disopra di Pisa nel luogo delle Fornacette, e con ciò si credeva di preservare la Città dal pericolo d'una inondazione. L'esperienza aveva già tolti molti da quest' inganno: così nella piena del 1740, essendosi fatto il solito taglio, non si accorsero in Pisa di alcuna diminuzione della piena, quantunque fossero seguite nel tronco superiore d'Arno diverse rotte. La sera del giorno già detto si fece nuovamente aprir l' argine delle Fornacette nella larghezza di circa otto braccia, e dall' impeto delle acque, che vi sgorgavano, il taglio fu presto ridotto alla larghezza di braccia 30. Ciò non ostante seguì ancora a crescere in Pisa la piena, e verso la mezza notte susseguente arrivò alla massima al-

K k k 2

tazza,

tezza, che si fosse veduta mai fino allora, e solamente verso la sera del giorno 16 incominciò a cedere, ed ebbe poi in poche ore il suo termine.

I diversivi delle piene devono riguardarsi come tante rotte artificiali, e producono i medesimi effetti d'una repentina diminuzione della piena nel tronco superiore del fiume per la deviazione dell'acqua che dalle aperture degli argini sgorga sui terreni inferiori. La facilità dello scarico contribuisce all'accelerazione del corso, e la velocità accresciuta porta per conseguenza una maggiore escavazione nel fondo, ed una maggiore corrosione nelle ripe, come il Guglielmini nel Capo X. ha detto che si osserva principalmente nelle rotte che si chiamano in cavamento, cioè in quelle nelle quali la sponda è corrosa e portata via fino al fondo del Fiume. Ha poi soggiunto in quel luogo il Guglielmini che quando cominceranno a riempirsi i cavi, e ad inondarsi i terreni nei quali scaricossi una parte della piena, oppure quando le alluvioni cominceranno a formare le sponde all'acqua corrente nella rotta, anche gli effetti medesimi cominceranno a mancare, e perciò il pelo delle piene comincerà ad elevarsi, il fondo escavato ad interrarsi, e a ritardarsi il corso dell'acqua. E finalmente ha notato lo stesso Autore che sotto al luogo della rotta diminuendosi insieme la quantità e la velocità dell'acqua si devono fare delle deposizioni, e queste servendo d'intoppo all'acqua sopravveniente devono contribuire al rialzamento del fondo anche nel tronco superiore. Queste, che sono conseguenze assai semplici dei principi più generali di tutta l'Idrodinamica, dovrebbero bastare per alienare gli Architetti d'acque dai progetti d'aprire dei nuovi diversivi, e per ritenere i proprietari delle terre da qualunque tentativo di far tagliare gli argini opposti di un fiume in tempo di piena, come molte volte si è fatto sulla falsa credenza che il danno altrui potesse in somiglianti casi portare la propria sicurezza e utilità.

Le rotte dei Fiumi possono succedere in quattro maniere differenti: o perchè il filone battendo direttamente nell'argine arrivi a scomporlo, ed aprirlo: o perchè avanzandosi a poco a poco la corrosione, ed intaccandosi l'argine interiormente non possa esso più reggere al proprio peso: o perchè ricadendo l'acqua esteriormente dal ciglio dell'argine, e formandovi un gorgo al piede, faccia cadere tutto

tutto l'argine all' infuori: o finalmente perchè imbevendosi d'acqua tutta la terra, di cui è formato l'argine, e scomponendosi internamente, perda la consistenza necessaria per reggere alla pressione, ed all' impeto del Fiume. Il trabocco delle acque dal ciglio superiore degli argini, e lo scioglimento delle materie che lo compongono, è un caso più raro. Il rovesciamento degli argini per l'urto di tutto il filone del Fiume non è un caso così raro, ed è sempre più da temersi nella maggiore veemenza delle piene. Ma il caso più ordinario e frequente si è che la corrosione si avvanzi a poco a poco al piede interiore dell' argine, e che scalzandolo ne cagioni la rovina. Queste sono le rotte, di cui trattò più diffusamente il Guglielmini nel luogo sopracitato, e che sogliono succedere nel calare della piena: poichè nel colmo di essa la pressione delle acque serve a sostenerlo in qualche modo il terreno, e per lo contrario sul fine della piena, mancando ogni contrasto al fianco dell' argine, e non essendovi sostegno al piede, bisogna necessariamente che rovini. E così ancora il Zandrini nel Capo IX. riferì, che viaggiando da Pavia al Mare, nel cedere della piena del 1719, vedevansi cadere gli argini in molti luoghi per la lunghezza di molte pertiche. Il pericolo d'ogni rotta può prevenirsi colla migliore costruzione degli argini: e dove si ha già l'urto diretto del filone negli argini, e dov' è già avanzata la corrosione delle ripe, può prevenirsi il pericolo d'una rotta deviando il filone del Fiume, o procurando che arrivi a percuotere più obliquamente le ripe e gli argini.

La terra comune è tanto migliore per formar gli argini quanto è più tenace ferrata e unita nelle sue parti, e quanto più difficilmente può imbeverarsi d'acqua ammolliersi e disciogliersi. Le arene essendo tanti corpicelli ramosi e acuminati, per la stessa loro conformazione non si possono ferrare insieme talmente, che non lascino all' acqua degl' interstizj assai liberi per penetrarvi. La creta qualunque sia composta di parti più compatte, e asciugandosi acquista una maggiore consistenza, ha però l'inconveniente di sciogliersi facilmente coll' acqua. L'argilla è una terra più consistente, che ha insieme il vantaggio di non lasciare negl' interni meati un adito libero all' acqua, e di asciugarsi col tempo e d'indurirsi. In Olanda dove

dove la terra comune è bituminosa, e assai più porosa della nostra si foggiono gli argini sopravvestire di argilla. Le grandiose dighe, che si sono opposte in Olanda alla furia del mare Settentrionale, hanno alla base un grosso strato di mattoni, e di calcestruzzo: sono superiormente coperte di grosse pietre, i vuoti delle quali si trovano riempiti di calce, e di altre pietre minori: e sono tanto lentamente declivi che in qualche luogo l'altezza è alla base come uno a tredici. Altre grandiose dighe si sono pure costrutte in questo secolo nella Zelanda sulle spiagge dell' Oceano, dove restano interrotti quei grossi ammassi di sabbia, che costeggiano tutto il lido occidentale, e che volgarmente si chiamano Dunne. Hanno quelle dighe tre perliche Olandesi di altezza sopra trentacinque di base. Dalla parte di Delft in Olanda mi hanno fatto vedere un argine tutto di argilla, di circa dieci piedi di altezza, che supera di quattro piedi le massime escrescenze delle acque.

Gli argini dei Fiumi si fanno terminare dalle due parti in un piano inclinato, che volgarmente chiamasi scarpa, non solamente perchè restino così fiancheggiati, e siano più consistenti e sicuri, ma ancora perchè nel caso d' una straordinaria escrescenza non possa l'acqua traboccarvi a piombo, e formarvi al piede esteriore dei vortici e dei gorgi. Tra di noi per ogni piede di altezza si suol dare ordinariamente un piede di scarpa, onde l'angolo della base dell' argine col fianco sia semiretto: e qualche volta ancora si dispongono i fianchi ad un angolo più acuto, e per ogni piede di altezza si dà un piede e mezzo, due piedi, e anche più di scarpa. Intorno a ciò non può darsi alcuna regola generale. Generalmente si può avvertire che la pendenza della scarpa bastante per un argine di poca altezza, per esempio di quattro o cinque piedi, non basta più quando anco restano pari tutte le altre circostanze debba l'argine salire all' altezza di otto, dieci, e più piedi. La ragione è la stessa, con cui ha spiegato il Galileo come le macchine, che qualche volta si reggono in piccolo, cedono poi quando siano trasportate più in grande fuori di certi limiti: e la ragione si è che le spinte crescono in una ragione assai maggiore di quella delle semplici resistenze.

Nel problema decimoquarto del libro terzo si sono spiegate le leggi

leggi generali dell' urto, e della forza esercitata dai fluidi contro di un piano orizzontale, e verticale, e si è detto che la forza, con cui viene percosso direttamente un ostacolo, si fa minore nella ragione istessa con cui viene a diminuirsi l'angolo d'incidenza, e che la forza con cui viene deviato il fluido nella direzione parallela al piano, che se gli oppone, è la maggiore di tutte quando l'angolo d'incidenza è semiretto. Questa è la regola più generale che può suggerire l'idraulica intorno alla maniera di collocare i pennelli, i gabbioni, e gli altri ripari delle corrosioni dei Fiumi. Le regole pratiche per fare i gabbioni, gettarli nell' acqua, stabilirveli e ripararli, sono state indicate dal Zendrini nel Capo XL, e non occorre qui di trascriverle. E poi non si può dare neppure alcuna regola generale intorno alla maniera di riparare le corrosioni dei Fiumi. Le circostanze particolari dei Fiumi, e delle corrosioni possono suggerire i rimedj più opportuni da prendersi, e molte volte gli accidenti improvvisi che sopravvengono rendono inutili le providenze più savie che si son prese. Nell' Arno, e nel Serchio si riparano le corrosioni con una continuazione di grosse pietre sparse sulle ripe corrose. Le corrosioni del Tesino si riparano con grossi massi di pietre e di macigni pesanti, collegati insieme, e prolungati molto nel Fiume. I grandiosi pennelli fabbricati a Piacenza per opera del Guglielmini sulla riva del Pò, sono tutti di cotto, e sortono dalla riva ad angolo retto, e poi verso la punta si piegano ad angolo acuto a seconda della corrente. I pennelli proposti dal Sig. Ab. Lecchi per fermare le corrosioni del Pò a Cremona furono formati di grossi gabbioni di vimini, e posti ad angolo acuto colla ripa inferiore. I gabbioni tessuti di lunghi rami di albero uniti insieme e ripieni di mattoni, di sassi, e di terra, si adoperano più frequentemente sul Pò, le cui acque essendo torbide possono più facilmente interrare, e rendere più consistenti i ripari. In molti luoghi i ripari sono di semplici fascine, di tronchi, e di rami di alberi lungamente sparsi e intrecciati insieme sulla ripa corrosa.

La scelta dell' uno, o dell' altro genere di lavori dipende dall' esaminare se sia meglio di ripartire uniformemente tutta la resistenza per tutta l'estensione della ripa corrosa, oppure di riunirla e concentrarla solamente in alcuni luoghi, come succede nei pennelli.

L' in-

L'inconveniente ordinario dei pennelli proviene dai gorgi e dai vortici, che facilmente vi si formano al piede alla punta e intorno all' intestatura, non solamente per l'acqua che vi urta direttamente, ma ancora per quella che vi ricorre dalla parte inferiore, e che variamente ribattuta dai lati rivolge la direzione rettilinea in circolare. I vortici si formano anche più facilmente, e sono d'una forza maggiore intorno a tutti gli ostacoli, che sono posti a piombo, o poco fuori del perpendicolo, come sono le palificate che si costuma di fare in diversi luoghi del Pò, e di altri Fiumi. Un riparo di fascine, e di sassi, che per tutta la sua lunghezza scendesse con pendenza uniforme a incontrare ad angolo acuto il fondo del fiume, farebbe esente da simili inconvenienti. La più grand' opera di questo genere, che m'è occorso di vedere è la gran fascinata, che a' giorni nostri ha raffrenato l'impeto della Mosa sotto alle mura di Rotterdam. Ma in altri luoghi ho trovato che il maggior impeto della corrente avea incominciato a scomporre le parti di simili ripari, e toltane la continuazione li avea renduti inutili. Facendo che tutto il riparo discenda a scarpa coll' obbliquità dei due lati, e che formi un angolo ottuso non solamente col fondo anteriore, ma ancora colla linea superiore della ripa, come si è detto sopra, vi si può prevenire il pericolo dei vortici e gorgi d'acqua, e col rallentamento del corso si possono ancora facilitare le deposizioni delle materie terree, e con esse maggiormente assodare tutto il lavoro. In questa maniera però quantunque resti assicurata la ripa dalla parte anteriore, non si arriva ancora ad impedire che l'acqua trattenuta al lungo di un pennello, non prenda poi un corso più violento alla punta, e ripiegandosi dietro di esso non formi degli altri vortici, che arrivando sino alla testa del pennello medesimo, lo staccano a poco a poco dalla ripa, e lo lasciano isolato ed esposto a tutta la furia della corrente.

Questa è la ragione principale, per cui molte volte non riescono di molta durata anche i pennelli fabbricati con maggior arte, e per ciò oltre alla forma, ed alla direzione da darsi ai pennelli importa moltissimo che siano fortemente intestati ancora colla ripa inferiore. Intorno alla situazione precisa, e alla distanza, in cui devono collocarsi i pennelli vi sono altre considerazioni da fare. In primo luogo si de-

si devono incominciare i pennelli dove incomincia la corrosione, e non dov'è già notabilmente avanzata, e gli altri pennelli si devono ripartire in tal distanza, e in tal numero sotto del primo, che dove finisce l'azione dell'uno incominci l'altro ad agire, per modo che tutti si sostengano e reggano insieme, e contribuiscano a deviare a poco a poco e continuamente tutto il filone. Qualche volta non è necessario di continuare per ciò i ripari al lungo di tutta la corrosione: mentre quando si arrivi una volta a deviare bastantemente il filone, si devono mutare tutte le ripercosse inferiori, e si devono portare in luoghi differenti da quei di prima. Neppure è necessario molte volte d'impegnarsi a fare dei ripari molto alti, e per conseguenza più esposti alla furia delle piene e meno consistenti e sicuri, come avvertì benissimo il Guglielmini nel Corrollario XII. della Proposizione VII. del Capo VI. Mentre defumendosi la direzione generale del Fiume da quella del filone, e la direzione del filone accomodandosi ordinariamente alla maggiore profondità, che qualche volta si può ridurre al livello di tutto il resto del letto con ripari anche bassi, per ciò a poco o a nulla serve il fabbricarli molto alti. Bisogna inoltre avvertire che la direzione del filone dei Fiumi molte volte è diversa in acqua alta, bassa, e mezzana. Perchè il filone non essendo determinato unicamente dalla concavità naturale del fondo, ma ancora dalle ripercosse laterali delle sponde, come si è detto nel Capo IV. del Libro I. di questa seconda Parte, e potendosi queste variare in differenti stati di un Fiume, bisogna che similmente venga a variarsi il filone. Di più in tempo d'acque alte succede che gonfiandosi qualche ramo asciutto in avanti, o arrivando le piene ad urtare contro di qualche ostacolo superiore al pelo basso, o mezzano, venga pure a cambiarsi notabilmente la direzione composta di tutto il Fiume. Osservando adunque se le corrosioni si formino, e si avanzino maggiormente in tempo di piena, oppure in tempo d'acqua bassa, o mezzana si potrà meglio proporzionarvi la direzione e la forma dei ripari.

LIBRO TERZO.

DEI CANALI NAVIGABILI,

PRINCIPALMENTE DI LOMBARDIA.

CAPO PRIMO.

DEGLI ANTICHI CANALI NAVIGABILI,

E PRINCIPALMENTE DI QUELLO CH' È DERIVATO

DAL TESINO A MILANO.

I Canali navigabili sono per le nazioni mediterranee ciò ch' è per le nazioni marittime la scienza della Marina. L'arte con essi è giunta a superare tutte le maggiori difficoltà, che la natura dei terreni, e dei Fiumi opponeva agli ajuti reciproci della società e del commercio. Le grandi navigazioni abbracciando tutto il globo si stendono agli oggetti maggiori dell' opulenza e del lusso. Le navigazioni dei piccoli canali servono a tutt' i minori comodi, in tutt' i tempi, e per qualunque ordine di persone. Le prime nell' ardua loro esecuzione ci presentano agli occhj uno degli sforzi più arditi dello spirito umano, ed hanno avuto bisogno di tutti gli ajuti delle Scienze Matematiche per essere portate a quel grado di perfezione, in cui sono presentemente. Le seconde non potendo essere molto difficili ad eseguirsi hanno però ricercato anch' esse per essere ben preparate i lumi e lo studio degli uomini più scienziati, e insieme tutta l' industria de' più abili artefici. Nei secoli più rozzi non si sono avanzate le opere di questo genere che molto irregolarmente, e per una serie di lunghi e moltiplicati tentativi. Le opere più difficili e meglio intese sono state il frutto della penetrazione e del sapere di Leonardo da Vinci, di Lorenzo degli Albizzi, dei Marefcialli di Vauban, e di Munich, di Belidor, Brindley, Smeaton, Ulloa ec. e i pratici volgari non ci hanno mai lasciato alcun' opera da paragonarsi

con

con quelle , che sono state dirette dai sopraddetti grandi uomini .

Gli antichi Egizj , che avevano fatto servire con tanto successo le acque del Nilo alla fertilità delle loro campagne , ed alla comunicazione delle Città , incominciarono ancora un canale per cui si potesse continuare la navigazione dal Golfo Arabico sino alla Città di Menfi , e nel Nilo , e sino al Mare Mediterraneo . Ma le testimonianze di Strabone , di Diodoro , di Erodoto , e le vestigia di quel canale riconosciute da molti viaggiatori non bastano per indicarne la traccia , che vi si è seguitata , e il modo con cui pensavasi di continuarvisi la navigazione : bastano solamente per assicurarci che veramente s'è incominciata dagli antichi Egizj quell' opera . Il genio guerriero e conquistatore degli antichi Romani non lasciò che promovessero le arti pacifiche , la navigazione , e il commercio in proporzione delle loro cognizioni e della loro grandezza . I progetti di Giulio Cesare di tirare una fossa da Roma a Terracina , e di tagliare l' Istmo di Corinto , la comunicazione di varj Fiumi proposta nei tempi di Nerone , le altre idee di Trajano di aprire un canale navigabile dal Lago di Nicomedia sino al Mare , non furono che semplici idee . Non era opera di grande impegno la fossa , con cui Cajo Mario faceva venire le provvisioni dal Rodano sino al suo campo vicino ad Arles . Gli antichi Romani ci lasciarono dei monumenti assai più gloriosi negli Acquedotti di Roma , di Lione , e di altre Città delle Gallie , nello sbocco aperto da Quinto Curio Ostilio al fiume Mincio nel Pò , nell' unione fatta da Emilio Scauro dei varj rami del Pò , e nell' asciugamento che se ne ottenne delle antiche Paludi di Parma , e di Piacenza .

Nel secolo terzo , e nell' Impero di Chi-t-su incominciassi alla Cina un canale , che congiugne i due fiumi Hoang , e Kiang . Tolto un piccolo traghetto , che conviene farvi per terra , la navigazione di quei due Fiumi è continuata con quel canale da Canton sino a poca distanza da Pekino : Città tra loro distanti più di sedici gradi di latitudine , che fanno più di 300 leghe di Francia . Il vantaggio di continuare la navigazione per un così lungo tratto è poi compensato dalla difficoltà , che in molti luoghi ha la navigazione medesima . Secondo le relazioni , che ce ne ha fatto il Nieuhoff , sembra assai

complicato il meccanismo, con cui le barche vi si fanno passare a livelli differenti, e dove la corrente è più rapida, e sembra che i sostegni della Cina siano a porte semplici, e non a porte raddoppiate, o come noi diciamo a gradino. I monumenti dei secoli più oscuri in Europa sono principalmente: la Fossa che fece tirare Odoacre dal Fiume Montone al Mare sopra Ravenna: il canale che i Mori condussero da Granata sino al Fiume Guadiana: il canale fatto incominciare da Carlo Magno per congiungere il Redito uno degl' influenti del Meno coll' Almus uno degl' influenti del Danubio, e per così continuare la navigazione del Meno sino al Mar Nero. I principali monumenti del secolo dodicesimo sono: il Canale del Tesinello derivato dal tronco superiore del Tesino sino al luogo di Abbiate per irrigare le terre inferiori del Pavese, come scrive il Sigonio nel Libro XIV. del Regno d'Italia all' anno 1179: i due Canali di Padova, dei quali si è già parlato al principio del Cap. VI. del Libro antecedente: e il Canale della navigazione di Bologna, e Ferrara, che per quanto scrivono il Vizzani, e l'Alberti sembra incominciato verso il 1221. Il Canale di Abbiate fu poi continuato sino a Milano l'anno 1257 per opera del Podestà Gozzadini, che in seguito fu ammazzato dal popolo, e strascinato dentro il Naviglio che avea fatto fare: e questo è un altro esempio da aggiungerli nella serie di tanti uomini benemeriti, che sono stati perseguitati e maltrattati in Italia.

Il Canale derivato dal Tesino, che a Milano si chiama il Naviglio grande, non essendosi dovuto condurre per luoghi molto difficili, nè avendo bisogno di alcun sostegno, presentava una maggiore difficoltà per essere diramato a principio da un fiume rapido e grande, che per essere continuato, come ha già avvertito il Sertala nel descrivere quel Naviglio. Il primo tronco del Naviglio è tirato a piede della costa del Tesino, ed è fiancheggiato dall' altra parte con un argine di pietra per la lunghezza di due miglia, e sono ripartiti in quell' argine gli opportuni scaricatori per rimandare le acque sovrabbondanti nel fiume. In seguito s'è dovuto condurre il cavo attraverso alla stessa costa, dov' è puramente arcuosa, e sino alla profondità di 40, e 50 braccia. Il resto del cavo è continuato nel piano della campagna. Tutta la lunghezza è di circa 86000 braccia, la-

lar-

larghezza all' imboccatura è di braccia 70, che si va poi restringendo gradatamente fino alle 20: la caduta totale è di circa 58 braccia, e secondo le antiche livellazioni la caduta è ripartita come segue:

Dalla bocca del Naviglio.	Distanza.	Caduta totale.	Caduta raggiagliata.
Sino al Ponte di Castano.	Br. 9195	Once 184 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{243}$ •
Indi al Ponte di Turbigo.	3025	48 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{711}$ •
Al Ponte di Paragnano.	3225	45 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{712}$ •
Al guado d'Induno.	4000	40	$\frac{1}{1800}$ •
Al Ponte di Mazenta.	16580	64	$\frac{1}{2600}$ •
Al Ponte di Robecco.	4215	63 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3000}$ •
Al Ponte della Cassinetta.	4000	60	$\frac{1}{6000}$ •
Al Ponte di Castelletto.	6045	90 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6100}$ •
Al Ponte di Gozano.	12840	74	$\frac{1}{10700}$ •
Indi sino a Milano.	22830	23	$\frac{1}{21200}$ •

Così la caduta, ch' è a principio in ragione di cinque braccia per miglio, si diminuisce gradatamente nelle prime dodici miglia, e si riduce ad un solo braccio per miglio, e poi torna a farsi maggiore nelle cinque miglia susseguenti, sino in ragione di più di quattro braccia per miglio. L'irregolare riparto della caduta è sempre un difetto di costruzione: e in questo caso è un difetto, che diminuendo tanto la pendenza del fondo, e rallentando il corso dell' acqua nel tronco di mezzo, contribuisce a farne decorrere nel tronco inferiore una quantità minore di quella che vi potrebbe arrivare se con una maggiore escavazione del fondo tra Induno e Mazenta vi si fosse ripartito regolarmente il di più di caduta che si è lasciata al difetto. I difetti e gli errori di costruzione, che nell' ignoranza di que' tempi si sono fatti alla prima imboccatura del Naviglio, hanno portato delle peggiori conseguenze, e dopo i varj tentativi di quasi due secoli non si sono potuti correggere che colla scorta di due uomini di sommo ingegno, e di un vasto e profondo studio, del Bassi, e del Pellegrini. Il Naviglio anticamente si diramava dal Tesino con una specie di sperone, che dalla sponda sinistra avanzandosi sin dentro il Fiume serviva come di partitore. Lo sperone fu prolungato gradatamente senza che mai si arrivasse con ciò a impedire che nelle maggiori piene del Tesino non si gettassero nel Naviglio dei grossi ammassi di ghiaie, che

che arrivarono a farvi mancare la navigazione. Qualche volta ancora è accaduto che per qualche deviazione seguita superiormente quasi tutto il fiume entrasse nel cavo del Naviglio rovinando gli argini e gli altri ripari. Finalmente dopo i danni accaduti nella piena del 7 Agosto del 1585, colla direzione di quei due celebri Architetti, coi quali fu delegato ancora l'Ingegnere Meda, si rifabbricò lo sperone con tanta solidità e consistenza, che ha poi retto alla furia delle piene successive.

Le altre circostanze del canale e del fiume esigevano delle altre providenze più singolari, e perchè mai non mancasse al canale la necessaria quantità d'acqua, e perchè non restasse interrotta la navigazione del fiume, e si potesse continuare liberamente dal Lago Maggiore fino al Pò. La serie delle providenze medesime è indicata nella figura 131, e ci presenta agli occhj la più bell' opera, che possa vedersi in questo genere. Anche dopo la fabbrica dello sperone la maggiore pendenza del fiume vi avrebbe tenuto sempre il maggior corpo d'acqua anche in tempo d'acqua più bassa, e le variazioni di filone, e di letto che sono tanto facili in un fiume di piene così grandi, d'alveo così spazioso, e che porta materie così grosse, avrebbero facilmente portato il caso di vedere asciutto il Naviglio. La maniera ordinaria di deviare costantemente una data quantità d'acqua da un fiume si è di attraversarlo dall' una all' altra sponda con una chiusa, che si alzi tanto sopra la foglia dell' emissario quanta dev' essere l'altezza del corpo d'acqua da derivarsi. In questa maniera però viene poi a interrompersi la navigazione del fiume. La chiusa o brida, con cui s'è attraversato il Tesino di fianco all' incile del Naviglio, e che nella fig. 132 viene segnata colle lettere *FD*, resta al livello medesimo della foglia dell' incile del Naviglio, e così lascia alle barche un libero passaggio nella bocca *FE*, che chiamasi di Pavia, anche in tempo di acque basse: e in vece di fare ringorgar le acque nel Naviglio da una chiusa più alta, si è cercato di volgerle in maggior copia da quella parte con tutti gli altri lavori, che si son fatti nella sponda opposta del Fiume. Il lavoro principale è segnato colle lettere *C,C*, e si chiama l'armatura de' Mancini, a cui succede la così detta Filarola segnata colle lettere *D,D*, e queste due opere contribui-

scono

scono principalmente a fissare il filone del Fiume, e tenerlo rivolto verso l'imboccatura del Naviglio, ch'è di circa 70 braccia come si è detto. La singolare disposizione della stessa armatura porta ancora un altro vantaggio, che in tempo di acque basse le maggiori deposizioni delle ghiaie restano nella convessità opposta del Fiume: e in tempo poi delle piene la maggiore caduta del canale di Pavia, e la larghezza della bocca, ch'è circa di 100 braccia, vi mantiene la parte principale del Fiume, e vi smaltisce le antecedenti deposizioni. Non sarebbe possibile di dare agli esteri con una semplice mappa un'idea più precisa di un'opera così ben intesa e interessante.

Il canale derivato dal Tefino viene a diramarsi nel luogo di Abbiate con un altro canale di circa undici miglia di lunghezza, che chiamasi di Bereguardo. Quest'altro canale, ch'era già fatto nei tempi del Duca Filippo Maria Visconti, come rilevasi da Pietro Candido Decembrio, fu poi adattato agli usi della navigazione nei tempi del Duca Francesco Sforza, e in seguito fu regolato con undici piccoli sostegni, e l'anno 1555 fu prolungato sopra la costa del Tefino nel luogo di Bereguardo sino alla distanza di circa due miglia dal fiume. Essendo tanto difficile di rimontar tutto il fiume sino all'imboccatura del Naviglio, e di avere così una navigazione continuata dal Pò, e dal Mare sino a Milano, si è cercato di lasciare il Tefino sette miglia sopra Pavia entrando nel Canale di Bereguardo, e passando di là nel Naviglio di Milano. L'altezza e la qualità della costa di Bereguardo, il numero de' sostegni che vi abbisognerebbero per congiungere il Canale col Fiume, e far passare le barche dall'uno all'altro, la dispersione dell'acqua che si avrebbe continuando il canale attraverso d'una costa arenosa, i varj e irregolari serpeggiamenti del Fiume, che continuando a correre in ghiaia cambia spesso volte di filone e di letto; sono le principali difficoltà, che finora hanno impedito di evitare il traghetto di terra, e continuare il Naviglio per le altre due miglia che restano sino a sboccare direttamente in Tefino. Dopo di essere stato in quei contorni mi è bensì parso che si potesse facilitare il trasporto delle mercanzie dalle barche sui carri coll'uso di quelle macchine, che servono per altri usi consimili in altri luoghi, e nei porti di Mare principalmente: ma
le

le difficoltà di evitare il traghetto di terra, e di continuare la navigazione da quella parte mi sono parse così rilevanti da dover più tosto rivolgere il pensiero ad altri progetti, e ad altri luoghi.

CAPO SECONDO.

DELLA CONTINUAZIONE PROPOSTA DEL SUDDETTO NAVIGLIO
DA MILANO SINO A PAVIA E NEL TESINO.

SI è creduto dai nostri Eruditi che nei tempi più antichi la navigazione dal Mare, e dal Pò si continuasse fino a Milano nel fiume Lambro, e nel Canale chiamato della Vecchiabbia, in cui si univano anticamente in Milano le acque dell' Olona, del Seveso, e del Nerone, e che anche adesso finisce nel Lambro in vicinanza di Marignano: ed a questa opinione ha dato luogo un passo di Landolfo Seniore, che ci descrisse la Vecchiabbia come un fiume, *quod quondam omnes ultramarinas divitias cum flumine Lambro ab Urbe usque ad Padum sociatas representabat*. Si legge ancora nel Corio che Galeazzo Visconti, secondo di questo nome, dopo di essersi impadronito di Pavia, e di avervi fabbricato il Ponte, e il Castello, vi avesse ancora continuato il Naviglio, che pochi anni prima era stato ingrossato colle acque dell' Olona a Milano: e l'Autore Anonimo degli Annali di Milano, che leggonsi nel To. XVI. della Raccolta del Muratori, scrisse che l'anno 1365 *præfatus Dominus Galeaz fieri fecit Navilium decurrens a Civitate Mediolani ad Civitatem Papiæ*. Io presentemente non credo nè una cosa nè l'altra. La caduta grande, che ho ritrovato da Milano a Pavia, e che pure è assai grande da Milano sino allo sbocco della Vecchiabbia nel Lambro a Marignano, avrebbe portato la necessità di fabbricarvi molti sostegno, ponti, e scaricatori a fine di continuarvi la navigazione. I sostegni non erano tra di noi conosciuti in que' tempi, e ne farebbe rinasto qualche vestigio, ed io nè allo sbocco della Vecchiabbia, nè al lungo della strada di Pavia non ho riscontrato nulla che si potesse riportare ad un Canale di navigazione. Bensì scorrendo diverse ordinazioni del Magistrato

strato e dei Governatori di Milano ho veduto che si è considerato sempre come uno degli oggetti più grandi e interessanti quello di avere una navigazione continuamente libera fino al Pò, e fino al Mare, e che tra tutti i mezzi proposti per ottenerla si è riguardato sempre come il più facile quello di continuare il Naviglio di Milano fino a sboccare nel Tesino a Pavia.

Il Magistrato Camerale nell' anno 1564 propose l' esecuzione di questo progetto al Governatore dello Srato, e fino dall' anno istesso nelle concessioni di aprire delle nuove bocche, e di cavare più acqua dal Naviglio di Milano, incominciò ad apporvi la condizione, che si è poi ritenuta sempre nelle altre concessioni posteriori: *infino a tanto che facciassi il Naviglio di Pavia*. I corpi delle Città di Milano, e di Pavia negli anni 1567, e 1583 proposero la difficoltà della spesa, e sostennero che pel commercio del Pò bastava il traghetto di Bereguardo. Il Magistrato nell' anno 1597 delegò il Questore Francesco Cid, e gl' Ingegneri Meda, e Remusso, che dopo di avere visitati, misurati, e livellati tutt' i terreni da Milano a Pavia proposero di ripartire tutta la caduta in otto sostegni, quattro per continuare il Naviglio di Milano fino in vicinanza di Pavia, e quattro altri per discendere nel Tesino. Gl' Ingegneri Remusso, e Bissnati proposero in seguito di dare maggiore altezza ai sostegni, e di ridurre il numero a soli cinque: il primo di 15 braccia di altezza in vicinanza al piccolo Lambro, che forge poco lontano da Milano: il secondo oltre la Certosa, e i tre altri sotto alle mura di Pavia. Questo è il progetto, di cui s' incominciò poco dopo ad intraprendere l' esecuzione sotto il Governo del Conte di Fuentes. Il cavo continuato regolarmente per più di un miglio e mezzo dal Naviglio di Milano fino al piccolo Lambro, vi si fece passar sopra con un ponte canale di due grandi archi di pietra: ed oltre il ponte si fabbricò il grandioso sostegno di 15 braccia di caduta, e poco lontano si fecero le prime due botti sotterranee, che servono ancora presentemente per far passare dall' una all' altra parte i fossi d' irrigazione. Ma appunto la fabbrica del sostegno, e delle botti in luoghi così profondi e abbondanti di acque sorgenti, esaurì le somme destinate per tutta l' opera, e le contestazioni insorte dopo per ritrovare delle altre somme di denaro

Meccanica.

M m m

im-

impedirono che tutta l'opera non fosse più continuata;

L'anno 1773 essendo io incaricato di esaminare il progetto di quest' altro Naviglio ho creduto che per facilitare la costruzione delle borti necessarie all' irrigazione delle campagne, e per evitare gl' inconvenienti de' sostegni troppo alti, de' quali si tratterà in un altro capitolo, convenisse più tosto di accrescerne il numero, riducendo il sostegno già fatto alla metà dell' altezza, continuando il canale a fior di terra, e non oltrepassando negli altri sostegni l' altezza di 5 o di 6 braccia. E poichè l' andamento della campagna da me riconosciuto con una generale livellazione mi aveva fatto vedere che per tenere il fondo del canale bastantemente incassato fra terra, e non lasciarvi una pendenza maggiore di circa un braccio per miglio, bisognava discendere con un altro sostegno tra il vecchio sostegno e Binasco, e che vi voleva un terzo sostegno a Binasco, due altri per arrivare al piano superiore di Pavia, e sei per discendere nel Tesino; ho ripartito in undici sostegni tutta la caduta che sopravvanterebbe a quella piccola pendenza del fondo. Ho ancora creduto che portando il Naviglio a sboccate nel fiume di fianco alla Città, lo sbocco sarebbe sempre più libero e più sicuro. Mentre quantunque il Tesino non abbia finito ancora a Pavia di portar ghiaja, può però riguardarsi come stabilito di letto, e incanalato tra le mura della Città, e i lavori che si son fatti dall' altra parte: lavori che indipendentemente ancora dalla considerazione del nuovo Naviglio conviene di mantenere acciò il fiume con qualche ravvolgimento non arrivi a imboccare il ponte obbliquamente, e non porti degli altri danni alla Città. E ciò basta per rispondere alla difficoltà, che si legge nella Proposizione III. del Capo VII. del Trattato sopra i Canali Navigabili stampato in Milano l'anno 1776. Io qui risponderei anche alle altre difficoltà, che l' Autore dello stesso trattato ha scritto di avere contro il progetto del Naviglio di Pavia, s' esso le avesse in qualche maniera specificate. Lascierò poi che ciascuno tornando dal presente mio libro alla lettura di quel Trattato rilevi da se medesimo diverse inesattezze che vi sono, intorno allo stabilimento del fondo dei Fiumi, intorno alla forma e all' altezza precisa delle chiuse, intorno alla storia ed alla teoria dei sostegni: e in questo luogo aggiungerò solamente, che
il

il merito di quell' Autore non si ha da valutare da un trattato scritto nell' età più avanzata, e che il nome di Lecchi si deve ricordar sempre come quello di uno scrittore elegante dotto sagace, e di un cittadino benemerito principalmente perchè in mezzo alle maggiori contraddizioni ha sostenuta, e promossa a Bologna la buona causa, ha riparata Cremona dalle inondazioni del Pò, ed ha regolati i tre Torrenti, che prima portavano tanti danni in vicinanza di Milano.

La difficoltà, che prima di tutte le altre si presenta in quel progetto, è di vedere se dal Naviglio di Milano possa sopravvanzare tant' acqua che basti per navigare fino a Pavia. Intorno a ciò bisogna considerare primieramente, che com' è stato da me progettato il nuovo Naviglio, vi dovrebbe decorrere l'acqua con pochissima pendenza di fondo, e vi verrebbe ringorgata dai sostegni posti a distanze proporzionate: nella qual maniera avvertì il Guglielmini nel Capo XII. che con debolissimi corpi d'acqua si possono avere dei canali comodamente navigabili. In secondo luogo è da sapersi che presentemente le ghiaie del Tesino, e le altre materie terree s'inoltrano dentro il Naviglio grande fino a tre e più miglia sotto all' imboccatura: e vi s'inoltrano in tanta copia che dopo quattro o cinque anni per restituire il fondo nello stato primiero colle ordinarie espurgazioni conviene in molti luoghi escavarlo di un braccio, e in qualche luogo ancora di un braccio e mezzo, per la lunghezza dove di 500, dove anche di 1000 braccia come so ch' è accaduto nel 1765, e nel 1770. Per calcolare la quantità d'acqua, che qualche volta è tenuta indietro da tutte queste deposizioni, supponiamo che l'altezza ordinaria di once 30 in tutto il primo tronco del Naviglio si riduca ad once 18, e che tutto il fondo si rialzi ragguagliatamente di due sole once, prima che s'incominci a sentire la mancanza dell' acqua per la navigazione, e per l'irrigazione delle campagne, cioè prima che diventi assolutamente necessaria la solita espurgazione. Secondo tutt' i principj già esposti sopra e applicati a tanti altri casi, la quantità d'acqua si diminuirebbe in ragione di 11 a 10, e farebbe di circa $\frac{1}{11}$ la quantità, che qualche volta manca al Naviglio per non essere bastantemente espurgato: e però se tutto il primo tronco si mantenesse annualmente a quella profondità, a cui suole ridursi ordinariamente ogni quattro,

M m m 2

o cin-

o cinque anni, e se ciò si facesse ancora nell' ultimo tronco in vicinanza di Milano, dove pure il fondo si lascia molte volte interrare notabilmente; non vi è alcun dubbio, che ancora senza quelle altre providenze, che dalle cose dette e da dirsi si possono ricavar facilmente, si manterrebbe nel vecchio Naviglio la quantità d'acqua, che può bastare per il consumo dei sostegni, e per la navigazione del nuovo Naviglio.

La principale difficoltà del progetto verrebbe dai condotti d'acque; che si dovrebbero far passare dall' una all' altra parte del nuovo cavo per non turbare il presente sistema delle campagne. Disegnando il cavo con quella pendenza di fondo, e con quella distribuzione di sostegni, che si è indicata sopra, oltre alle acque che si potrebbero ricevere da una parte nel cavo, e poi cavarli colle opportune chiaviche dall' altra parte, oltre ad alcune botti sotterranee già fatte, che potrebbero servire; abbisognerebbero almeno altre 31 botti, 14 piane e 17 più o meno concave, alcune di esse in due archi, ed alcune col salto sino di 4 e di 5 braccia. Volendo che tutto il fondo resti incassato bastantemente fra terra non ho trovato altra maniera di rendere meno operosa la costruzione delle botti che tenendo il pelo d'acqua a fior di terra, riducendo il vecchio sostegno alla metà dell' altezza, e proponendo un altro sostegno da collocarsi tra il sostegno ridotto, e quello che abbisognerebbe a Binasco. Non è possibile d'inferire a questo libro il Profilo, che presenterebbe agli occhj ogni cosa. Ma questa, ch' è forse l'ultima volta eh' io scrivo sopra tali materie, non voglio tener celata un' idea che mi è sovvenuta riandando il Profilo medesimo, e potrà forse ad alcuni sembrare interessante: ch' è di continuare il Naviglio in un tronco solo, con una piccola pendenza di fondo, dal vecchio sostegno sino a Binasco, senza discendere fra terra con un altro sostegno di mezzo: con che il fondo resterebbe a fior di terra nelle ultime quattro o cinque miglia, dove s'incontra il maggior numero dei condotti trasversali, e tutto il cavo si dovrebbe ferrare tra due argini murati di due o tre braccia di altezza, e in vece di un sostegno solo a Binasco converrebbe poi fabbricarne due accollati insieme tra loro, come ho proposto di accollare i sostegni per discendere nel Tesino, e come si spiegherà novamente nel progresso di questo libro. Non
fa-

farebbe di un grande impegno la fabbrica di due argini di due o di tre braccia di altezza, sopra uno dei quali restasse la strada dell' alzaja per quattro o cinque miglia: ma così tutte le botte sotterranee in tutto quel tratto resterebbero ancora nel piano, in cui passano adesso sotto alla strada, e nel caso del nuovo Naviglio non ricercerebbero una cura maggiore di quella che si ricerca per mantenerle presentemente.

Per maggiore istruzione di quelli, che volessero più minutamente informarsi dei fondamenti di tutto il progetto, soggiugnerò i risultati della livellazione che ho fatto dalla foglia della roggia Carlesca, ch' è il termine stabile più vicino al fondo dell' ultimo tronco del nostro Naviglio, sino alla foglia della chiavica, ch' è nell' angolo inferiore delle mura di Pavia, e che può prendersi per il pelo basso del Tesino. Le distanze sono misurate in trabucchi di cinque braccia ciascuno: le altezze si sono prese in once e punti del nostro braccio, e si sono indicate col segno — le quantità, che per l'acclività di alcuni piani non devono aggiugnersi alle altre ma sottrarsi. I termini stabili, ai quali è legata tutta la livellazione, e che si possono riconoscere ancora presentemente sono come segue:

	Distanze.		Cadute.	
Dalla foglia della seconda chiavica della roggia Carlesca sino al ciglio della caduta del sostegno fabbricato sopra il piccolo Lambro.	Tr.	988.	Br.	3. 2. 6.
Dallo stesso ciglio sino all' angolo inferiore del sotarco ch' è all' uscita del sostegno.		16. 4. 4.		4. 3. 9 $\frac{1}{2}$
Dall' angolo suddetto alla cima del soparco sinistro della tomba della Torretta.		763. 1.		3. 1. 9.
Indi all' angolo inferiore del soparco sinistro del Naviglietto nel luogo di Cassino.		700. 1. 2.		0. 6. 7 $\frac{1}{2}$
Dal luogo suddetto all' angolo del soparco, per cui la roggia Bosca passa sopra la roggia Speziana.		366. 3.		0. 2. 3 $\frac{1}{2}$
				Dall'

Dall' angolo del soprarco medesimo alla sommità del tavolato posto sulla rog- gia Speziana al Biffone .	Distanze.	Cadute.
Indi al soprarco destro del Marzono .	Tr. 194.	Br. 4. 10. $1\frac{1}{4}$.
Al soprarco destro del ponte, sotto cui passa a Moirago la roggia Caima .	101. 1.	0. 10. 11.
Al soprarco destro della terza roggia di S. Ambrogio .	161.	— 1. 5. 6.
Alla pietra posta nell' angolo sinistro in- feriore del ponte della roggia Colom- bana .	275.	2. 9. 1.
Al soprarco destro della tomba del Cavo Borromeo .	332. 1. 8.	0. 7. 2.
Alla foglia della bocca Falcona del Te- finello a Binasco .	572. 4.	— 0. 11. 7.
In tutto tra i termini indicati del Navi- glio a Milano, e del Tefinello a Bi- nasco .	547. 4.	7. 10. 4.
Dalla bocca Falcona al fondo del cavo prefente sopra la tomba della roggia Bareggia .	5020. 0. 2.	27. 11. 6.
Indi alla foglia superiore del partitore dell' acqua dello stesso cavo a Ni- volto .	915. 1.	4. 10. 0.
Dalla foglia superiore all' inferiore .	851.	3. 1. 4.
Indi alla foglia superiore dell' altro par- titore alla Torre del Mangano .	3. 3.	1. 8. 9.
Dalla foglia superiore all' inferiore .	1125. 2.	5. 4. $10\frac{1}{4}$.
Indi alla foglia superiore dello scarica- tore della Mischia .	5. 2.	3. 1. $11\frac{1}{4}$.
Alla foglia superiore di Cassinino .	451. 3.	0. 6. 5.
Dalla foglia superiore all' inferiore .	729.	5. 11. $11\frac{1}{4}$.
Indi al piano dello scaricatore di Cam- peggi .	4.	0. 11. 6.
	686. 3.	2. 4. 10.

In

In tutto tra i termini indicati dal Tefino a Binasco, e dello scaricatore di Campeggi.	Distanze.	Cadute.
	Tr. 4771. 4.	Br. 28. 1. $7 \frac{1}{2}$:
Dal piano del suddetto scaricatore fino all' angolo inferiore del bastione della Città di Pavia di fianco alla porta di S. Maria in Pertica .	771. 1.	9. 2. 8.
Dal fondo della fossa nell' angolo suddetto al fondo sotto il canale del Collegio Borromeo.	205.	13. 8. 10.
Indi alla foglia dell' ultima chiavica della fossa.	290. 2.	12. 0. 8.
In tutto tra le foglie dello scaricatore di Campeggi, e dell' ultima chiavica della fossa della Città.	1266. 3.	35. 0. 8.
In tutto tra la foglia ch' è prossima al fondo del Naviglio di Milano, e la foglia ch' è prossima al pelo basso del Tefino a Pavia.	Tr. 11058. 2. 2.	Br. 91. 1. $9 \frac{1}{2}$:

C A P O T E R Z O.

DEI CANALI DERIVATI ANTICAMENTE DALL' ADDA,
E DELLA COMUNICAZIONE DELL' ADDA COL TESINO.

INsubria propriamente si chiama quella porzione di Lombardia, ch' è circonferita dall' Adda a Levante, dalle Alpi a Tramontana, dal Tefino a Ponente, e dal Pò a Mezzogiorno. Gli emissarj dei due principali Laghi, che si aprono al piede delle Alpi, prendono il nome dei due Fiumi principali, che scendono dalle Alpi a formarli, e che sono nel Lago Maggiore il Tefino, e nel Lago di Como l'Adda. Il Tefino incomincia a incanalarsi sotto al luogo di Sesto, e scorre tortuosamente per circa 15 miglia avanti di arrivare al luogo della diramazione del Naviglio. Nel primo tronco del Naviglio

la

la caduta è in ragione di 5 braccia per miglio, e la caduta totale dall' imboccatura fino all' ultimo tronco del Naviglio a Milano è di circa 58 braccia, come si è detto nel capitolo antecedente. La caduta del Tefino è manifestamente maggiore di quella del primo tronco del Naviglio, e le difficoltà della navigazione non sono molto differenti nei tronchi superiori del Tefino e dell' Adda. Onde se in mancanza di altre livellazioni supporremo che la caduta del Tefino sia in ragione di circa 7 braccia per miglio, come io ho riconosciuto ch' è la caduta dell' Adda sotto al Lago di Brivio, vi faranno circa 105 braccia di caduta dal Lago Maggiore fino al principio del Naviglio, e 163 braccia dal Lago fino all' ultimo tronco del Naviglio suddetto, e prendendo un numero rotondo si potrà supporre che il pelo ordinario del Lago maggiore sia 150 braccia più alto del piano medio della Città di Milano.

L'Adda uscendo dal Lago di Lecco, ch' è un ramo di quello di Como, forma colle susseguenti espansioni i tre piccoli Laghi di Garlate, di Olginate, e di Brivio. Secondo la livellazione che ho fatto la rapidità del corso nel passaggio dal lago di Garlate a quello di Olginate nasce più dalla ristrettezza dell' alveo, che dalla differenza dei livelli, ch' è di poche once: la differenza di livello tra i Laghi di Olginate e di Brivio è di braccia $1\frac{1}{2}$: l'altezza della chiusa che sostiene il Lago di Brivio è di un braccio: la caduta dell' Adda in cinque miglia sotto il Lago suddetto è in circa di braccia 35: nelle altre due miglia susseguenti di braccia 46: e la caduta sotto il Castello di Trezzo è di braccia 4: che in tutto fanno circa 89 braccia. Poichè adunque le antiche livellazioni ci danno 30 braccia di caduta da Trezzo a Milano, supponendo che nelle cinque altre miglia di corso più placido sopra Trezzo la caduta totale sia di circa 25 braccia; vi faranno dal Lago di Como fino all' ultimo tronco derivato dall' Adda a Milano circa braccia 144. E in fine poichè la caduta dei cinque sostegni, che sono nel recinto della Città, arriva a circa 13 braccia, e tra gli ultimi due sostegni vi sono circa 5 braccia di caduta di fondo; infino a tanto che non siano riconosciute meglio, e supplite le antiche livellazioni si potrà credere che il pelo d' acqua ordinario del Lago di Como sia circa 162 braccia più alto di quello dell'

dell' ultimo tronco del Naviglio derivato dal Tefino a Milano: cioè che il Lago Maggiore, e il Lago di Como siano prossimamente allo stesso livello, e siano circa 150 braccia più alti del piano medio di Milano. Il Sig. Conte Presidente Verri mi ha fatto l'onore di anticipare la pubblicazione di questi risultati nel primo tomo della bell' Opera, in cui ha rinovati gli esempj dei Presidenti dei Thou, Henault ec., di altri illustri Ministri che impiegarono le ore avanzate alle pubbliche loro occupazioni nell' appurare e illustrare la Storia Patria.

Una Città che quantunque tre volte distrutta si è voluta rifabbricar sempre nello stesso luogo di prima lontano dai grossi fiumi, in proporzione che si andava ingrandendo aveva tanto più di bisogno di una libera comunicazione col Tefino e coll' Adda e coi due laghi principali, che possa fornire dei mezzi maggiori per la sussistenza di una maggiore popolazione. Nei tempi dell' antica Repubblica verso il 1220 erasi incominciato il canale della Muzza, per cui a Cassano si deriva dall' Adda un considerabile corpo d'acqua, e si riparte sulle campagne del territorio Milanese e Lodigiano. Pochi anni dopo come si è detto, fu continuato sino a Milano il Canale che serve al più facile trasporto dei generi dal Tefino e dal Lago Maggiore. Il Principato dei Visconti non fu illustrato da alcun monumento di questo genere che debba rammentarsi. Nel Principato di Francesco Sforza con addattare agli usi della navigazione il cavo di Bereguardo fu ampliato il commercio della parte occidentale dell' Insubria, e nello stesso tempo furono rivolte le viste anche a Levante. La diramazione dell' Adda da Trezzo sino a Milano fu progettata nel 1457 dall' Architetto Bertola da Novate, e fu poi eseguita nel 1460, come racconta Pietro Candido Decembrio autore contemporaneo. Le principali difficoltà del progetto erano di derivare un ramo perenne d'acqua dall' Adda in un luogo di corso assai rapido, di continuare per alcune miglia il nuovo cavo in una costa sassosa, e di attraversare con esso il torrente Molgora e il fiume Lambro. Nella rozzezza di que' tempi non si sono potute superare che a poco a poco tutte queste difficoltà, e si sono dovuti ripigliare e correggere spesse volte i lavori per ridurli finalmente allo stato in cui trovansi presentemente: anzi con tutto ciò sono rimasti ancora in quest' altro Naviglio come in quello ch' è derivato dal Tefino al-

- Meccanica. N n n cuni

cuni difetti di costruzione. La prima opera di questo genere che si sia fatta bene e in un colpo solo nel nostro Paese è quella che fu diretta da Leonardo da Vinci, la congiunzione dei due Navigli.

Il canale della Muzza a Cassano, e il canale di Trezzo, che chiamasi ancora il Naviglio della Martesana, sono derivati dall'Adda con due chiuse tirate obliquamente, la prima in un luogo più libero e più spazioso, la seconda in una delle sezioni più anguste del fiume. La chiusa di Cassano ha più di 500 braccia di lunghezza, ed ha dalla sponda opposta al canale della Muzza un'apertura di circa 1010 braccia, che serve qualche volta al traghetto dei battelli, e che si può chiudere in tempo delle maggiori scarrezze d'acqua. Il ciglio di quella chiusa è ripiegato un poco nel mezzo fin sotto il pelo dell'acqua bassa. La chiusa di Trezzo non è più lunga di 150 braccia; è tutta alzata allo stesso livello dell'argine del Naviglio, e dalla parte opposta ha istessamente un'apertura di circa 16 braccia. L'impeto, con cui le acque discendono dalla svolta del Castello di Trezzo, la maggiore obliquità della chiusa, la posizione delle rive e i grossi scogli, che da esse si avanzano dentro il fiume, fanno che in tempo di piena si rivolga all'imboccatura del canale una quantità d'acqua maggiore di quella, che vi si può ricevere; e però si rigonfiano le acque sopra la chiusa, e s'alzano di livello fino di un braccio o di un braccio e mezzo sopra il pelo d'acqua del canale, e vi formano come una cascata che non è facilmente superabile delle barche. Il canale era anche assai più ristretto nella prima sua costruzione, e non lasciava derivare dall'Adda che una minore quantità d'acqua, nè serviva per la navigazione che due soli giorni la settimana, quando tenevanli chiuse le bocche d'irrigazione. L'anno 1573, più di un secolo dopo la prima costruzione, fu allargato tutto il canale, e congiuntamente proporzionato al comodo delle barche e al bisogno delle campagne. Ciò non ostante è rimasto ancora il difetto d'una troppo ristretta imboccatura: difetto che non s'incontra nella derivazione del Naviglio grande e della Muzza, dove il pelo dei canali in tempo di acque alte e basse si pareggia con quello del fiume, e non presenta difficoltà alcuna al transito delle barche. L'imboccatura del Naviglio grande è di circa 70 braccia e il canale si va restringendo gradatamente fino alle 20 braccia: il piccolo Na-

Naviglio non ha più di 20 braccia di larghezza all' imboccatura e nell' ultimo tronco non ne ha meno di 18.

Presentemente il piccolo Naviglio per quasi cinque miglia sotto a Trezzo è sostenuto dalla parte sinistra con un argine grandioso di pietra fino all' altezza di 40 e più braccia sopra il fondo dell' Adda contigua. Sotto all' imboccatura l'argine istesso serve di scaricatore e di diversivo aperto al fior d'acqua, e più sotto ancora vi sono dei scaricatori aperti sul fondo e cogli uni e cogli altri si è provveduto che ancora nelle piene maggiori dell' Adda non possa involtrarsi dentro il canale una soverchia quantità d'acqua. La lunghezza di tutto il canale è di circa 24 miglia: la pendenza vi è regolata a principio in ragione di due braccia e poi di un braccio solo per miglio: e l'altezza del corpo d'acqua è di quattro braccia e mezzo a principio, e sul fine di un braccio e mezzo. Vi si è fatto passar sotto il torrente Molgora con un ponte di tre archi di pietra: e il fiume Lambro vi sbocca dentro ad angolo retto, e a foce aperta con tutte le sue piene. I diciannove scaricatori del Naviglio dalla parte opposta allo sbocco del Lambro sono tanto ampi e sono distribuiti in maniera tale che bastano non solamente per dare sfogo ad una piena intera del fiume, ma ancora per deviare la metà in circa del Naviglio: cosicchè entrandovi inferiormente il torrente Seveso, la cui portata in tempo di piena può valutarli la metà in circa del Naviglio, non faccia che restituirlo all' altezza ordinaria, e non faccia bisogno che della diligenza di aprire gli altri scaricatori che sono posti alle mura e dentro il recinto della Città, perchè ancora nel caso di combinarsi insieme le piene dell' Adda del Lambro e del Seveso non arrivi il Naviglio ad inondare nè la Città, nè la campagna. E qui non devono dimenticarsi gli esperimenti che si son fatti nelle maggiori piene dell' anno 1761, e che si trovano registrati nella bella e giudiziosa relazione del Sig. Lecchi sopra le origini e i ripari delle inondazioni del Redefosso. Il più minuto dettaglio di quest' ultima diramazione del Naviglio non è punto interessante per gli esteri, ed è abbastanza noto nel nostro Paese.

Le principali opere Idrauliche, che soglio indicare ai viaggiatori più intelligenti come quelle che meritano di essere particolarmente vedute e considerate, sono la derivazione del Naviglio grande dal Te-

fino, l'interfeccazione del piccolo Naviglio col Lambro, e la comunicazione dei due Navigli fra loro. Nella prima costruzione il residuo del piccolo Naviglio erasi portato a sfogare per l'alveo del torrente Seveso nel Lambro. Leonardo da Vinci, chiamato da Lodovico il Moro con un grosso stipendio a Milano, portò quest' altro Naviglio a sboccare nel grande, e così rese libera e non interrotta la navigazione dal Tefino, e dal Lago Maggiore infino all' Adda. Tutta l'opera era già terminata nel 1497, e regolata con sei sostegni: il primo posto due miglia sotto allo sbocco del Lambro, e un miglio lontano dalla Città colla caduta di poco meno di quattro braccia: e gli altri ripartiti successivamente dentro il recinto delle mura, colla caduta successiva di braccia $2\frac{1}{2}$, 3, $1\frac{1}{2}$, 2, e 4. L'unione dei due Navigli si farebbe potuta fare con un minor numero di sostegni. Ma forse Leonardo da Vinci moltiplicandone il numero ha pensato di dare alla Città il maggior comodo de' mulini. L'invenzione dei sostegni a gradino era appunto di quel tempo, e i primi modelli in questo genere si son veduti nei Navigli di Bologna e di Milano, come diremo in un altro capitolo. Nei tempi di Leonardo da Vinci e di Lodovico il Moro si trattò ancora di derivare un altro canale dal tronco superiore dell' Adda da Brivio sino a Milano, e ne fu fatta una livellazione. Ma di tutte le misure di allora non è più rimasta memoria, nè si è intrapreso a quei tempi lavoro alcuno per continuare la navigazione dell' Adda dal Naviglio di Trezzo sino al Lago di Como.

CAPO QUARTO.

DELLA NAVIGAZIONE DEL TRONCO SUPERIORE DELL' ADDA,
E DELLA COMUNICAZIONE DEI LAGHI DI COMO E DI LUGANO
COL LAGO MAGGIORE.

NELL' anno 1517 s'ebbe un' altra Epoca assai gloriosa per gli studj Idrometrici dell' Insubria con una pubblica commissione, che potrebbe servire di modello e di regola per gli altri Paesi. Essendo stata assegnata dal Re Francesco I. di Francia alla Città di Mi-

Milano la somma di cinque mila ducati d'oro da impiegarsi nella costruzione di un altro Naviglio, fu ordinata una visita di tutto l'alto Milanese, una livellazione generale, ed un maturo esame di tutto ciò che poteva proporsi a fine di continuare la navigazione dagli altri laghi superiori sino alla Città. Gl' Ingegneri Massaglia, e della Valle Deputati a questo esame trovarono che il livello del Lago di Como era 48 braccia più basso di quello del Lago di Civate, 62 di quello del Lago di Pusiano, e 100 braccia più basso del Lago di Lugano, come riferisce il Pagnani in un libretto stampato pochi anni dopo. Una così grande diversità di livello fece loro deporre il pensiero di tirare un canale navigabile dal Lago di Lugano al Lago di Como, e di unire i Laghi di Como, di Civate, e di Pusiano con un altro canale, ch' entrasse nella valle del Lambro, e continuasse da quella parte la navigazione sino a Milano. Il progetto di continuare la navigazione dal Lago di Lugano al Lago Maggiore nel fiume Tresa, ch' è l' emmissario del primo Lago nel secondo, senz' alcun' altra livellazione, fu rigettato subito da quegli Ingegneri perchè avendo osservato la Tresa la riconobbero di un corso troppo rapido, e di un corpo d'acqua troppo piccolo per farlo servire al bisogno della navigazione. E così pure rigettarono essi il progetto di aprire la navigazione dal Lago di Lugano a Milano per la valle di Olona, e dal Lago di Como per la valle del Seveso, e rivolsero ogni loro attenzione al progetto di rendere navigabile tutto il tronco superiore dell' Adda sino ad entrare nell' altro Naviglio, che in quei tempi era già unito al Tesino, ed al Lago Maggiore.

E' cosa singolare che essendosi tante volte proposto di rendere navigabile la Tresa, anche a' giorni nostri non si sia fatta mai una livellazione, che doveva servire di base per riconoscere l' esiguità del progetto. Secondo le congetture, che ho proposto al principio di questo capitolo, si potrebbe credere che il Lago Maggiore, e quello di Como fossero prossimamente allo stesso livello, e che la caduta totale della Tresa fosse prossimamente di 100 braccia. Io poi ho avuto occasione di poter osservare comodamente quel fiume, e tutt' i suoi contorni. Non mi è sembrata sussistente la prima difficoltà che il Massaglia, e della Valle rilevarono dal corpo d'acqua troppo piccolo e scarso per

potervi navigare: mentre la larghezza della Tresa è tra 50 e 60 braccia, e l'altezza dell'acqua nei tempi di piogge e di nevi sciolte arriva alle due braccia e mezzo o anche a tre, e nei mesi più asciutti di Gennaio e di Agosto non è mai minore di un braccio. La difficoltà maggiore della caduta mi è parso che si riduca al tratto di circa un mezzo miglio, che chiamasi il Pozzo nero. Ivi tutto il letto del fiume resta profondamente e tortuosamente scavato nel seno del monte: la larghezza non è maggiore di 15 o 20 braccia: e la caduta vi è distribuita irregolarmente, e come in varj gradini, due de' quali compajono agli occhj di un'altezza considerabile. Supponendo che nelle altre sei miglia di tutto il corso della Tresa dall'uscita dal Lago di Lugano fino allo sbocco nel Lago Maggiore la caduta del fondo sia in ragione di sette o otto braccia per miglio; resterebbero circa 50 braccia da ripartirsi in tanti sostegni nel tratto di un mezzo miglio: e se il progetto convenisse per altre ragioni, non sarebbe una difficoltà bastante ad escluderlo. Io ho già proposto altre volte, che non parendomi possibile di navigare dentro l'alveo del fiume per tutto il tratto del Pozzo nero, nel caso di volere una navigazione continuata da un lago all'altro, si potrebbe evitare quel passo derivando dalla Tresa un ramo d'acqua: e sull'esempio di alcuni canali oltremontani ho proposto di forare il monte più tosto che di aprirlo, perchè il canale non fosse esposto a interrarsi colle materie, che massimamente in tempo di pioggia vi potrebbero cadere dai lati dello scavo. Adesso non devo lasciar d'aggiungere, che il trasporto delle legna, e del carbone essendo il più che a Milano possa sperarsi dai contorni del Lago di Lugano, basterebbe addattare la Tresa al passaggio delle zattere: il che non sarebbe difficile, almeno per certi tempi dell'anno, anche nelle svolte più ripide del Pozzo nero.

La navigazione dell'Adda nel proprio alveo presenta varie difficoltà sotto al Lago di Brivio, e intorno al Castello di Trezzo, ma poi sembra assolutamente impossibile nel tratto di più di un miglio quasi di mezzo ai suddetti due luoghi. L'alveo del fiume per più di un miglio è tanto irregolare e tanto interrotto da grossi scogli, ed è tanta la caduta del fondo massime in alcuni passi precipitosi, che tutti gli ajuti dell'arte non basterebbero per avervi una comoda navigazione.

zione. Gl' Ingegneri Massaglia, della Valle, e Giuffani incaricati di riconoscere tutte le difficoltà l'anno 1519, fatte le osservazioni e le livellazioni opportune, proposero di declinare tutto quel tratto con un canale che uscisse e rientrasse nel fiume dove il corso fosse più placido. Giudicarono essi che il luogo più opportuno per fabbricare la chiufa di derivazione fosse la sezione più larga del fiume dicontra ad un grosso sasso, che sorge dalla riva sinistra e che chiamasi il sasso di S. Michele, e nella fig. 137 resta segnato colla lettera A. Giudicando poi che sarebbe troppo difficile di tirare il canale sulla diritta nella riva ghiarosa del fiume, proposero di portarlo dentro la costa, scavando dove occorresse il terreno, sino alla profondità di 36 braccia. Nella livellazione, ch' essi fecero incominciando dal piede del monte Robbio e andando all' ingiù per 1900 braccia sino al sasso di S. Michele, la caduta del pelo basso dell' Adda risultò di 7 braccia e 2 oncie, e in altre braccia 4180 risultò la caduta di circa 39 braccia: ed io pure avendo riconosciuto i due termini estremi di quella livellazione, ed avendola ripetuta col livello Ugeniano, ho trovato la caduta totale di 46 braccia e 3 oncie. Proposero adunque di portare la chiufa sino all' altezza di 7 braccia e 2 oncie acciò il ringorgo venisse a stendersi sino al piede del monte Robbio, e vollero ripartire le 46 braccia di caduta in dieci sostegni di circa braccia $4\frac{1}{2}$ ciascuno: i primi quattro alla distanza di braccia 320 dall' imboccatura, dove seguendo la direzione proposta allora del cavo si sarebbe dovuto scendere in un piano più basso: e sei altri sostegni dopo altre braccia 1060 per ritornare col canale nel fiume. Ma allora non si fece altro di più che incominciare una chiufa di 200 braccia di lunghezza, e 4 di altezza sopra il pelo basso: e tutto il seno compreso tra la chiufa e la riva col progresso del tempo restò interrato dalle deposizioni delle ghiaie del fiume sino all' altezza di più di due braccia.

L'anno 1591 volendosi metter mano a tutta l' opera, l'Ingegnere Meda ne variò sostanzialmente il progetto, portando il principio del canale un terzo di miglio sotto il sasso di S. Michele, continuandolo in molti luoghi vicino al fiume, e riducendolo alla lunghezza di poco più di un miglio, che poteva bastare per continuare la navigazione dal tronco superiore dell' Adda all' inferiore. La chiufa di derivazione

fu

fu fabbricata da una sponda all' altra del fiume , in una delle sezioni più anguste , poco sotto ad uno scoglio che sorge di mezzo al fondo , che chiamasi il falso delle tre corna , ed è segnato colla lettera *O* nella fig. 137. La caduta totale di braccia 39 dalla foglia dell' incile *D* sino allo sbocco *G* del canale nell' Adda fu ripartita in due soli sostegni *F* e *G*, l'uno di 10 braccia d'altezza, l'altro di circa 29. Non occorre descrivere più minutamente la forma di un sostegno, ch'è ora in gran parte distrutto, e che per l'altezza esorbitante non ha servito, e non servirà mai di modello ad alcun altro sostegno. Nell' attenta recognizione ch' io ne ho fatto l'anno 1773 non mi è parso neppure che nè i due sostegni, nè tutto il cavo siano mai stati terminati in maniera di potervi navigare. Bensì essendosi quasi terminata la chiusa l'anno 1599 fu fatta la prova di rivolgere l'acqua dell' Adda nel primo tronco del Naviglio ch' era già terminato, ed era scavato nel falso all' imboccatura, e successivamente arginato dalla parte del fiume. Riuscì infelicamente la prova: cedettero subito gli argini, e si scompose, e rovinò tutto il fondo per la lunghezza di circa 500 braccia, e sino alla profondità di otto braccia, e perchè la rovina non si facesse maggiore si dovette demolire una parte della chiusa. Si abbandonarono allora le cose nello stato in cui erano, e nel secolo passato sopravvenne una nuova difficoltà per continuare la navigazione dell' Adda: mentre per un' altra rovina seguita nei contorni di Trezzo, dove l'Adda corre ristretta tra due coste assai alte, tutto il letto del fiume per la lunghezza di 400, e più braccia restò ingombrato di grossi sassi e di sciogli, dieci de' quali chiudevano interamente il passaggio sino alle legna sciolte che si facevano venire per acqua dal Lago di Como.

Si credette che la prima rovina fosse provenuta principalmente dall' impeto, con cui l'Adda ristretta tra due rive irregolari si rivolgeva dalla chiusa nel nuovo cavo: su questa credenza fu proposto sino d'allora di portare il principio del canale al falso di S. Michele, e a' giorni nostri riassumendosi tutto il progetto della navigazione dell' Adda si è ivi tirata una grandiosa chiusa. Il nuovo canale *BC* si è incominciato a scavare nell' alta costa, e poi si è sostenuto cogli argini in un seno del fiume, e si è portato con altre escavazioni ad unirsi col cavo vecchio *DEFG* rifarcito nei luoghi *E* delle rovine, raddrizzato in

alcuni altri luoghi, e prolungato per circa 450 braccia oltre al luogo, dov' erasi portato a sboccare nel 1599. Si sono aperti nel nuovo e nel vecchio cavo gli scaricatori opportuni, e tutta la caduta vi si è ripartita in sei sostegni separati, l'uno vicino al luogo della prima rovina, e gli altri cinque al ritorno del canale nel fiume. Ma per le stesse testimonianze, che ci sono rimaste del 1599, la chiusa allora non si era alzata che due sole braccia sopra la foglia dell' incile, e l'acqua non arrivava che all' altezza di quattro braccia e mezzo, o di cinque braccia nel cavo, come molte volte suol essere nel Naviglio della Martesana: onde se vi si fossero proporzionati meglio i consueti scaricatori non vi era per questo capo da temer altro. Io poi che nell' indagare le ragioni delle cose soglio consultare più tosto le osservazioni, che le autorità e le opinioni degli altri, sino dalla prima volta che ho passeggiato in que' contorni, osservando che tutto il terreno è mescolato di arena e ghiaja, che formano insieme una specie di tufo di consistenza disuguale, e più facile a fendersi, ed a cedere ad un peso maggiore, e considerando in oltre che quelle antiche rovine si stendevano ancora assai lontano dagli argini, e in alcuni luoghi sino alla profondità di otto braccia, ho creduto che la rovina fosse proceduta principalmente dalla poca consistenza del terreno cavernoso e disuguale: il che si è poi veduto da tutti nelle rovine seguite posteriormente, e nella serie dei lavori, con cui si sono dovuti riparare.

Siccome adunque le chiuse fatte nel Reno a Casalecchio, e nell' Adda medesima a Trezzo mi davano degli altri esempj della derivazione di un canale navigabile nelle sezioni più anguste del fiume; non ho trovato alcuna necessità di portare il principio del nuovo Naviglio dal sasso delle tre corna a quello di S. Michele. Mi è parso ancora che il sasso istesso delle tre corna, con due altri grossi sassi, che sorgono dal fondo al fiume quasi nella stessa dirittura della sponda sinistra del vecchio cavo, offrissero delle altre facilità per la costruzione d'una nuova chiusa anche quando non si fosse voluto rifabbricare coi necessari scaricatori la vecchia: ed avendo osservato che il terreno di quelle coste era a un di presso della qualità istessa scostandosi ancora dal fiume, mi è parso che non vi fosse neppure una ragione di ritirarsi più addentro nella costa con un nuovo cavo, e che più tosto convenisse

Meccanica.

O o o

riad-

riaddattare il cavo vecchio, ed impiegar tutta l'arte per procurarvi la consistenza maggiore e del fondo e degli argini. Ma poi la più attenta osservazione delle colle del Fiume, e dei totrentelli, che vi si scaricano, mi ha suggerito una difficoltà, che non era stata ancora ben avvertita, e che conveniva di prevenire colle providenze opportune. L'Adda traendo seco nelle sue piene una quantità grande di ghiaie piccole e grosse, come avea già altamente interrata la prima chiusa, e il seno una volta formato innanzi al falso di S. Michele, così avrebbe cagionato de' maggiori sconcerti nel nuovo cavo, se portando a maggiore altezza la chiusa non si fosse tenuta la foglia dell'incile ben rilevata sopra il fondo del fiume, se con un maggior numero di scaricatori più ampj non si fosse provveduto all'espurgazione del canale, e se i sostegni non si fossero tenuti tanto lontani dall'imboccatura, che non vi potessero arrivare le ghiaie in tanta copia da rendere più difficile il maneggio dei portoni. A questo fine ho proposto principalmente di restringere i nuovi sostegni nel luogo istesso dei vecchi: e poichè in tutto ne bastavano cinque per ripartirvi 39 braccia di caduta, ho proposto di ridurre i due vecchi sostegni *FG* all'altezza di sole otto braccia, e di accollarne di mezzo altri tre di minore altezza, e della forma, che farà poi spiegata in uno dei capitoli susseguenti.

Così farebbe compendiata l'opera principale della derivazione del canale dell'Adda. Ma poi avrei io desiderato che in tutto il resto del fiume per la comodità della navigazione si facesse tanto di più. Avrei creduto che quando il Lago artificiale di Brivio dovesse lasciarsi nello stato medesimo di adesso, convenisse facilitare con un sostegno il passaggio delle barche dal Fiume nel Lago: che si avesse a sgombrare il fondo dagli ammassi di ghiaie, che vi lasciano le maggiori cadute, massime nei luoghi delle chiuse dei mulini, e nei due passi più rapidi del ramo principale dell'Adda sotto alla chiusa di Brivio: e così pure che sopra Trezzo, dove in tempo di acque basse non vi è bastante profondità per il passaggio delle barche cariche, si dovesse o scavare il fondo o restringere la larghezza dell'alveo. Per facilitare, il passaggio delle barche in tempo di piena dall'Adda nel Naviglio della Martesana potevano in qualche modo servire dei nuovi sca-

scaricatori aperti nella chiufa di Trezzo: ma in conseguenza delle cose già dette per togliere interamente quella caduta d'acqua non si potea proporre altro che di allargare l'imboccatura del Naviglio. Quanto all' altro passo di Trezzo una livellazione, che mi è riuscito di fare tra i dirupi che allora ingombravano il fondo, mi ha dato a conoscere che dopo la rimozione di quei dirupi sarebbe rimasta una maggiore difficoltà e fino allora non preveduta per continuarvi la navigazione, cioè la caduta di 4 braccia, o una specie di gradino, che formava il fondo pietroso poco sotto ad una risvolta del fiume: e intorno a ciò non vi era da propor' altro che di scavare e abbassare il gradino, onde la stessa quantità di caduta restasse ripartita in un tratto più lungo, e lasciasse il passo men ripido. Non ho voluto deludere in questo libro la curiosità di alcuni che desideravano di sapere cosa io avessi opinato intorno ad una così grande intrapresa, ma la qualità istessa del libro non permette di dir di più.

C A P O Q U I N T O .

DELLA QUANTITÀ D'ACQUA DEI DUE NAVIGLI,
E DELLE BOCHE D'IRRIGAZIONE DEL MILANESE.

L' oncia d'acqua, il modello e l'unità, a cui si rapportano tra di noi, e con cui si misurano le bocche d'irrigazione, è una bocca rettangolare, larga 3 once del braccio Milanese, alta once 4, che ha di sopra due altre once d'altezza d'acqua, che chiamasi battente, e però nella foglia inferiore della bocca resta 6 once sotto la superficie dell' acqua. Secondo tutto ciò che si è detto nei corollarj del Teor. IX. del Lib. III. per avere la proporzione delle quantità d'acqua somministrate in egual tempo da questa e da qualunque altra bocca rettangolare, ossia per sapere di quante once d'acqua si possa valutare qualunque altra bocca proposta, bisognerà paragonare insieme le quantità $B. (\overline{A+C}^{\frac{1}{2}} - C^{\frac{1}{2}})$, in cui B rappresenta la larghezza della bocca, C il battente, ed A la profondità della

O o o 2

foglia

soglia inferiore sotto il battente. Nella così detta oncia d'acqua sarà un tale prodotto $3(6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) = 3(6 \times 2,44955 - 2 \times 1,41421) = 35,60484$; e però il numero $35 \frac{3}{100}$, ossia $35 \frac{1}{3}$ prossimamente, farà come l'unità, a cui si dovranno riportare i prodotti consimili di altre bocche per avervi il numero delle once d'acqua. Per esempio in una bocca d'oncia $2 \frac{1}{2}$ di battente, $4 \frac{1}{2}$ d'altezza libera, e 5 di larghezza, farebbe tutto il prodotto 72,825, e però dividendolo per 35,60484 farebbe la portata della bocca di 2,045 once d'acqua.

La fezione del Naviglio grande di Milano al Ponte di Castano è larga braccia 35, e vi si possono supporre 30 once d'altezza d'acqua: e però tutta la fezione è di 12600 once quadre del nostro braccio, ed è 1050 volte maggiore dell' area d'una bocca che porti un' oncia d'acqua e che abbia 3 once del braccio di larghezza, 4 di altezza libera, e 12 di superficie. Ma la quantità d'acqua non deve già misurarsi dalla semplice altezza e larghezza delle sezioni. Facendo entrare nel calcolo ancora l'elemento della velocità secondo i principj già esposti, e trascurando la velocità superficiale, farebbero i numeri da moltiplicarsi in quella fezione del Naviglio grande $12 \times 35 \times 30 \times \sqrt{30}$, e prendendo 5,477 per la radice di 30 farebbe tutto il prodotto 69010,2, e dividendolo per 35,60484 farebbe la portata del Naviglio di 1938 once d'acqua, e risulterebbe poi un poco maggiore se vi si tenesse conto della velocità superficiale. Parimente al Ponte d'Inzago la larghezza del piccolo Naviglio è di braccia 17, l'altezza d'acqua d'oncia 30, la fezione di once quadre 6120, cioè 501 volte maggiore della fezione della bocca di un' oncia d'acqua. Ma il prodotto da ridursi farebbe $12 \times 17 \times 30 \times \sqrt{30}$, e trascurando pure la velocità superficiale farebbe la portata del piccolo Naviglio di 941 once d'acqua. I nostri antichi Ingegneri, poste le dimensioni medesime a quei due ponti, avevano giudicato che la portata del Naviglio grande era di circa 1000 once d'acqua, e quella del piccolo Naviglio di 500, come si legge nelle relazioni dei due Navigli pubblicate dal Somaglia e dal Settala. La corrispondenza dei numeri indica chiaramente d'onde sia nato tutto l'errore, cioè dall' essersi valutata la quantità d'acqua dall' area semplice delle sezioni. Avendo riguardo alla velocità e alla legge, con cui la velocità deve crescere nelle maggiori profondità, la quan-

tità

tità d'acqua nei due Naviglj risulta quasi il doppio maggiore di quella che supponevasi anticamente.

Questo è il primo risultato che mi si è presentato dodici anni fa quando ho incominciato ad applicare ai calcoli delle nostre acque lo stesso metodo, che il Guglielmini, il Manfredi, il Grandi, e tanti altri Autori avevano applicato a tanti altri casi. Ma non mi sono fermato su questa prima applicazione delle teorie, e passando dai primi agli ultimi tronchi dei due Naviglj ho cercato il rapporto delle quantità d'acqua, che vi decorrono, con quelle che si è creduto sempre di estrarre. La larghezza del Naviglio grande a Gozano, o come volgarmente dicevsi Gaggiano, è di braccia 25, e l'altezza ordinaria d'oncia 20: onde supponendo che tutta la sezione sia libera, secondo i principj già esposti, la quantità d'acqua risulterebbe d'oncia 753. Non vi è da sospettare che il ringorgo delle ultime chiaviche del Naviglio si stenda per circa otto miglia dalla porta, che chiamasi Ticinese, fino a quel luogo. Mentre secondo la livellazione indicata nel capo primo la caduta del fondo da Gozano a Milano è di circa due braccia, e non sono tanto alte le chiaviche per cui si dirama il residuo del Naviglio a Milano, ed esse ordinariamente si tengono aperte per ripartire le acque residue sulle campagne. Non vi è adunque da fare eccezione alcuna che quella sezione non sia del tutto libera. Se si volesse tener conto della resistenza del fondo e delle sponde, essendo così regolare l'alveo del Naviglio, e non potendo essere che molto piccola la distanza, in cui l'acqua resti stagnante tra le prominenze di tutto l'alveo, come anche portano le ragioni e le sperienze prodotte nel Capo II. del Libro I. di questa II. Parte; supponiamo che al ristagno dell' acqua per cagione di tutte le resistenze abbiano a darsi due oncie di altezza sul fondo, e tre oncie per parte dalle due sponde, cioè supponiamo che l'altezza libera sia solamente di oncia 18, e la larghezza di braccia $24\frac{1}{2}$. Con queste riduzioni la quantità d'acqua risulterebbe ancora di oncia 630.

Il numero delle oncie d'acqua, che si crede volgarmente di estrarre dal Naviglio grande da Gozano fino a Milano, non arriva alla metà: e in qualunque maniera si voglia rifare il calcolo, o dando un poco di più alle resistenze del fondo e delle ripe, o prendendo le

fe-

sezioni del Naviglio in qualche luogo che sia più lontano dalle chievhe delle ultime diramazioni, si troverà sempre che la quantità d'acqua del Naviglio grande è di gran lunga maggior di quella che se n'estrae: e nel piccolo Naviglio si troverà pure la stessa cosa, se la portata d'una sezione di circa 18 braccia di larghezza, e circa 18 once di altezza, sotto allo sbocco del Lambro, dove la sezione può crederfi affatto libera, si paragoni col numero delle once d'acqua, che si estraggono dal tronco inferiore del Naviglio, anche per tutto il recinto della Città. Una differenza così grande non può certamente attribuirsi nè all'evaporazione dell'acqua, nè all'assorbimento del terreno. Il fondo degli ultimi tronchi dei due Navigli non essendo nè ghiaioso, nè arenoso, ed essendo tanto più basso di tutto il piano della campagna, non può lasciare che si disperda continuamente tant'acqua: anzi in molti luoghi si vede sparso di piccole forgive, che restituiscono nel Naviglio quel poco che può disperdersi in qualche altro luogo. L'evaporazione nei nostri paesi può valutarli di circa 36 pollici Parigi per anno, e di circa un pollice ogni dieci giorni, ed anche senza contare il compenso delle piogge non può portare che delle differenze affai minori. Per l'altra parte i principj dei calcoli antecedenti, quantunque non siano suscettibili d'una rigorosa e Geometrica dimostrazione, hanno però tutta la certezza Fisica che può desiderarsi in queste materie, e sono pienamente conformi alle più precise sperienze che si sono potute fare negli alvei regolari, e nelle acque che corrono per la semplice pressione, come si è lungamente provato nel capo quarto del libro terzo: ed hanno anzi un altro riscontro di verità nelle nostre bocche d'irrigazione, come si è detto nel Coroll. III. del Teor. IX. del Libro stesso. Bisogna adunque cercare nella struttura delle bocche medesime la ragione di tutta la differenza che si è trovata.

Le figure 134 e 135 rappresentano il profilo e la pianta d'una bocca che estragga da uno dei due nostri Navigli quella quantità d'acqua che secondo la stima volgare si valterebbe sei once.

AA è la foglia della bocca che ha 18 once di larghezza, e deve tenerfi rilevata di once 8 sopra il fondo corrispondente del Naviglio.

BB è il castello che volgarmente chiamasi tromba coperta della
lun-

lunghezza di braccia 9 e di figura rettangolare, che disotto alla soglia si allarga 5 once per parte, e così in tutto ha la larghezza d'once 18.

CC è il modello della bocca, istessamente largo once 18, alto once 4, e che ha disopra il battente X alto once 1: e il battente si forma dal coperto orizzontale F, alto once 6 sopra il labbro inferiore, e 1 sopra il labbro superiore della bocca.

DD è l'altra tromba scoperta lunga braccia 9, che si allarga once 2 immediatamente sotto al modello, e once 5 sul fine, che si tiene once $1\frac{1}{2}$ più bassa di fondo del labbro inferiore del modello, e che in tutto ha la pendenza di un' oncia.

G è la volta che serve per sostenere la strada, E una cataratta che può alzarsi ed abbassarsi. Il cancelliere Settala scrisse che il fine di mettere la cataratta era per togliere la veemenza dell' acqua in ogni caso di efrescenza, e per poter regolare il battente.

Per regola del battente si lascia aperto un piccolo foro nella volta F, e si alza o si abbassa la cataratta E infino a tanto che calando una verga nel foro si riconosca che l'acqua non salga oltre il livello del piano inferiore della volta: e fissando la cataratta in quel luogo volgarmente si crede che quantunque l'altezza dell' acqua sia d'once 10 sul fondo del Naviglio, d'once 12 sul labbro inferiore, e 8 sul labbro superiore della bocca, l'altezza dell' acqua che preme sopra la stessa bocca non sia che di 2 once.

Questa complicazione di meccanismo, l'errore di rapportare la foglia della bocca al fondo del Naviglio più tosto che alla superficie, e di prendere per misura della pressione l'altezza dentro la tromba più tosto che tutta l'altezza dentro il Naviglio, lo stesso termine di oncia d'acqua, che si confonde continuamente colle once e del braccio e della libbra, tutto annunzia la rozzezza dei tempi, in cui hanno avuto principio queste volgari pratiche. Negli altri Paesi quando si è voluto fissare un sistema sicuro nel riparto delle acque, anche a' giorni nostri, anche in vista dei modelli delle nostre bocche, si è preso il miglior partito di aprire delle bocche rettangole nelle sponde del canale principale, di rapportarle al livello ordinario della superficie, di collocarle tutte ad uguale profondità nel labbro superiore e in-

e inferiore, e di accrescere la larghezza delle bocche nella proporzione medesima, con cui volevasi accrescere la quantità d'acqua. In questa maniera si sono terminate felicemente le differenze inforte per la distribuzione delle acque nel territorio Mantovano e Veronese.

In qualunque maniera si voglia fabbricare una bocca è affatto indifferente di osservare quanto vi resti inferiore il fondo del canale, da cui deve derivarsi una data quantità d'acqua. Ciò che bisogna osservare si è di quanto vi resti superiore la superficie dell' acqua che preme. Nelle nostre bocche si suppone che la pressione si debba misurare dall' altezza dell' acqua, ch' è trattenuta dentro la tromba e non da tutta l' altezza del Naviglio: e in questa supposizione s' involge l' assurdo accennato che fatti tutt' i soliti calcoli, e tutte le riduzioni, la quantità d' acqua del Naviglio sia più del doppio maggiore di quella che se n' estrae. Presentiamo adesso l' assurdo sotto un altro punto di vista. Supponiamo che nel Naviglio si riduca l' altezza dell' acqua ad once 14: supponiamo che siano alzate le cateratte, e che l' acqua dentro la tromba si riduca al livello istesso del Naviglio, cioè che s' alzi di 2 once sul labbro superiore della bocca, e di 6 sul labbro inferiore, ch' è di 8 once più rilevato del fondo del Naviglio. Tolta la differenza del battente esterno, ed interno si toglie pure ogni controversia. In questo caso riassumendo i dati del calcolo antecedente, dando once 2 agl' impedimenti del fondo, e supponendo che la larghezza libera del Naviglio a Gozano sia di braccia $24\frac{1}{2}$, l' altezza libera di once 12, e la radice dell' altezza 3,464, la portata di tutto il Naviglio da Gozano a Milano risulterebbe di once 343: e siccome se ne estraggono once 312 incirca, s' vanisse ogni assurdo, la differenza delle quantità d' acqua è assai piccola, e dandone qualche parte all' evaporazione o a qualche dispersione del fondo, si può attribuire il resto a qualche maggiore larghezza che siasi tenuta nella misura di qualche bocca. Supponiamo adesso che l' altezza del Naviglio passi dalle once 12 alle 20, e che per conseguenza vi decorrano 630 once d' acqua: e se abbassando le cateratte insino a tanto che l' acqua nel foro libero non salga oltre il livello di prima, se restando il battente di 2 once entro la tromba se ne estraeffe la stessa quantità d' acqua di prima, come volgarmente si crede, dimando dove vanno le circa 300 once d' acqua, che sono

cre=

crefcute nel Naviglio, dimando fe l'ultimo refiduo che fi riparte fulle campagne inferiori è ancora di once 32.

Per ufcire da quefti e da tant' altri confimili affurdi bifogna ripigliare il filo delle teorie, e le teorie c' insegnano che fe da un fiume o da un canale qualunque farà derivato un fifone o un altro canale fecondario che termini in una bocca d'una data mifura, qualunque fia la forma del fifone, e comunque la comunicazione col fiume fi reftinga o fi allarghi per mezzo di qualche cateratta, quando la comunicazione fia libera, la velocità in un dato punto della bocca non corriponderà all' altezza che avrà l'acqua nel canale di derivazione, ma a tutta l'altezza del canale principale fopra quel punto. Anzi generalmente in qualſivoglia combinazione di canali, che comunichino inſieme tra loro liberamente, e che colle cateratte ſi tengano o più alti o più baſſi, la velocità in un punto dato non corriponderà mai all' altezza vera, ma all' altezza maſſima delle acque liberamente comunicanti. L'eſempio più ſemplice che poſſa addurſi ſi è quello di un cono ripieno d'acqua, in cui ſe ſi farà un' apertura laterale, anche vicino al margine, la velocità non corriponderà all' altezza vera dell' acqua nel luogo dell' apertura, ma a tutta l'altezza dell' aſſe. Queſto è il riſultato di quanto ſi è detto nel Capo III. e IV. del Libro III. Alle diuerſe prove di queſta verità ſi è aggiunta nel Teor. IX. ancora un' eſperienza fatta nelle noſtre bocche, e nel Probl. VII. dello ſteſſo libro ſi ſono rilevati degli altri aſurdi, che naſcerebbero ſe in altri caſi analoghi la velocità ſi miſuraſſe dall' altezza vera dell' acqua ſopra di un dato punto, e non dall' altezza maſſima.

Daniello Bernoulli nel §. XIX. della Sez. VIII. della ſua Idrodinamica conſiderò il caſo di varj tubi contigui, dal primo dei quali poteſſe il fluido paſſare nel ſecondo per mezzo di un foro, e dal ſecondo nel terzo, e così ſucceſſivamente, uſcendo poi liberamente dal foro aperto nell' ultimo tubo: e ricercando la velocità del fluido in ciaſcun foro quand' eſſa foſſe ridotta allo ſtato di permanenza, e quando l'altezza del fluido in ciaſcun tubo rimaneſſe coſtantemente la ſteſſa; ſuppoſe che ſi poteſſe fare in maniera che la velocità del fluido nell' entrare in un tubo reſtaſſe come *aſſorbita*, e non contribuiffe punto ad accreſcere la velocità dell' uſcita, *quod certe non fiet*

Meccanica.

P p

nifi

nisi expresse opera detur ut id aliquantum fiat; e posta una tale condizione suppone lo stesso Autore che la velocità del fluido in ciascun foro sia proporzionale alla radice dell' altezza del tubo da cui esce, e non già alla radice dell' altezza massima di tutt' i tubi. Il Sig. Bossut nella Propos. IX. del Cap. I. della Parte II. dell' Idrodinamica riassumendo lo stesso problema, perchè la stessa condizione potesse aver luogo, perchè si potessero riguardare come nulle le oscillazioni e le variazioni occasionate in un tubo pel passaggio del fluido nell' altro tubo, suppone ancora che i fori fossero *infinitamente piccoli*, e che neppure fossero situati in linea retta: nel qual caso non potrebbe più avervi una corrente continuata da un foro all' altro, e perdendosi la velocità acquistata nel passare dal primo tubo nel secondo si potrebbe considerare che il fluido passasse nel terzo tubo come se vi arrivasse dal secondo immediatamente: cioè in questo caso i tubi si potrebbero considerare come isolati e staccati l'uno dall' altro, e la velocità si potrebbe calcolare in ciascun foro come se vi fosse un tubo solo. Ma questo non è già il caso di un' apertura di un quarto di braccio di larghezza, e un terzo di altezza libera, distante 9 braccia dall' apertura fatta di contro nel canale principale, non è il caso d'una bocca che versi più di 32 brente d'acqua per ogni primo minuto.

L'ampiezza e la forma regolare della bocca, e il diretto e libero passaggio dell' acqua non lascia neppure sospettare che le resistenze del fondo rettangolare, e dei lati paralleli possano togliere la velocità acquistata nel passare dal Naviglio nella tromba coperta, e non permette di supporre che l'acqua esca dalla tromba coperta come se non vi avesse alcun corso, e vi si potesse riguardare come stagnante. L'oculare ispezione ci può assicurare che il corso dell' acqua dentro la tromba è continuo. Tutte le osservazioni e le ragioni addotte nel Cap. II. del Lib. I. di questa II. Parte, anche secondo il giudizio degli Autori più celebri, provano abbastanza che l'acqua passando da una bocca rettangola all' altra direttamente nella distanza di poche braccia, e tra sponde parallele non può perdere per lo sfregamento delle pareti una porzione sensibile della velocità: e per perderla tutta bisognerebbe immaginare un' altra forma di condotti e di bocche. Dunque se l'acqua nel Naviglio arrivasse a 20 once di altezza sul fondo sottoposto, e 12 sull' oriz-

orizzontale tirata per la foglia della bocca *C*, e se il fondo della tromba coperta arrivasse fino al labbro superiore della bocca; l'acqua scorrerà sopra il fondo da *A* in *C* colla velocità che si acquisterebbe cadendo dall' altezza di once 12: e se il fondo della tromba fosse inclinato, e incominciaste a sorgere dal fondo del Naviglio, come si vede in diverse bocche; l'acqua incomincerà a scorrervi colla velocità che si acquisterebbe cadendo da tutta l' altezza di once 20, e salendo per un piano inclinato fino all' altezza di 8 once, arriverà ancora in *C* colla velocità corrispondente all' altezza di 12 once: e colla stessa legge proporzionatamente si potrà misurare la velocità negli altri punti della bocca.

Ma si dirà perchè dunque l'acqua nel foro aperto della volta non sale più di 6 once sull' orizzontale *BC*, perchè non si compone al livello medesimo del Naviglio? Io qui lascio di dire che in un foro di circa una mezz' oncia di diametro non può riguardarsi il moto come affatto libero, ch' è troppo incerto l' esperimento della verga calata nel foro, che in tanti casi di qualche rottura della volta vi si è veduta risalir l'acqua ad un' altezza maggiore. Suppongo che l' esperimento sia fatto come si crede, e rispondo che poste tutte le cose antecedenti possono occorrere tre casi differenti: che per l' apertura *A* entri più acqua di quella, che possa uscire in egual tempo dalla bocca *C*, o che entri la quantità istessa che n' esce, o ancora che n' entri meno. Nel primo caso l'acqua dentro la tromba ringorgherà sopra il labbro superiore della bocca: nel secondo caso non vi potrà formare superiormente battente alcuno: e nel terzo neppure si vedrà piena tutta la fezione della bocca. Però quand' anco fosse levata la volta *F*, e l'acqua liberamente spandendosi dentro la tromba formasse il battente *X* di 2 once, ciò non proverebbe altro se non che al principio la cateratta *E* si sia alzata tanto quanto bastava perchè entrasse dentro la tromba, e quella quantità d'acqua che può uscire in egual tempo dalla bocca *C*, e di più quella che vi resta al disopra stagnante per 2 once di altezza. Perchè ciò si comprenda colla maggiore evidenza, supponiamo novamente che sia tirata la volta al livello medesimo del labbro superiore della bocca. Anche senza i principj dell' Idraulica nessuno dirà mai che l'acqua debba uscire dalla bocca con eguale ve-

locità vi siano; o non vi siano nel Naviglio sopra la stessa linea di livello otto once d'altezza d'acqua che preme: e i principj dell' Idraulica ci assicurano, che la velocità dell' acqua nel labbro superiore della bocca deve esser quella che si acquisterebbe cadendo da tutta l'altezza di otto once, s'è di otto once la differenza dei due livelli. Ora supponiamo che alzata la cateratta, e la volta vi s'alzi l'acqua di dentro per due altre once di altezza, e vi formi il consueto battente. Nissuno dirà mai che accrescendo l'altezza d'acqua entro la tromba si diminuisca la velocità, e si riduca solamente a quella che si acquisterebbe cadendo da due once d'altezza: e secondo tutt' i principj antecedenti si dovrà dire, che la velocità dell' acqua corrisponderà insieme e alle due once d'altezza che si hanno egualmente e nel Naviglio e nella tromba, e alle altre sei once che si hanno di più nel Naviglio.

Forse una volta sembrerà ch' io mi sia troppo diffuso nell' applicare gli elementi dell' Idraulica ai casi delle nostre bocche. Ma adesso era necessario di sciogliere tutt' i dubbj, che si possono mai presentare in quest' applicazione, e di far vedere più chiaramente che nelle nostre bocche, come in tutti gli altri tubi che comunicano insieme, la velocità e la pressione non deve già misurarsi dall' altezza dell' acqua, che sovrasta immediatamente ad un foro, ma dall' altezza massima, che ha l'acqua sopra il livello del foro istesso: ciò posto si deve quì ripigliare il filo dei calcoli antecedenti. Se adunque l'altezza d'acqua nel maggiore Naviglio si supponrà d'once 20, la quantità d'acqua che passerà per una bocca di 3 once di larghezza, 4 di altezza libera, e 8 di altezza sul fondo sarà
$$\frac{3(12\sqrt{12}-8\sqrt{8})}{35,60484},$$

cioè non farà già un' oncia d'acqua, come si crede comunemente, ma circa $1 \frac{1}{7}$: e così le once 312, che si crede di estrarre dall' ultimo tronco del Naviglio grande sotto a Gozano, nello stato ordinario d'acqua faranno veramente circa 500. Così pure supponendo che l'altezza ordinaria del piccolo Naviglio, che si deriva dall' Adda, sia d'once 18, e supponendo che nelle bocche modellate alla stessa maniera l'altezza della foglia sul fondo sia d'once 8 con 4 once d'altezza libera; farebbe il battente di once 6, e nella larghezza libera

bera di once 3; si avrebbe la quantità d'acqua $3 \left(\frac{10 \sqrt{10-6 \sqrt{6}}}{31.60484} \right)$;

cioè non già una sola oncia d'acqua, come comunemente si crede di estrarre, ma bensì $1 \frac{1}{4}$.

Qualunque sia il tenore delle antiche convenzioni; nelle quali si accordava di aprire in un Naviglio, o nell' altro delle bocche in una data maniera, e si acquistava ragione full' acqua che se ne poteva derivare; era quì da rilevarsi l' errore puramente idrometrico di credere che la pressione si dovesse misurare dall' altezza dell' acqua sovrapposta immediatamente alle bocche, e non dell' altezza libera del Naviglio: e presa per misura dell' oncia generalmente una bocca che abbia tre once di altezza, quattro di altezza libera con due altre once di altezza d' acqua stagnante; bisognava in conseguenza correggere l' errore aritmetico di chiamare un' oncia d' acqua quella ch' è $1 \frac{1}{4}$ nel maggior Naviglio, e $1 \frac{1}{4}$ nel minore. Con questa correzione si viene a togliere l' enorme sproporzione, che altrimenti si avrebbe tra la portata dei due Navigli, e la quantità d' acqua, che si crede di estrarne. Il divario che nella volgare supposizione di due sole once di battente farebbe di circa 300 once in altre 300, colle altre approssimazioni antecedenti si ridurrebbe a 100 once in 500. Egli è vero che il residuo di 100 once d' acqua può sembrare maggior di quello, che debba darsi all' evaporazione, a qualche afforbimento del fondo, a qualche esuberanza nella misura delle bocche, a qualch' altra riduzione da farsi nella libera ampiezza della sezione del Naviglio, che ha servito per base delle altre misure. Io non ho dati più precisi per passare alle differenze più piccole. Mi basta di avere ridotta la differenza a questi limiti, e di avere cavato dalle teorie generali del Guglielmini, del Manfredi, del Grandi, ed altri Autori le regole di misurare la quantità d' acqua e in ciascuna sezione dei nostri Navigli, e in ciascuna delle bocche che se n' estraggono.

CAPO SESTO.

DEGLI ALTRI CANALI DELLE CAMPAGNE, E DELLA BONIFICAZIONE
PRINCIPALMENTE DELLE PALUDI PONTINE,
E DI ALCUNI LAGHI DEL MILANESE.

DOvrebbe averli sempre per una delle massime generali e fondamentali del sistema economico e fisico di qualunque paese quella di preferir la coltivazione alla pesca, e di restringere le inondazioni dentro il minore spazio possibile. Gli Antichi Romani ci hanno lasciato delle opere grandiose in questo genere, come l'emmissario aperto dal lago di Celano sino al Garigliano, lo scavo sotterraneo, che dà esito al lago di Albano, il grand' alveo, che richiama a se tutte le acque delle antiche diramazioni del Po ha servito ad asciugare le paludi di Parma e di Piacenza. Tra i monumenti dei secoli di mezzo si deve nominare principalmente lo scavo di 4850 palmi Romani di lunghezza, che il Celebre Capitano Braccio Fortebracci ha fatto aprire nel monte per dar esito alle acque del lago Trasimeno, scavo che il Sig. Perelli celebre Matematico ha proposto dodici anni fa di ridurre dalla larghezza ragguagliata di palmi $3\frac{1}{2}$ alla larghezza di palmi $10\frac{1}{2}$, e dell'altezza di palmi 8 a palmi 10. Le paludi anticamente formate intorno all'Arno, e nominate varie volte da Tito Livio, devono essere state asciugate, perchè messo l'Arno in canale, sprofondato il letto, principalmente nel passo della Golfolina, abbiano avuto uno scolo più facile le acque dei terreni vicini, come già s'è accennato nel Cap. IV. del Lib. I. di questa Par. II. Ed io similmente credo che essendosi regolato l'alveo del Tesino, e lo sbocco in Po si siano liberate dall'inondazione le campagne vicine, e asciugate le paludi, delle quali parlò il Muratori nella dissertazione ventesima delle antichità del medio evo: e credo pure che il nuovo emmissario aperto all'Adda nelle parti più basse del Po, che ancora ritiene il nome di bocca d'Adda, sia stata la cagione dell'asciugamento di tutto il lago Gerondio, le cui vestigia, i luoghi di sbarco, e le torri indicano bastantemente che si stendesse per alcune miglia nelle più basse pianure del Lodigiano.

A'

A' giorni nostri si sono progettate in diversi luoghi tant' altre bonificazioni. Si è proposto di provvedere agli scoli delle campagne situate tra l' Arno e il Serchio facendoli passare sotto il Serchio con una botte, e portandoli con un canale sotterraneo attraverso al monte Ballano sino a sboccare nel lago di Macciuccoli: ed io non dirò altro di questo progetto che ricercerebbe una digressione più lunga, e inopportuna in questo libro. Si è progettato pure di asciugare le paludi di Mantova aprendo il sostegno di Governolo, togliendo tutti gl' impedimenti dei mulini, e incanalando il Mincio sotto alle fortificazioni della Città: ed io neppure mi stenderò su quest' altro progetto, ch' è già stato proposto col maggiore dettaglio da chi dimorando sul luogo ne aveva una cognizione ben superiore a quella che io possa essermi acquistato passandovi. E così pure non farò qui che accennare l' idea di rialzare il livello del Lago di Como, idea suggerita da un illustre, e rispettabile Autore per trattenerne se fosse possibile, e ridurre a minore altezza le piene del Tesino, e dell' Adda: poichè calcolando la quantità d' acqua, che decorre per una sezione del Tesino, o dell' Adda in tempo di piena si troverebbe che quand' essa potesse trattenerfi in parte rialzando di un braccio o due gli emissarj, basterebbe per rialzare di altrettanto in poche ore il livello dei laghi, e così non verrebbe a ritardarsi che di poche ore il colmo della piena, e passato un tal tempo, proporzionandosi la quantità d' acqua, ch' entra, e che scende dai laghi, continuerebbe la piena a decorrere come prima. Per l' altra parte le circostanze particolari delle terre, e delle case che trovanfi in riva ai suddetti due laghi, e al lago di Lugano, non sembra che comportino di fare alcuna variazione nè in più nè in meno nel livello dei nostri tre laghi principali: e la profondità del lago di Pusiano, e la salubrità dell' aria di que' contorni non permette similmente che si proponga di fare variazione alcuna in quest' altro lago.

Ma in alcuni altri minori laghi del Milanese, che sono più tosto marazzi, e ristagni d' acque, e in cui le acque avendo e poca profondità, e pochissimo moto rendono l' aria insalubre, vi sarebbero da proporre alcune providenze assai facili. Il lago di Brivio, che ha la lunghezza di circa tre miglia, e la larghezza in qualche luogo d' un
mi-

miglio, non è in gran parte che un lago artificiale. Le acque con una chiusa di legno vi si fanno ringorgare all' altezza di più d' un braccio sopra il pelo dell' Adda, che corre incanalata al di sotto della chiusa: i fondi sono assai bassi intorno alle rive, e la navigazione non può continuarsi in ogni tempo liberamente se non nel mezzo del lago: e però non vi è dubbio che levando interamente la chiusa si verrebbe a guadagnare un' estensione considerabile di terreno, massime se dopo ciò si pensasse a restringere le piene dell' Adda cogli argini, ed a metterla anche superiormente in canale. I laghetti di Civate, e di Oggiono hanno la caduta di braccia 48 sopra il pelo del lago di Lecco come si è detto nel capitolo quarto di questo libro: onde allargando semplicemente, e sprofondando l' emissario dei due laghetti, sgombrandolo dai maggiori impedimenti del fondo, e raddrizzandolo in alcuni luoghi, vi farebbe da guadagnare non poco e per la coltivazione, e per l'escavazione della torba, e per la salubrità dell' aria di que' contorni. L' emissario nel lago di Varese nel lago Maggiore ha tanta caduta, ed è tanto tortuoso, che solamente con qualche raddrizzamento si potrebbe facilitare lo scarico delle acque, e si potrebbero guadagnare tanti bassi fondi, che sono nel contorno di quel lago, senza pregiudizio de' mulini che sono nell' emissario. L' emissario dei due laghi più piccoli di Sartirana, e di Novate, cade da tutta la costa dell' Adda, e scavandolo di più li potrebbero molto restringere, e forse anche asciugare interamente quei due marazzi.

In molti luoghi della Toscana, e massime nei contorni del lago di Fucecchio, e in Valdichiana si sono bonificati dei vastissimi poderi col metodo delle colmate. Le colmate si fanno in due maniere, o a foce libera e aperta, o a terreno ferrato e regolato. La prima è quando si rivolge un fiume torbido, o un ramo di esso sopra un fondo più basso, in cui spandendosi liberamente, e rallentandosi di corso lasci delle maggiori deposizioni. La seconda è quando il terreno da colmarsi si cinge di piccoli argini, e vi si fanno entrare le acque torbide da una parte, e uscire dall' altra dopo di essersi chiarificate, regolando l' ingresso, e l' egresso colle opportune chiaviche, e replicando l' operazione in tanti luoghi, e tante volte quante bisogna. Il primo metodo è analogo a quello, con cui nell' Infubria inferiore, e massime nei contorni del Po,

si

si fanno servire le acque delle inondazioni e delle rotte ed alzare di livello i terreni, ed a poterli coltivare e scolare più facilmente: ed è anzi lo stesso metodo, con cui nel Bolognese, nel Modenese, e nei Polesini di Ferrara, e di Rovigo si sono cambiati in belle campagne tanti terreni, che prima erano incolti e paludosi. Il metodo di colmare a terreno ferrato non è ancora ben conosciuto nel nostro Paese, e si potrebbe forse praticare utilmente per bonificare dei bassi fondi, che restano nei contorni dei laghi, e per migliorare degli altri luoghi dell' Infubria superiore. Il Guglielmini nel Cap. XIII. ha notato le principali avvertenze da averfi intorno al trasporto degli argini, e intorno all' escavazione, ed alla protrazione dei due condotti, che abbisognano, l' uno dal Fiume, onde derivansi le acque torbide, fino al luogo della colmata, l' altro dalla colmata al luogo dallo scolo: e le avvertenze sono in sostanza, che facendosi delle maggiori deposizioni nelle maggiori vicinanze del fiume, nel progresso della colmata bisognerà allungare il primo condotto, e restringere il circondario degli argini: e in proporzione che si va alzando il terreno non potendovisi rivolger sopra che le acque più vicine alla superficie del fiume, e per conseguenza meno torbide; il progresso della colmata sarà sempre più lento, ma sarà ancora successivamente più facile lo scolo delle acque chiarificate, e si potrà in un dato tempo rinnovar l'acqua un maggior numero di volte. Io non mi stenderò su tutte queste avvertenze, e perchè sono assai ovvie, e perchè penso che volendosi fare delle colmate dove ancora non siano in uso, come per esempio nella Lombardia, il partito più semplice sarebbe quello di chiamare dei lavorieri dagli altri Paesi dove abbiano avuto occasione di farne delle altre, come per esempio della Toscana.

L'anno 1766 mentre io mi ritrovava in Olanda ho veduto gli argini, con cui dalla parte di Amsterdam si è posto un limite alle espansioni del Lago di Haerlem: Lago che per la forza dei venti e delle onde si è già tanto avanzato sopra le rive, che sono di un terreno fradicio e sciolto, e che si scavano in molti luoghi fino alla profondità di 40 e più piedi per avere la torba, quella specie di bitume che serve in Olanda pel fuoco. Ho pure riconosciuto in vicinanza della città di Amsterdam i contorni di un Lago, che alcuni anni prima

Meccanica.

Q q q

era

era stato asciugato, e in cui le acque piovane si andavano successivamente scolando coll' uso dei mulini a vento. Il meccanismo dei mulini non è ancora perfezionato nel nostro paese: ma i mulini a vento neppure vi sono stati introdotti. In un paese tanto abbondante d'acque, com' è il nostro, non si è pensato a farne economia nei mulini, seguendo col fondo del canale la curvatura istessa della ruota, e flettendo le ale tra due piani verticali, in cui seguitasse l'acqua ad agire col proprio peso, come si pratica in altri luoghi, e come possono facilmente rilevare gli artefici dalle figure, che trovansi nell' *Enciclopedia*, e in altre Opere. Neppure si trovano nel nostro Paese di quei mulini che hanno la ruota orizzontale, e le ale inclinate, e di cui si fa uso in Toscana, in Provenza, e nel Delfinato: nè di quegli altri mulini che si vedono in Linguadocca, e che hanno le ale disposte obliquamente, e a forma di spirale sopra una specie di cono rovesciato e verticale: e nemmeno s'è ancora costrutta alcuna di quelle macchine che si muovono per la forza o del fuoco o del vento. Eppure i mulini a vento, già tanto vantaggiosamente adottati in tanti altri luoghi montuosi e piani, marittimi e mediterranei, potrebbero riuscire benissimo in vicinanza dei nostri laghi, e delle nostre montagne dove i venti sono gagliardi, e ancora in altre parti delle colline, e delle pianure, dove interrottamente si hanno dei venti sufficienti per un mulino: e l'utile sarebbe assai grande per quei luoghi principalmente, che essendo più lontani dai fiumi hanno in tempo d'estate una maggiore difficoltà di trasporto per la macinazione.

I mulini a vento colle ale verticali, a noi venuti dall' Asia nei barbari tempi delle Crociate, hanno ricevuto in Europa diverse forme, e diversi miglioramenti. In Germania, in Francia, e massime nei contorni di Parigi tutto il castello del mulino suol farsi mobile insieme coll' asse delle quattro ale, e si rivolge successivamente alle varie direzioni del vento. In Olanda si sono fabbricati molti mulini a torre, dove solamente è mobile l'asse insieme col tetto. Gli artefici ne troveranno una minuta descrizione nell' opera del Belidor, e nel *Dizionario Enciclopedico*. I primi che ne spiegarono la teoria, Giovanni Bernoulli, e Cristiano Huygens, nella supposizione della velocità del vento infinita relativamente alla velocità delle ale, supposizione che
ha

ha luogo nella prima impulsione del vento, quando s'incomincia a dar moto al mulino, trovarono che la forma più vantaggiosa dev'esser quella, in cui le ale coll' asse formino l'angolo di 54 gradi, e 54 minuti: come ancora si può ricavar facilmente dai principi medesimi del Probl. XIV. del Lib. III. Daniello Bernoulli ha avvertito che volendo prescindere dalle altre considerazioni dei soffregamenti e delle resistenze, l'angolo più vantaggioso delle ale coll' asse dovrebbe essere minore di gradi 54 nella continuazione del moto, quando tutta l'azione dipende dalla differenza delle velocità assolute del vento e delle ale, velocità che qualche volta arrivano ad uguagliarsi nelle parti estreme delle ale istesse. Finalmente il Sig. Eulero facendo entrare nel calcolo ancora le resistenze e i soffregamenti, ha trovato che l'angolo dell' inclinazione dovrebbe anzi esser maggiore di gradi 55, e che per l'effetto migliore la larghezza delle ale dovrebbe esser dappertutto la stessa più tosto che diminuirsi verso l'asse, come può vedersi negli atti dell' Accademia di Berlino. I mulini orizzontali, che chiamansi alla Polacca, sono stati ideati sul fine del secolo passato, hanno ricevuto diversi gradi di perfezione nel secolo presente, e sotto diverse forme se ne sono costrutti varj nei contorni di Parigi, di Lione, e di Marsiglia, in Polonia, e in Portogallo. La descrizione e la teoria di quest' altra specie di mulini si trova bastantemente spiegata nel secondo Tomo delle Memorie di Marsiglia stampate l'anno 1756.

In Francia si suol dare comunemente alle ale verticali l'inclinazione di gradi 60 coll' asse orizzontale del mulino. In Olanda i mulini che servono per dar moto alle macchine a rosario, e per asciugare i terreni paludosi, prendono naturalmente da loro stessi la necessaria direzione: e quelli, che hanno servito meglio a tal effetto, hanno l'inclinazione di ciascuna delle quattro ale coll' asse di circa gr. 73, la larghezza di piedi 4, e la lunghezza di 43 piedi di Francia. Cornelio Mejer celebre Ingegnere Olandese, sul fine del secolo passato, propose in Toscana di far uso di questi mulini per asciugare il Lago di Macciuccoli: e però ho creduto ancor io di dover accennare che se ne potrebbe far uso per la bonificazione di alcuni terreni nel nostro Paese. Nei luoghi di maggior estensione, di maggiore profondità di acque, e massime di torrenti e di fiumi disalveati si ricercano delle

Q q q z

prov-

provvidenze molto maggiori. Si è già spiegato abbastanza il caso principale e più celebre: s'è detto con quali operazioni si sia bonificata a' tempi nostri una gran parte delle pianure più basse del Bolognese. Convien quì aggiugnere qualche cosa di un altro caso, pure assai celebre e grande, delle bonificazioni incominciate in questi ultimi anni nella Campagna di Roma delle Paludi che chiamansi Pontine.

Le Paludi Pontine si stendono al lungo della via Appia da Tramontana a Mezzogiorno per circa 18 miglia di lunghezza tra Sermoneta e Terracina. La larghezza in alcuni luoghi arriva a 7 e 8 miglia: le Paludi sono divise a ponente dal mare con una continuazione di promontorj. I fiumi Cavata e Ninfa, il torrente Teppia, e l'acqua Puzza, che vi entrano dalla parte superiore di Sermoneta, e che non hanno caduta bastante per arrivare agli ultimi sbocchi nel mare vicino a Terracina, sono la cagione principale dell' inondazione di quei terreni. Non si sono ritrovate delle sorgenti in tutto il circondario delle Paludi. Il fiume Uffente, che sorge più basso, e l'Amaseno, che va a sboccare nell' Uffente, non sono di danno alcuno alle campagne, anzi ricevono diversi scoli, e corrono tra le ripe arginati sino a scaricarsi nel mare poco lontano da Terracina. Monsignor Emerico Bolognini già Governatore di Marittima e di Campagna nelle sue Memorie dell' antico e presente stato delle Paludi Pontine, rimedj e mezzi per disecarle, sino dall' anno 1739 ci ha messo sotto l'occhio i passi degli antichi Scrittori che trattano delle Paludi, ha esaminato maturamente i due principali progetti, che sotto Martino V., e Sisto V. sono stati abbracciati per asciugarle, ed ha proposto e promosso fervidamente il primo progetto ad esclusione del secondo. Tutt' i Periti e Matematici consultati al suo tempo sono convenuti in tutte le di lui massime, ed io devo particolarmente onorare la di lui memoria, e per la famigliare corrispondenza, con cui esso mi ha onorato vivendo, e per l'impulso e il moto che ha dato a quanto si è fatto posteriormente. I passi degli antichi Scrittori sono:

I. Dionigi d' Alicarnasso parlando della grandiosa strada tirata da Appio Claudio da Roma a Capua attraverso alle Paludi Pontine nel Lib. XX. si esprime in questi termini: *Appiam viam a se sic nominatam magna ex parte duris lapidibus a Roma ad Capuam construxit, quod in-*

intervallum est stadium plus mille, & loca eminentia solo complanando, & depressa, cavaque magnis aggeribus exæquando, universum aerarium publicum exhausti. Ma siccome in questo passo non parlasi che della via Appia, e dei lavori fatti per sostenerla, così non se ne può mai inferire che siano perciò state asciugate le Paludi alla distanza di due o di tre miglia per parte.

II. Tito Livio nel Lib. XLVI. scrive: *Pomptinæ Paludes a Cornelio Cethego Consule, cui ea Provincia obvenerat, exsiccatæ, agerque ex his factus.* Ma la parola *ager* non può indicare un' estensione di terreno che sia da paragonarsi con tutto il circondario delle Paludi: e così da questo passo di Livio non può dedursi che la bonificazione di qualche parte di esse. L'altro passo del medesimo Autore, *samem cultoribus agrorum timentis in Pomptinum agrum frumenti causa miscere*, è ancora più generale, e può intendersi ancora delle campagne coltivate in quella provincia all' intorno delle Paludi.

III. Della disseccazione fatta da Augusto Cesare scrive Orazio nell' Arte Poetica, *sterilisque diu palus, aptaque remis, vicinas urbes alit, & grave sentis aratrum*: e scrive Acrone, *Divus Augustus duas divinas fecit, nam Pontinam Paludem siccavit, ut ad mare meatum haberet; ut post & arari posset, & Porum Lucrinum munivit.* Questi due passi non bastano per provare che le Paludi siano state allora asciugate o tutte, o quasi tutte. Ma Strabone, coetaneo di Augusto descrivendoci come sia stata fatta quell' opera, colle parole *prope Terracinam, qua Roma itur prope viam Appiam, fossa lunga ducta est &c.*, pare che indichi solamente il disseccamento della parte inferiore, e vicina a Terracina, e non della parte superiore, che stendesi sino a 18 miglia di distanza.

IV. Dione nel Lib. XLVIII. dice di Traiano: *per Paludes Pontinas viam saxo stravit, extruxitque juxta vias ædificia, pontesque magnificentissimos fecit.* E da questo testo ricavasi chiaramente che non molti anni dopo di Augusto vi erano ancora le Paludi, e che la via Appia avea bisogno di essere rifatta. Ma non parlando poi Dione che della strada e dei ponti fatti per continuarla, e dei vicini edifizj, non se ne può ricavare che neppure nell' Impero di Traiano siano state asciugate le Paludi.

V. E

V. E così pure nell' iscrizione, che trovasi a Terracina non è indicato che il semplice risarcimento della via Appia, fatto da Cornelio Decio nel Regno di Teodorico: *vix Appia iter, & loca quæ confluentibus ab utraque parte Paludum inundaverant, usui publico, & securitati viantium restituit, per plurimos qui ante non erant alveos deducta in mare aqua*. Però considerando le antiche memorie, che ci sono rimaste delle Paludi Pontine non mi pare che vi sia fondamento di credere che siano state qualche volta interamente asciugate.

Sotto Martino V. volendosi asciugare le Paludi si prese il partito non ancora tentato sino a quel tempo di rivolgere al mare direttamente gl' influenti superiori per la linea più breve, tagliando la collina a Ponente: s' incominciò allora in gran cavo, che tuttavia ritiene il nome di Rio Martino, largo in più luoghi quasi 300 palmi Romani, e in alcuni luoghi profondo più di 50, e continuossi il cavo per la lunghezza di circa sei miglia, e sin fuori della collina, tra i due laghetti di Caprolaccio, e dei Monaci, alla distanza di tre soli quarti di miglio dal mare. Restò imperfetta quella grand' opera per la morte di Martino V., e nei tempi di Sisto V. riassumendosi il progetto d' asciugare le Paludi si vollero esse scolare per una strada molto più lunga, e con un altro grandioso cavo, che poi ritenne il nome di Fiume Sisto, e che terminava in mare al piede del monte Circello non molto lontano da Terracina. Ma appunto la lunghezza del cammino per giugnere col mare non lasciava alle acque unite una caduta sufficiente. Si alzarono le acque di pelo, seguirono varie rotte negli argini, e le acque divise e disperse dai lati non ebbero forza bastante per mantenersi espurgata e libera la foce: e così gl' inconvenienti influendo gli uni sugli altri gradatamente crebbero a segno da rendere inutile tutta l' opera.

L' esito infelice di quell' opera formava una presunzione contro il progetto di Sisto V., ed a favore dell' altro progetto di Martino V. Tutta la questione principalmente riducesi a questo termine. Secondo le livellazioni, che si sono fatte, dal Ponte di Santa Sala, dove restano uniti i due influenti principali delle Paludi, la Teppia, e la Ninfa, vi sono 60 palmi Romani di caduta sul pelo basso del mare. Dal Ponte suddetto vi sono 35 miglia di strada per giugnere
al

al mare dalla parte di Terracina, e solamente 13 per la strada del Rio Martino: e così da quella parte vi sarebbero due palmi di caduta per miglio, e da questa $4\frac{1}{2}$. Tutti i Periti, e i Matematici consultati da Monsignore Bolognini, tra quali io devo particolarmente nominare il celebre Gabriello Manfredi, tutti concordemente giudicarono, che per due fiumi torbidi, come la Teppia, e la Ninfa, non bastava la caduta di due palmi per miglio, e ch'era anzi sovrabbondante al bisogno la caduta di palmi $4\frac{1}{2}$. Però essi pensarono concordemente, che i canali tirati nella parte inferiore, e la foce aperta nel mare dalla parte di Terracina non potesse bastare che per la bonificazione dei terreni inferiori, ma che per l'intera e stabile bonificazione delle Paludi bisognava ridurre a termine il rio Martino. Quest'è quanto si è concordemente proposto sino a quel tempo, in cui s'è incominciato a tirare un grandioso cavo al lungo della via Appia, e si è portato ad unirsi col fiume Amaseno, ed a sboccare in mare tre miglia lontano di Terracina.

C A P O S E T T I M O.

DEGLI ALTRI CANALI NAVIGABILI D' ITALIA,
FRANCIA, SPAGNA, PAESI BASSI, INGHILTERRA,
PRUSSIA, RUSSIA, E SVEZIA.

I Più antichi canali navigabili, che servono ancora presentemente ai bisogni della società, e del commercio, sono appunto i canali d' Italia. Le altre nazioni che ne hanno imitato l' esempio posteriormente, dopo il generale risorgimento delle scienze, e delle arti, hanno portato i lavori di questo genere ad un grado di maggiore finezza, e perfezione. Si è già parlato nel libro antecedente delle epoche dei principali canali dello Stato Veneto. In questo libro si è più diffusamente trattato di tutto ciò, che appartiene ai canali del nostro Paese. Non so quale sia l' epoca, nè quale la struttura, e la forma dei canali del Piemonte, nè di quello che unisce la Dora Baltea colla Sesia, nè dell' altro Naviglio che si deriva dalla Dora Baltea in vicinanza di Torino, e va a finire nel Pò quattro miglia sotto a Casale. Il Naviglio di Bologna fu incominciato nel secolo tredicesimo, come

come si legge nella Deca prima del libro IX. di Leandro Alberti, e la navigazione vi fu regolata coi sostegni, che servono ancora presentemente, verso il fine del secolo sedicesimo, come si legge nell'istruzione delle cose notabili di Bologna, scritta dall'Alidosi. Nei capitoli susseguenti tratteremo particolarmente dei sostegni, e scaricatori di quel Naviglio, e della grandiosa chiusa, con cui esso si deriva dal Reno nel luogo di Calecchio. Il canale che a Ripafratta si deriva dal Serchio, e che a Pisa finisce in Arno, fu diretto da Lorenzo degli Albizzi, uno dei primi scrittori che hanno incominciato a trattare del corso delle acque: e dopo che Cosimo Primo de' Medici s'impadronì di Livorno l'anno 1543. fu continuata la navigazione da Pisa a Livorno con un altro canale, in cui v'è ancora l'inconveniente, che vi si abbiano a cavare le batte con una macchina per farle passare in Arno.

Vi erano già tanti canali navigabili in diverse parti d'Italia mentre ancora non ve n'era alcuno negli altri Paesi. I più antichi canali, dei quali vi abbia trovato memoria, sono quelli di Bruxelles, e di Briara, e sono del principio del secolo passato. Il Canale di Briara in Francia fu incominciato nei tempi di Enrico IV., e del Duca di Sully, e fu poi terminato nei tempi di Lodovico XIII., e del Cardinale di Richelieu. La lunghezza del canale era allora di undici leghe di Francia, e portava dalla Loire nella Loing, uno degli influenti della Senna. Nel Regno di Lodovico XIV fu tirato un altro canale dalla Loire vicino ad Orleans, sino ad incontrare il primo canale di Briara in vicinanza di Montargis. E perchè la Loing in tempo di estate è troppo scarsa di acque per una comoda navigazione, nella minorità di Lodovico XV fu preso il partito di costeggiarla con un altro canale, ch'è propriamente una continuazione di quello di Briara sino in vicinanza alla Senna. Nel vecchio canale di Briara si contano 42 sostegni, e 20 nell'altro di Orleans.

L'opera più grandiosa di questo genere è il canale, che in Linguadocca forma la comunicazione del Mare Mediterraneo colla Garonna, e coll'Oceano. Le barche in undici giorni passano da un Mare all'altro, attraversando valli e montagne, e salendo sino all'altezza di 600 piedi sopra il livello dei due Mari. I porti di Bordeaux, e di

Mar-

Marsiglia declinano così il giro di più di 800. leghe di Mare per comunicare insieme tra loro . Il canale già progettato sotto tre altri Re fu poi condotto a termine nel Regno di Lodovico XIV. col lavoro di anni quattordici, e colla spesa di undici milioni di franchi, oltre la spesa di altri due milioni, che costò il rifarcimento del porto di Certe. Andreosi fu quello che ne suggerì il progetto, e il Riquet ne direbbe quasi tutta l'esecuzione . Ma il Riquet, quantunque uomo di talento singolare, non aveva però cognizioni e studj bastanti per rilevare diversi errori di costruzione, e prevederne le conseguenze . La correzione di essi, e il compimento di tutto il canale si deve a un uomo di studio profondo, e di vastissime cognizioni, com' era il Marefciallo di Vauban .

Il canale principia da un Lago di circa quattro miglia di giro, e di circa 800. piedi di profondità, che raccogliendo le acque del Monte Nero le fa passare a Naurosa in una gran vasca lunga 200 tese, e larga 150. Di là si distribuiscono le acque alla dritta sino a sboccare nella Garonna presso Tolosa, ed alla sinistra sino al lago di Thau, che si stende ed arriva sino in vicinanza al porto di Certe . La larghezza del canale è di piedi 30, e tutta la lunghezza è di tese 125680, che fanno leghe $50 \frac{1}{4}$ di Francia . Per quasi la sesta parte il canale è tirato sulle montagne scavare profondamente: e al luogo detto il Malpasso ne viene attraversata la roccia, scavata a forma di volta, per la lunghezza di 80 tese, con 4 tese di larghezza, e $4 \frac{1}{4}$ di altezza . Vi sono in tutto 100. sostegno, e moltissimi ponti, e acquedotti . Vi sono anche intrecciati lateralmente alcuni altri canali secondarj, che rendono più esteso e più facile il commercio interno delle provincie meridionali della Francia . Tutta l' opera incominciò nel 1666.

Ma nella prima costruzione di quel canale avea mancato essenzialmente il Riquet, facendovi entrare varj torrenti, e non prendendo alcuna precauzione per le materie, che i torrenti e le acque piovano dovevano successivamente staccare dal dorso delle montagne . Nel termine di vent' anni si trovò già interrata in parte, e la vasca di Naurosa, e il canale . Il Marefciallo di Vauban primieramente fece aprire un nuovo canale, che evitava il passaggio delle barche dentro della stessa vasca . Poi con sei ponti-canali, e con trentanove

Meccanica .

R r r

bot-

botti sotterranei devìo dal canale tutti gl' influenti, che vi potevano portar dentro delle materie grosse. E finalmente vi fece aprire dappertutto le chiaviche opportune per asciugare il canale tutte le volte, che fosse occorso il bisogno di ripararlo. La navigazione in questi ultimi anni vi si è resa più incomoda, perchè appunto si era trascurata per molto tempo la continuazione delle riparazioni, e delle altre diligenze ordinarie. Il Belidor ci ha descritto ampiamente la traccia, i lavori, e le particolarità di questo canale, e il Sig. de la Lande ce ne ha dato una descrizione ancor più ampia nel suo trattato sopra i Canali Navigabili.

Nella minorità, e poi nel regno di Lodovico XV. furono fatti i due canali di Picardia, che si distinguono coi nomi di vecchio, e nuovo, e per cui si uniscono insieme i due Fiumi la Somme, e l' Oise. Il primo termina in mare poco lontano d' Abbeville: e il secondo si getta nella Senna cinque miglia lontano da Parigi. La navigazione è così continuata da Parigi, e dal mare fino a S. Quintino. Il Belidor, ch' ebbe molta parte nella costruzione del nuovo canale di Picardia, ci lasciò una minuta descrizione, e del nuovo, e del vecchio nel Cap. V. del Lib. IV. dell' Architettura Idraulica. La costiera dei monti, che arriva fino a S. Quintino, impediva che i due canali comunicassero colla Schelda, che surge tra S. Quintino, e Cambrai. L'importanza di aprire la comunicazione della Senna colla Schelda, e di là con tutt' i canali dei Paesi-bassi, ha fatto abbracciare in questi ultimi anni il partito di attraversare tutta la costa con un canale sotterraneo della lunghezza di 7020 tese di Francia che farebbero circa dieci miglia Italiane, dal luogo di Tronquoy presso a S. Quintino fino a Vandhuille poco lontano da Cambrai. Secondo il profilo, la pianta, e la descrizione, che mi è stata mandata, di un progetto così grandioso e singolare, tutto lo scavo dovrebbe aprirsi in una sola linea retta, e si dovrebbe regolare su 20 piedi di altezza, e di larghezza. Vi si dovrebbero lasciare due banchine di due piedi di larghezza da una parte e dall' altra per il comodo di tirare le barche: e così la larghezza del canale sarebbe di piedi 16. Per avervi la luce, e per la libera comunicazione dell' aria, di 50 in 50 tese vi si dovrebbero aprire 141 pozzi di circa 20 piedi diametro fino al piano superiore del monte. L' altezza dei pozzi in molti luoghi

ghi sarebbe solamente di 60, e 80 piedi, e in alcuni altri fino di 252. Quest' opera singolare ed unica nel suo genere fu progettata fino dall' anno 1727 dal Sig. de Vicy Ingegnere Militare, e fu diretta nell' esecuzione dal Sig. Laurent. La qualità del terreno, composto in molti luoghi di creta mescolata insieme coi sassi, ha portato la necessità di coprire lo scavo con una volta di pietra. Lo scavo non è ora interamente finito che per una piccola parte secondo le dimensioni, che dovrebbe avere tutto il canale: è però ben avanzato lo scavo per 500. e più tese di lunghezza con 10 piedi di altezza, e di larghezza. I Matematici che sono stati incaricati di esaminare quest' opera, oltre il dubbio che il canale non potesse essere provveduto d'acque abbassanza, ed oltre alla ristrettezza delle panchine, ed alla difficoltà di tirarvi continuamente le barche, hanno rilevato che facendo le barche assai lunghe colla larghezza di 14 piedi, com' era progettato, la resistenza sarebbe stata il doppio maggiore che in un canale più libero e più largo. Ma navigandosi in tanti altri luoghi ancora con minore larghezza, ed essendo già tanto avanzata questa grand' opera perchè si deve lasciare così sospesa ed imperfetta?

Indipendentemente da queste difficoltà, la molteplicità dei canali de' Paesi-Bassi, e le diramazioni continuate coi Fiumi, e col Mare renderebbero più vantaggiosa ed importante la comunicazione colla Senna e colle parti interne della Francia. Non si potrebbe dare così facilmente il dettaglio delle diramazioni dei canali che si ritrovano ne' Paesi-Bassi, massimamente Olandesi. Per l'altra parte il Filosofo, che ammira nei canali di Francia la grandiosità, e la finezza del lavoro, ne' Paesi-Bassi resta sorpreso principalmente dalla molteplicità e dall' intreccio delle opere di questo genere. I Fiumi di quei Paesi non portando materie grosse, non avendo molta pendenza, e non correndo in piani di livello assai differenti, si possono più facilmente e navigare e unire insieme e diramare con molti altri canali navigabili. Le forgive istesse del terreno somministrano in alcuni luoghi di Olanda la quantità d'acqua ch' è necessaria per la navigazione. Il più antico canale delle Fiandre è quello che da Bruxelles porta alla Schelda, ed è del principio del secolo passato. Il canale di Gand e di Ostenda è un lavoro del secolo presente. Il canale, per cui la Mosa comunica col Reno, fu incominciato nel 1626, nel regno di Filippo IV, ed ha

8 leghe di lunghezza, e di larghezza piedi 81. Il Marchese Spinola, di cui era il progetto, ne rese memorabile l'esecuzione, difendendola vigorosamente contro tutti gli sforzi del Principe Maurizio di Orange, con 24 fortini ben presidiati e disposti a distanze proporzionate l'uno dall'altro.

Nel regno di Ferdinando VI., e nell'anno 1753 fu incominciato il canale di Castiglia e di Leone, che deve aprire la comunicazione delle parti interne della Spagna dalle coste dell'Oceano fino al Mediterraneo. Il Sig. Don Antonio de Ulloa celebre per le sue opere, e per la spedizione letteraria del Perù, fu incaricato dell'esame di tutto il progetto, e il Sig. Don Ferdinando de Ulloa n'ebbe l'esecuzione. Il canale incomincia ad Aguilar, dove non resterebbe che un tratto di poche miglia attraverso alle montagne per arrivare al Fiume Refaya che si getta nell'Oceano in vicinanza di Santander. Nel primo tronco si uniscono le acque del piccolo Fiume Camefa, ed una parte ancora di quelle del Fiume Pisuerga, che vi si fanno ringorgare con una chiusa di 210 piedi di lunghezza, 34 di base, e 9 di altezza. Il canale continua sempre di fianco allo stesso Fiume Pisuerga: è regolato sulla larghezza di 40, o 44 piedi colla profondità di 7: e passa con un ponte canale sopra i Fiumi Abanades, Zieza, e Carrion. Passato il Carrion si formano del canale due rami, uno dei quali arriva fino a Medina de Rioseco, e il ramo principale rientra a Valliadolid nel Fiume Pisuerga, ch'è poi comodamente navigabile fino al Duero. Termina pure nel Duero l'altro canale, ch'è derivato fino dalle vicinanze della Città di Segovia. Il Sig. Don Michele Sanchez Taramas ce ne ha dato la descrizione e la mappa nelle note aggiunte alla traduzione Spagnuola del trattato di fortificazione del Sig. Muller: ed io suppongo di avere un Lettore Geografo, che seguiti a riscontrare da se tutt' i luoghi sulle migliori mappe senz'averle inserite in questo libro. Il nuovo canale, ch'è incominciato nella Provincia della Mancia deve servire all'irrigazione delle campagne dei regni di Murcia, e di Granata, e continuarvi la navigazione per più di 100 miglia di lunghezza dal piccolo fiume Gualantia fino a sboccare nel Mediterraneo a Cartagena.

Il Sig. Duca di Bridgewater ci ha lasciato in questi ultimi anni un monumento glorioso, che potrebbe illustrare anche i fatti di qualunque

Junque. Sovrano, nel canale di Warrington, e di Manchester: e il Sig. Brindley, che ne aveva già ideato il progetto, e che ne ha poi diretta l'esecuzione, vi ha fatto brillare per ogni parte i suoi talenti, e le sue cognizioni. Il canale per circa un miglio e mezzo a Worsley Mill è scavato interiormente nel monte, ed arriva fin dentro alle miniere del carbon fossile. In tutto quel tratto non si può navigare, che a lumi accesi, e l'aria delle miniere vi si rende spirabile coll' altr' aria, che vi s'introduce con tutta l'acqua raccolta dalle alture vicine. L'acqua si unisce in un gran bacino, fatto a forma d'imburo, e inferiormente si versa per un tubo cilindrico, e l'aria si distribuisce per dieci altri tubi, dai quali scappa violentemente come da tanti mantici. Il canale nel suddetto tratto ha sei piedi inglesi e mezzo di larghezza, $7\frac{1}{2}$ di altezza, e $3\frac{1}{2}$ di altezza del corpo d'acqua. I battelli, che servono al trasporto del carbone, sono lunghi 47 piedi, larghi $4\frac{1}{2}$, e pesano piedi $2\frac{1}{4}$. Tutta la lunghezza del canale è di 43 miglia, e vi è in tutto la caduta di 139 piedi Inglesi. Fu incominciato nel 1758, e finito nel 1776.

Dove il canale resta tutto scoperto, al piede delle colline, comprende la curiosità dei Viaggiatori con varie grandiose opere di un altro genere. A Borton Bridge, tre miglia lontano da Worsley Mill, il canale è portato attraverso alla valle per la lunghezza di 200 braccia con un acquedotto di pietra, e passa sopra il Fiume Irwell, all' altezza di 38 piedi, con un ponte di tre archi. L'arco di mezzo ha 63 piedi di larghezza. Poco lontano da Borton Bridge il canale si dirama da una parte fino a Manchester, e dall' altra si stende fino a Warrington, dove il Fiume Mersey presenta una navigazione comoda, e continuata fino a Liverpool, ed al Mare Occidentale. In tutto quel tratto il canale s'è dovuto tirare sopra molti altri condotti d'acqua, sopra diverse pubbliche strade, e in qualche luogo ancora attraverso a' terreni paludosi. Vi sono varj mulini, scaricatori, botti sotterranee, e sostegni d'una struttura affatto singolare. La corrente di Cornbroke viene prima raccolta in una gran vasca, da cui cade in un' altra vasca più piccola, e poi passa sotto al canale, e continua nell' antico suo letto. Vi è in vicinanza un sostegno di forma circolare. Il sostegno vicino al Fiume Madlock è formato di sei segmenti di

di un circolo, che tra tutti hanno un giro di 366 piedi.

L'esempio del Sig. Duca di Bridgewater non poteva essere sterile nella patria di Elisabetta, e del Newton. Dopo quella guerra, in cui la Nazione si era resa padrona dei Mari più lontani, ha poi pensato nella pace ad aprire tra i Mari vicini, e colle parti interne del regno una comunicazione più facile. Il canale di Manchester si è unito con quelli di Cheshire, e Lancashire, e s'è progettato un altro canale da Liverpool fino a Leeds. S'è incominciato nelle parti di Congleton un canale, che deve unire il Fiume Mersey col Fiume Trent, e coll' Humber. S'è già superata la principale difficoltà del progetto, ch' era quella di aprire a forma di volta uno spazioso foro in una montagna per la lunghezza di circa un miglio e un terzo. Il Sig. Smeaton, che per altri capi è tanto benemerito della Fisica, ha contribuito in questo canale al buon esito di molti altri lavori. La comunicazione diretta e libera dei due Mari si avrebbe quando poi riuscisse di unire il Fiume Trent colla Savern, che si getta nel canale di Bristol. Nella Scozia dalla parte di Glasgow s'è fatto altrettanto per evitare il lungo e pericoloso giro delle coste Settentrionali, e si è aperto un canale navigabile per tutto l'Istmo, dove s'internano maggiormente i due Mari di Levante, e di Ponente.

Il canale di Francfort, che forma l'unione dell' Oder, e della Spree, è opera di Federigo Guglielmo soprannominato il Grande Elettore. Dopo le ultime vicende della Polonia s'è fatta ancora l'unione dell' Oder, e della Vistola con un altro canale, che a Bromberg si dirama dal Fiume Brah, uno degl' influenti della Vistola, e finisce a Nackel nel Fiume Netz, uno degl' influenti della Varta. La lunghezza del canale è di 7000 pertiche del Reno. Vi sono distribuiti a diverse distanze nove sostegni, e verso la metà vi è tirato dal tronco superiore del Netz un altro canale sussidiario, che per ogni caso di scarsezza d'acque ve ne assicura la quantità necessaria. Il canale quasi tutto è disteso in due semplici linee rette, che formano insieme un angolo ottuso: e per quanto apparisce dalle mappe, che ho ricevuto, la principale difficoltà dev' essere stata quella di attraversare dei terreni vallivi e paludosi per una estensione considerabile.

L'unione fatta dal Czar Pietro dei Mari Baltico, e Caspio ha
for-

forpassato tutti gli altri lavori di questo genere per l'estensione della navigazione. Tutta l'opera adesso è finita, e il Maresciallo di Munich v'ebbe la gloria dell'ultimo compimento. Le navi dal Mar Caspio rimontano il Fiume Volga per lunghissimo tratto sopra Casan, e poi passano nel Tuertza, ch'è uno degl' influenti. Di là incomincia il canale, che porta nel Fiume Sna, per cui si discende prima nel Mesta, e poi nel Volkova, e in seguito nel canale, che costeggia il Lago Ladoga, e finalmente si passa nel Fiume Neva sino a Pietroburgo, e nel Baltico. Il Fiume Volga si è fatto pure comunicare per un altro canale col Fiume Don, che così compisce l'unione dei Mari Caspio, Baltico, e Nero. Il Mar Nero ha ancora un' altra comunicazione col Baltico per mezzo del canale, che unisce il Boristene colla Vistola.

Altre Opere grandiose di questo genere si sono intraprese nel Nord nei tanto gloriosi Regni di Caterina, e di Gustavo. Soggiungerò un breve ragguaglio dei diversi progetti, e dei lavori intrapresi nella Svezia per evitare il passaggio del Sund, e per avere una libera comunicazione del Baltico, e dell' Oceano per le parti interne del Regno. Interiormente vi sono due vasti laghi, il Weter, ed il Wener. Dal primo esce il Fiume Motala, ch'è navigabile continuamente infino al Baltico. Dal secondo esce il Fiume Gotha, che a Gothemburgo si getta poi nell' Oceano, I due laghi si possono facilmente unire insieme con un canale navigabile: e si può ancora facilmente tirare un altro canale dal lago Wener nel lago Hielmer, da cui vicino ad Orebro nel tempo di Carlo XI. fu aperio il passaggio nel lago Meler, che si estende fino a Stockolm. Nelle carte della Svezia si riscontreranno tutt' i luoghi già nominati senza che vi sia bisogno di aggiugnere delle altre mappe.

Il primo tronco del Fiume Gotha, che riuscirebbe più incomodo per la navigazione, s'è deviato nei tempi di Carlo IX. con un altro canale, che incomincia sotto a Wenesburgo, e che chiamasi Carlsgraf. Le maggiori difficoltà per una continuata navigazione si hanno alcune miglia più sotto, nel tronco precipitoso e irregolare, che chiamasi di Trollheita. La caduta totale è di $113 \frac{1}{2}$ piedi di Svezia nella lunghezza di circa 7000 piedi. Il piede di Svezia contiene 10 pollici, e linee $11 \frac{1}{2}$ di Parigi, e assai prossimamente si eguaglia ad

un

un mezzo braccio di Milano. La stessa caduta è poi disugualmente ripartita, e quasi tutta si distribuisce in tre grandi cascate d'acque. Le cascate sono in tre luoghi, e dove le acque vengono ribattute, e ferrate tra grossi scogli, e dove tutto il Fiume dalla larghezza ordinaria di piedi 600 si restringe a poco più di 100. Lo spirito umano non s'è lasciato sgomentare dalla furia e dall'impeto di un tal Fiume. Sono due secoli che si è ricercata la maniera di avere nel passo di Trollhetta una navigazione libera comoda e perenne.

Nei tempi di Gustavo Vasa, e di Enrico, e Giovanni suoi figliuoli non si fece altro che studiarvi, e discorrerne variamente. Il terzo de' suoi figliuoli Carlo IX. incominciò dai lavori del canale di Carlsgraf, come già s'è accennato. Gustavo Adolfo, quasi sempre distratto dalle guerre fuori del regno, non ebbe tempo di occuparsi dello stesso progetto. Cristina di lui figlia se ne occupò moltissimo: ma credendo impraticabile in qualunque maniera il passo di Trollhetta, ne fece cercare un altro, che potesse riuscire d'una più facile navigazione. Carlo Gustavo s'impiegò interamente nelle guerre contro la Danimarca, e la Polonia. Carlo XI. disperando di poter navigare il Fiume Gotha, e trovando troppo dispendioso il cammino progettato nei tempi della Regina Cristina, ne fece cercare un terzo, che si trovò egualmente impraticabile. Carlo XII. accostumato a vincere tutt' i maggiori ostacoli, chiamò nel 1716 il celebre Pollheim, e poco dopo segnò con lui tutte le condizioni, colle quali nel termine di cinque anni si doveva rendere navigabile il passo di Trollhetta, e aprire un libero passaggio dal Baltico nell' Oceano. L' esecuzione accompagnava sempre gli ordini di quel Principe intraprendente e risoluto. Si riunirono subito i materiali, e si fabbricò ancora la prima chiufa. La morte del Re fece rivolgere altrove l'attenzione, e tutte le viste del Pubblico,

Dopo il 1751 fu ripigliato con differenti misure tutto il progetto. Si pensò allora di distribuire tutta la caduta di piedi $113\frac{1}{2}$ in tre soli sostegni: il primo di 28, il secondo di 52, e il terzo di $33\frac{1}{2}$ piedi di altezza. Si dovevano essi fabbricare di fianco alle tre cascate, colla larghezza di piedi 18, nella lunghezza di 72. Il lavoro si avanzò assai bene infino a tanto che si venne ad attraversare con una chiufa

chiusa il seno dell'ultima cascata per farvi stagnar l'acqua al di sopra. L'impeto, con cui tutto il Fiume vi si precipita, aveva impedito di ben riconoscerli il fondo. Dalla natura delle coste e delle montagne vicine erasi congetturato che il fondo fosse di roccia: e si era in oltre supposto che tutto al più vi potessero essere dieci piedi d'acqua. Si sbagliò e nell'una e nell'altra supposizione. La profondità dell'acqua era almeno di 20, o di 25 piedi, e il fondo era composto di pietre grosse e staccate, che resero inutili tutti gli sforzi dell'arte per assodarle. I cassoni di pietre, quantunque legati insieme con ferri di quattro pollici di grossezza, e attaccati con grossi pali ai due fianchi delle montagne, furono sciolti e dispersi dalla corrente, e così fu rovesciato tutto il lavoro.

Le grosse somme annualmente assegnate nelle Diete del Regno per questa grande intrapresa l'hanno fatta ripigliare fervidamente. S'è proposto in vece il progetto di declinare tutto il passo pericoloso con un canale navigabile della lunghezza di 8290 piedi, che esca, e che rientri nel Fiume Gotha, e in cui tutta la caduta si distribuisca negli ultimi 3000 piedi con sette sostegni di 36 piedi di larghezza nella lunghezza di piedi 200: il primo di piedi $17\frac{1}{2}$ d'altezza, gli altri di 16: il primo isolato, e i quattro susseguenti tra loro tutti contigui, come pure gli ultimi due. Tra il quinto e il sesto sostegno s'è proposto di difendere il canale con un grand' argine da tutte le escrescenze del Fiume: di aprire un ampio scaricatore tra il primo sostegno, e l'imboccatura: e nell'imboccatura istessa di lasciare due porte per asciugare il canale quando facesse di bisogno. La chiusa di derivazione non deve estendersi a tutto il letto del Fiume, ma solamente a quel ramo. e sino a quell'isolotto, ch'è più vicino al canale. La difficoltà di attraversare un marazzo per la lunghezza di 800 piedi, e di scavare il canale nella roccia in quattro differenti luoghi, tra tutti della lunghezza di circa 2000 piedi, ha fatto in vece abbracciare il partito di tirare un canale di sotto in vicinanza del Fiume, e di fabbricarvi i sostegni istessamente di sotto. I Matematici, che ne furono consultati, avrebbero anzi desiderato che in un clima così freddo tutto il canale, e i sostegni si portassero nella roccia, e si fabbricassero senz'alcun risparmio di spesa. La fig. 138 rappresenta in qualche maniera

Meccanica.

S s s

il

il canale di Trollhetta: *A* è la chiusa sul fiume Gotha: *B* l'imboccatura del canale: *C, D, E, F*, i luoghi della libera espansione delle acque: *CD, HK* i luoghi dove il canale è scavato nella roccia: *I* il luogo di un sostegno isolato: *K* il luogo di quattro sostegni accollati, ed *M* il luogo di due altri sostegni per tornare dal canale nel fiume, i quali sono pure accollati insieme nella maniera che spiegherassi in un altro capitolo.

C A P O O T T A V O .

DELLE REGOLE GENERALI DELLA DERIVAZIONE, E DELLA CONDOTTA DEI CANALI NAVIGABILI.

IL Canale di Linguadocca, che si deriva da un lago in cima alle montagne, il Canale di Manchester, che incomincia dai seni delle miniere, alcuni Canali dei Paesi-Bassi, dove basta aprire uno scavo perchè le sorgive del terreno vi portino la quantità d'acqua, ch'è necessaria per la navigazione, non sono che alcuni casi particolari. Tutt' i Canali navigabili dell' Italia, e quasi tutti quelli degli altri Paesi si derivano da qualche fiume: e se si eccettua il canale chiamato della Battaglia, che si stacca dal canale di Padova con una specie di pennello, o di sperone, tutti gli altri canali sono derivati per mezzo di qualche chiusa. Senza una chiusa, che interrompa, e che moderi la pendenza del fiume, per la minore pendenza, che bisogna sempre dare ai canali di navigazione, si manterrebbe sempre più profondo il letto del fiume, il corso delle acque vi si farebbe più rapido, le deposizioni delle ghiaie, e delle altre materie diverrebbero sempre maggiori all' imboccatura del canale, e nella proporzione medesima vi andrebbe continuamente mancando il corpo d'acqua. E particolarmente in quei fiumi che corrono in ghiaja, che hanno sempre un letto più largo, come si è avvertito a suo luogo, e che sono più soggetti a rivolgere variamente il filone o dall' una, o dall' altra sponda, senza la fabbrica d'una chiusa, che attraversi
il

Il letto da una sponda all' altra , non si potrebbe obbligare il filone a rivolgersi costantemente verso il canale , ed a somministrarvi sempre la quantità d' acqua , ch' è necessaria .

Il Naviglio, che dal Tesino si deriva a Milano, ci presenta un altro caso singolare: mentre non essendosi voluta interrompere con una chiufa più alta la navigazione del fiume, il ciglio della chiufa vi si è tenuto al livello medesimo della foglia del Naviglio, e si è provvisto con tutti gli altri lavori descritti sopra che il filone del Tesino, e la necessaria quantità d' acqua andasse sempre a imboccare direttamente il Naviglio. Prescindendo dal caso di non interrompere la navigazione del fiume, il mezzo più semplice e più sicuro di mantenere in un canale di derivazione una data quantità d' acqua è quello di alzar tanto la chiufa sopra la foglia dell' incile quant' è l' altezza del corpo d' acqua da derivarsi. Ma nella fabbrica delle chiufe di questo genere si ricerca tutta la maggiore finezza dell' ingegno, e dell' arte. Nella costruzione di quelle chiufe, che servono unicamente per sostenere il letto dei fiumi, non si ricerca che la solidità sufficiente perchè esse reggano superiormente all' urto delle acque correnti, e inferiormente non vengano scalzate dalla forza dei gorgi, e dei vortici, come si è detto nel Capo VIII. del Libro antecedente. Nella derivazione dei canali si ricercano delle altre cautele importanti per regolarvi la quantità d' acqua a principio, e perchè il successivo rialzamento di tutto il fondo superiore, che in queste chiufe deve aspettarsi come nelle prime, col progresso del tempo non faccia mancar l' acqua al canale, e non arrivi a mutare sostanzialmente tutto il sistema e del canale, e del fiume.

La chiufa più grandiosa, ch' abbia veduto, si è quella per cui il Naviglio di Bologna si dirama dal Reno a Casalecchio. E' tirata obbliquamente la chiufa dallo sperone, ossia partitore del Naviglio fino alla falda opposta del monte, senza essere interrotta nè da una parte nè dall' altra con qualche apertura, come s' è fatto nelle nostre chiufe per lo scarico più facile delle piene. La lunghezza della chiufa è di piedi 417 di Bologna, che sono circa $166\frac{1}{2}$ braccia di Milano: e l' altezza è di piedi 30, ossia di braccia 19 sopra il fondo inferiore del Reno. A Casalecchio il Reno corre ancora più stretto tra i seni delle

montagne: ed essendo tutto ferrato, e attraversato dalla chiufa, per lo sfogo più facile delle piene si sono fabbricate nella sponda del Naviglio poco sotto all' imboccatura due grandi chiaviche, che arrivano fino al fondo del canale, e propriamente si chiamano paraporti: tra i due paraporti vi sono sette altre porte, o diversivi, che restano sempre aperti a fior d'acqua: e più lontano dall' imboccatura si sono collocati successivamente a diverse distanze quattro altri paraporti. Le due grandi chiuse fabbricate sull' Arno a Firenze non servono che per derivare i canali dei Mulini, e la chiufa inferiore, che chiamasi dell' Uccello, ha portato in conseguenza l'interramento del fondo superiore, la maggiore altezza delle piene, e gli altri danni, e pericoli della Città, come si è detto sul fine del Cap. IV. del Lib. II.

Le due più antiche, e grandi chiuse del nostro Paese, quelle di Cassano e di Trezzo sono tirate obbliquamente, la prima in un luogo più libero, e più spazioso per circa 500 braccia di lunghezza, la seconda in una delle sezioni più anguste dell' Adda per la lunghezza di circa 150 braccia. Ambedue si sono lasciate aperte dalla parte opposta ai canali, che per mezzo di esse vengono derivati, e che sono a Cassano la Muzza, ed a Trezzo il Naviglio della Martesana. Nell' incile della Muzza a Cassano v'è un lungo scaricatore, o diversivo aperto a fior d'acqua, e due miglia più sotto vi sono due paraporti ciascuno di dieci porte. A Trezzo l' argine stesso del Naviglio serve di regolatore, e di diversivo aperto a fior d'acqua, tiene il Naviglio all' altezza costante di braccia $4\frac{1}{4}$, e fa ricadere nell' alveo contiguo dell' Adda il di più d'acqua, che arriva in tempo di piena. I paraporti da aprirsi fino al fondo del canale di fianco all' Adda, sono stati situati, i primi a Concesà circa un miglio sotto all' imboccatura, e gli altri a Vaprio due altre miglia più sotto. Nel nuovo Naviglio dell' Adda la lunghezza della chiufa è di circa 230 braccia, e l'apertura si è pure lasciata dall' altra parte, e si sono opportunamente situati nell' argine del canale, e i paraporti da aprirsi fino al fondo quando bisogna, e i diversivi che restano sempre aperti a fior d'acqua.

Prima di andare più avanti bisogna far avvertire come negli esempi già addotti si siano scelti differentemente i luoghi e le sezioni dei fiumi per tirarvi le chiuse di derivazione. A Casalecchio dopo varj tentativi di

di altre chiuse, delle quali si vedono anche presentemente i vestigi. s'è tirata la chiufa presente dove il Reno è più stretto tra le montagne. A Cassano s'è scelta una sezione dell' Adda assai più spaziosa, e più libera di quella di Trezzo. E così pure per la derivazione dell' altro Naviglio superiore dell' Adda sul principio del secolo sedicesimo fu progettato il luogo più spazioso, e più piano, che è sotto al sasso di S. Michele, come s'è detto col Cap. IV., e sul fine dello stesso secolo, mettendosi mano all' opera, ne fu cambiato il progetto, e la chiufa fu incominciata al sasso delle tre corna, un terzo di miglio più abbasso, tra le fauci più anguste di quella costa. Generalmente parlando le sezioni più larghe hanno il vantaggio di sfogare più facilmente le piene: ma poi ricercano delle providenze maggiori perchè in tempo che il fiume è più basso non venga a mancare al canale la necessaria quantità d'acqua. Per lo contrario nelle sezioni più anguste può ottenersi più facilmente che quando le acque sono più basse si rivolgano tutte verso il canale: ma poi vi vogliono dei diversivi, e dei paraporti più ampj perchè non venga soverchiato il canale in tempo delle maggiori piene. Le sezioni più anguste possono ancora presenrare dei lati più sicuri per interstarvi le chiuse: e nelle sezioni più larghe sono meno tormentate le chiuse dall' impeto della corrente: e così l' uno e l' altro principio secondo la varietà delle circostanze, e dei luoghi può avere i suoi vantaggi particolari.

Allo scarico delle piene si può provvedere egualmente o colle aperture fatte nell' argine del canale come a Casalecchio, o con lasciare aperta da una parte la chiufa, come a Trezzo, ed a Cassano: e così pure è indifferente a tal fine che l'apertura si lasci o dell' una, o dall' altra parte della chiufa. Ma nella considerazione delle acque correnti non bisogna mai perder di vista le materie mescolate insieme colle acque: bisogna prevedere le variazioni, che ne possono nascere successivamente nei fondi e del canale e del fiume, e bisogna portarvi le providenze opportune. Ora se si lasciasse la chiufa aperta, ed interrotta dalla parte istessa del canale, si avrebbe sempre il vantaggio di mantenervi il corso principale, e con ciò ancora il maggior fondo del fiume, e le maggiori deposizioni si volgerebbero dall' altra parte, e si provvederebbe meglio alla derivazione delle acque, anche
in

n tempo che si trovassero più basse. Laddove le bocche d' irrigazione, e tutte le aperture lasciate nella sponda opposta al canale per lo meno dividono il corso delle acque, e danno luogo alle maggiori deposizioni verso l' imboccatura, che bisognerebbe conservar sempre più libera. Le circostanze particolari della chiufa di Trezzo, l' impeto con cui l' acque discendono dalla svolta intorno a quel Castello, l' accelerazione, che nasce dalla caduta susseguente, la maggiore ristrettezza del letto non lasciano risentire i cattivi effetti dell' apertura lasciata dall' altra parte del canale. Tutto il letto dell' Adda si mantiene costantemente profondo all' imboccatura del Naviglio, e l' impeto, con cui vi entrano le acque, non lascia che vi si facciano delle deposizioni, e basta a spinger le ghiaie sino dove incomincia interrottamente l' azione dei paraporti. Per lo contrario a Cassano dov' è minore la caduta, ed è più libero il letto dell' Adda, tutta la chiufa dalla parte anteriore è rincalzata altamente dalle deposizioni delle ghiaie: ed ivi essendo il filone deviato in parte dall' apertura della chiufa, e dalle bocche d' irrigazione, che si trovano nella riva opposta al canale della Muzza, succede che le ghiaie, e le marerie grosse si ammucchino in maggiore copia all' imbocatura di quel canale: e finalmente non potendosi ivi tirare alcun partito dai paraporti, che sono lontani due miglia, vi fa bisogno della mano, e dell' arte per tenere espurgato il primo tronco della Muzza, e deviarvi il corpo d' acqua ch' è necessario per tutte le irrigazioni inferiori.

Io adunque riguardo come un difetto di costruzione che nelle due maggiori chiufe fabbricate l' una anticamente, e l' altra modernamente sull' Adda, le aperture si siano lasciate dalla parte opposta ai canali di derivazione: tanto più che il filone del fiume deviato dalla parte opposta rende ancora più difficile il passaggio delle barche dal fiume all' imboccatura dei canali. Risguardo poi come un altro difetto particolare di costruzione nella Muzza che i paraporti siano così lontani. Gli scaricatori aperti sino al fondo di un canale, oltre allo scarico delle piene, servono ancora all' altr' ufo che le acque ricadendo nel fiume sotto alla chiufa staccano dal fondo istesso le materie più grosse, e le portano fuori, e tengono spurgato, e libero tutto il canale sino ad una certa distanza in proporzione della maggiore caduta, e dell' accelerazione concepita cadendo. Con più fabbriche di tal natura, disposte in

ma-

maniera che dove finisce l'azione di una, ivi incominci l'azione dell'altra susseguente, si può ricondurre nel fiume la ghiaja già entrata dentro il canale. Con quest' artificio le ghiaje nel Naviglio di Bologna non vanno più lontano di un mezzo miglio, quantunque dentro l'aveo del Reno sino dai tempi del Guglielmini andassero cinque miglia sotto a Casalecchio, e adesso si stendano ad una distanza assai maggiore. E quantunque il suddetto Naviglio si possa proporre come un modello dell' arte in questo genere, diceva però il Guglielmini nel Cap. XII., che vi si sarebbe potuta restringere la ghiaja dentro uno spazio ancor minore, se il luogo dei paraporti fosse stato meglio inteso a principio, e se si facessero essi operare più frequentemente, e in tempi più opportuni. Nel canale della Muzza è stato già proposto altre volte di aprire dei nuovi paraporti vicino all' imboccatura, e di far servire le forze della natura piuttosto che quelle dell' arte all' espurgazione, ed alla manutenzione del fondo.

Ma per tornare dai paraporti alle chiuse, l' azione di essi è limitata al solo fondo del canale, e nè i paraporti, nè le aperture lasciate o dall' una o dall' altra parte della chiusa possono prevenire, e impedire il rialzamento di tutto il fondo superiore del fiume. Si sono già esposti gli esempi, le ragioni, e i limiti di un tale rialzamento nel Cap. IX. del Lib. II., e s' è detto che fabbricata una chiusa il fondo del fiume superiormente ad essa si deve disporre in una linea parallela al fondo primitivo, e tirata all' in su da quel punto dove finisce di stendersi l' accelerazione che nasce dalla caduta inferiore. Quest' è l' oggetto principale che devonsi più di tutto avere in vista per fissare l' altezza della chiusa, e la soglia dell' incile di qualunque canale di navigazione, o d' irrigazione. Per esempio sarebbe un errore se restando il fondo di un canale sullo stesso fondo, o vero o ragguagliato di un fiume ghiaroso, ed arenoso, ed alzandovi una chiusa di due braccia di altezza, si credesse di derivare costantemente due braccia d' acqua. Ciò potrebbe bensì succedere in un nuovo canale a principio, e ancora per qualche tempo. Ma dovendosi in seguito rialzare gradatamente tutto il fondo superiore del fiume, vi si diminuirebbe per gradi eguali l' altezza della chiusa, andrebbe mancando successivamente il corpo d' acqua nel canale, e se il fiume portasse materie grosse in

gran

gran copia, potrebbe anche la chiufa in progresso di tempo restar sepolta nelle deposizioni. Per lo contrario se la foglia dell' incile 'si tenesse sei, o sette braccia più rilevata del fondo del fiume, e se la chiufa fosse portata fino all' altezza di otto, o di nove braccia, avrebbe luogo di rialzarsi notabilmente lo stesso fondo, senza che venisse con ciò a restare meno libera l' imboccatura del canale. Anzi l' accelerazione delle acque cadenti dall' altezza di nove braccia, stendendosi per qualche tratto all' insù, contribuirebbe a tenere il rialzamento del fondo tra i limiti già indicati.

E' affatto singolare il caso del canale di Linguadocca che si deriva da un gran recipiente d' acque, in cui esse lasciano cadere a fondo le altre materie eterogenee, e n' escono chiarificate. Il Belidor nel Cap. VII. dell' Architettura Idraulica suggerì d' imitar quest' esempio nella derivazione degli altri canali, ricevendone prima le acque in una gran vasca, in cui possano depositarsi le torbide. Ma l' esempio non è altrimenti applicabile ad un ramo perenne d' acqua che abbia a diramarsi da qualche fiume, massime nel caso che siano troppo alte le rive, o che il fiume corra incassato nel seno delle montagne. Così pure il Marefciallo di Vauban ha rimediato ai principali inconvenienti, a cui era prima soggetto il canale di Linguadocca, deviandone gl' influenti, che vi portavano dentro delle materie grosse, e che ne avrebbero cagionato l' interrimento. Ma neppur questo è un ripiego da potersi praticare nè in tutti i canali nè dappertutto. Nel Naviglio della Martesana vi si è fatto passar sotto la Molgora, ma non si sono potuti deviare il Lambro, e il Seveso. E poi anche deviati che siano da un canale, e fatti passare o sotto o sopra i fiumi, e torrenti, che vi s' incontrano, gli altri minori condotti d' acque e le torbide che ricadono sempre in qualunque cavo massime in tempo di pioggia, portano sempre degl' interrimenti considerabili, ricercano delle continue providenze perchè non venga successivamente a mancare la navigazione. I paraporti che servono, come si è detto, all' espurgazione del fondo nei primi tronchi non possono praticarsi dove non vi sia una caduta considerabile dal fondo in qualch' altro recipiente: e il ripiego, che più comunemente si prende nei luoghi di pianura, e nei recinti delle Città di mettere i canali in asciutto, scavarli, e trasportare altrove le

tor-

torbide, riesce sempre di molto incomodo, e di molta spesa, e qual-
che volta ancora di un grave pericolo per gli abitanti. Poichè le ma-
terie putride e fradice ammucciate successivamente sul fondo, quan-
do restino scoperte dall' acqua, smosse colle vanghe, e trasportate al-
trove, mandano delle cattive esalazioni, e rendono l' aria insalubre,
e la civile polizia deve prevenire, e ovviare tutti gl' inconvenienti di
questo genere.

L' imbarazzo dell' attuale escavazione potrebbe si trasportare
nei luoghi più lontani dall' abitato, se in tutto il recinto di
esso avesse il canale una caduta sovrabbondante, e fosse suc-
cessivamente interrotto da varj sostegni. Mentre tenendone aperte
tutte le porte, ingrossandovi quando fosse possibile il corpo d' acqua,
e lasciandola correre liberamente, si potrebbero staccare dal fondo le
materie almeno più sottili, e spingere sin dentro le altre inferiori di-
ramazioni. Il trasporto delle stesse materie si potrebbe rendere ancora
più spedito, e più facile se il fondo si sconvolgese cogli erpici, o
con altre macchine simili continuamente tirate in su e in giù, come
con buon successo si pratica già da molti anni nel nostro Naviglio
dentro il recinto della Città. Ma il ripiego non è praticabile gene-
ralmente negli altri luoghi, nei quali non vi sia tanta caduta di
fondo, e non abbiano le acque velocità e forza bastante per traspor-
tare la terra, e l' arena, e le altre materie dentro i cavi inferiori,
e non convenga di esporre i cavi inferiori o al pericolo di restare in-
terrati, o all' imbarazzo, e alla spesa della manuale escavazione. Le
macchine, che servono per mantenere profonde e libere le Darsene,
e i porti di Mare, possono facilmente adattarsi all' espurgazione de
canali navigabili, in qualunque tronco, e senza portare imbarazzo al-
cuno nelle altre parti. Il Belidor nel Cap. IX. del Lib. III. dell' Ar-
chitettura Idraulica dopo di avere minutamente descritta la cucchiaja,
con cui si tengono espurgate le due Darsene di Tolone, e il canale,
che forma la comunicazione dall' una all' altra, suggerì che una mac-
china dello stesso genere poteva servire utilissimamente, e con moltis-
sima economia in molte altre occasioni, e massime nei canali naviga-
bili. Quel passo del Belidor mi ha suggerito l' idea di proporre l' uso
della cucchiaja ancora per i nostri canali, e di farne venire il modello.

Meccanica.

T t t

Il

Il fondo dei canali ordinariamente ooa si suole escavare che quanto basta perchè vi passino sopra le barche liberamente: e così pure la larghezza dei canali si suole proporzionare al libero cambio di due di esse. La comodità della navigazione ricercerebbe di più che si desse ai canali la maggiore larghezza, e la maggiore profondità, che la natura dei luoghi potesse permettere. Il Sig. Franklio è stato il primo a verificare colle sperienze una volgare asserzione dei barcaruoli, che dicono di durar più fatica ad avanzarsi quando le acque sono più basse. La ragione è molto semplice, che nei canali non molto larghi, e non molto profondi l'acqua sospinta da una barca non potendo così facilmente ripiegarsi all'intorno di essa, vi ringorga d'avanti, e forma come un'altra corrente, che ne impedisce l'avanzamento. Nelle sperienze sulla resistenza dei fluidi fatte a Parigi l'anno 1775, delle quali già si è parlato più volte, risultò pure che nei canali più stretti, e poco profondi la resistenza è molto maggiore di quella dei canali liberi per ogni parte, che le differenze possono essere ancora gradissime, e che dipendono dalle sezioni trasversali dei canali, e della forma delle barche. Il risultato di quelle sperienze ha suggerito poi l'eccezione fatta al progetto del canale sotterraneo di Cambrai, di cui si è parlato nel capo antecedente. La piccola quantità d'acqua, che potrebbe raccogliersi in quel canale, e la grandiosa spesa che vi vorrebbe per portare lo scavo a maggiore ampiezza, sono state le due ragioni, per cui non vi si è ricercata che la larghezza, e la profondità necessaria al passaggio delle barche. In altri luoghi la scarsità del corpo d'acqua non ha lasciato che si facessero dei canali più larghi, e più profondi: ed è stato anzi necessario di moderare il corso dell'acqua colla minore declività del fondo, e di farla ringorgare coi sostegni ad una maggiore altezza: e in questa maniera se non si è avuta la navigazione più comoda si è provveduto almeno al bisogno di una navigazione.

In Italia ne abbiamo un esempio nel così detto Canalino di Cento, che incomincia da alcune sorgenti unite insieme in vicinanza di Forte Urbano, e che quantunque abbia sempre un corpo d'acqua assai piccolo, ciò non ostante è regolato con tre sostegni in maniera che la navigazione vi si può continuare sino a Ferrara, e sino al

Pò

Pò che chiamasi di Volano. Ho suggerito d' imitar quest' esempio quando trattavasi di continuare più facilmente la navigazione dall' Adda sino al Fiume Ollio per il Canale della Delmona, evitando il giro ordinario del Pò, che fanno adesso le barche per passare dall' Adda a bocca d' Ollio. Il piccolo Serio, o come volgarmente 'chiamasi il Serio morto, ha similmente la sua origine da alcune sorgenti perenni ed abbondanti poco sopra Castelleone, e nel corso di nove miglia ingrossandosi da alcune sorgenti, e da alcuni fossi che vi entrano, anche nei tempi più asciutti ha un corpo d' acqua ben superiore a quello del nominato Canalino di Cento, e sotto alle mura di Pizzighettone cade tutto nell' Adda senza servire ad altr' uso che a quello dei mulini della Città. La Delmona è un cavo quasi rettilineo di circa 16 braccia di larghezza, e di circa 14 miglia di lunghezza, che riceve gli scoli delle campagne del Cremonese, e va a finire nell' Ollio al luogo di Tezolo. E il piccolo Serio, e la Delmona decorrono nello stesso piano delle campagne, ch' è rilevato dove di 15, dove di 20, e più braccia full' altro piano in cui decorrono, e si pareggiano i pelli bassi dell' Adda, del Pò, e dell' Ollio. Parendomi adunque che non fosse neppure da proporli l' idea di tagliar quella costa per deviare un ramo d' acqua dall' Adda a Pizzighettone, e portarlo ad ingrossar la Delmona, ho invece proposto di portarvi il piccolo Serio, e quantunque da Pizzighettone al luogo di Gazzo dove incomincia il cavo della Delmona vi siano circa 17 miglia, ciò non ostante tenendo il Naviglio a fior di terra per la minore difficoltà di farvi passar sotto i canali d' irrigazione, e dandovi una piccola pendenza di fondo, e sostenendo il corpo d' acqua di tratto in tratto coi sostegni opportuni, ho creduto che il Serio, e la Delmona si potessero far servire ad una navigazione continuata per mezzo al Cremonese dall' Adda all' Ollio.

La minore pendenza del fondo, dov' è minore il corpo d' acqua, con diminuirne la velocità deve renderne maggiore l' altezza, e servire al trasporto delle barche di maggior carico. Generalmente poi in qualunque canale la minore pendenza può contribuire alla maggiore facilità della navigazione. Mentre quantunque l' arte di navigare all' ingiù nei Fiumi anche più rapidi e più impetuosi sia stata portata ad un segno, che può dirsi che abbia toccato i limiti della temerità; ciò non ostante

l' arte di rimontarli non può passare le forze degli animali , e degli uomini che s' impiegano per tirare le barche all' insù , e così vi è un limire , oltre il quale un fiume non può più essere navigabile . I tronchi superiori del Tefino , e dell' Adda , dove la caduta è in ragione di sette braccia per miglio , si rimontano con tanta difficoltà che non farebbe più praticabile la navigazione se la caduta del fondo fosse ancora maggiore . Nel primo tronco del Naviglio , ch' è derivato dal Tefino , la caduta è in ragione di cinque braccia per miglio : e con tanta caduta si perde più tempo , e fatica navigando all' insù , che non si guadagna scendendo : e così tutto compreso la navigazione è più comoda negli ultimi tronchi dei due nostri Navigli , dove la caduta è di circa un braccio per miglio . Eustachio Manfredi trattando della maniera di rendere navigabile il Tevere da Ponte Nuovo sotto a Perugia sino allo sbocco della Nera , dove la navigazione incomincia ad esser libera , e continuata sino al mare , fìsò come un principio d' esperienza che per navigare comodamente qualche fiume , massimamente contr' acqua , non vi volesse una caduta maggiore di circa tre palmi Romani per miglio , che fanno poco più di un braccio di Milano . Nei nostri Navigli vi era un' altra ragione d' incominciarli con una maggiore pendenza di fondo , cioè quella di derivare un maggior corpo d' acqua nei tronchi , e nelle diramazioni inferiori . Ma dove non si trattasse che della maggiore comodità della navigazione converrebbe di regolare il fondo dei canali con pendenze minori , e ripartire il di più di caduta , se ve ne fosse , con tante conche o sostegni , nella maniera , e colle avvertenze , che spiegheremo adesso partitamente .

CAPO NONO.

DELLA FORMA, E DELL' ALTEZZA DEI SOSTEGNI
SEMPLICI, ED ACCOLLATI.

GLi antichi conoscevano la maniera di moderare la pendenza soverchia dei Fiumi, di mantenervi la necessaria quantità d'acqua, e di farla ringorgare, e servire ancora o alla difesa delle piazze, o all' irrigazione delle campagne per mezzo di certe chiuse, che si potevano poi levare nel caso di farvi passar le barche. Il Belidor ci ha dato la descrizione di tali chiuse al §. 1053. del Lib. IV. dall' Architettura Idraulica. Non portavano esse nel fondo alcuna divisione, ed erano di quel genere che noi chiamiamo conche piane. Tali appunto erano i due sostegni incominciati l'anno 1188, e terminati nel 1198 colla direzione di Alberto Pitentino Architetto, l'uno innanzi alla porta di Mantova detta di Cepeto, e l'altro a Governolo, dodici miglia lontano: il primo per trattenere le acque del Mincio, e formare il lago superiore di Mantova, e il secondo per formare il lago detto di sotto, e per continuare la navigazione del Mincio fino al Pò. Tale ancora doveva essere il sostegno antico di Strà, fabbricato nel 1481 da due Ingegneri di Viterbo per facilitare il passaggio delle barche dal canale di Padova, volgarmente chiamato di Piovego, nella Brenta: sostegno che resta presentemente inofusciofo, come si è detto nel Cap. VI. del Lib. II., e che non sembra di essere stato fatto con alcuna differenza di livello tra il fondo superiore e inferiore, per quanto si può raccogliere dai cardini delle porte, che ancora presentemente si vedono. I più antichi sostegni a gradino, dei quali io abbia trovato memoria, sono quelli del canale della navigazione di Venezia, quelli del naviglio di Bologna, e quelli che formano la comunicazione dei due Navigli di Milano: e tutti sono prossimamente del medesimo tempo, ed io crederei anche che se ne potesse attribuir l' invenzione a Leonardo da Vinci.

Si deve riguardar sempre come una delle più belle ed utili invenzioni quella di fare che s'alzi l'acqua successivamente ai due livelli differenti dei due differenti tronchi di un canale, che si uniscono
in-

insieme: onde avendosi alternativamente o l'uno, o l'altro livello si abbia ancora il passaggio libero da un tronco all'altro. Ciò si ottiene egualmente e nei sostegni che sono semplicemente a porte raddoppiate, ed in quelli che hanno le due mani di porte su due fondi differenti, e che chiamansi sostegni a gradino. Mentre nel circondario dei sostegni dell'una, e dell'altra specie l'acqua si può ridurre al livello del tronco superiore tenendo chiuse le porte inferiori, e lasciando entrar l'acqua liberamente o dalle aperture delle porte superiori, o da qualche condotto laterale: e l'acqua in seguito si può ridurre al livello del tronco inferiore chiudendo le porte superiori, e aprendo poi le inferiori, e così le barche si possono far passare dal tronco superiore all'inferiore, e al contrario. Ma in quei sostegni, che sono insieme a porte raddoppiate, e a gradino si ha in oltre il vantaggio di moderare la soverchia pendenza del fondo, e di non lasciare un corso troppo libero all'acqua. Nei sostegni a porte raddoppiate aprendosi alternativamente nel passaggio di una barca le porte o superiori, o inferiori si deve trattener sempre, e ringorgar l'acqua sino all'orizzontale tirata per la sommità, o delle une o delle altre. In quelli, che sono ancora a gradino viene a sottrarsi dalla pendenza libera, e totale del corso tutta l'altezza e del sostegno insieme, e del gradino.

Nel canale della navigazione di Venezia l'ultimo sostegno di Muranzano serve unicamente per passare nella Laguna: non vi è alcuna differenza di fondo, e la differenza dei peli d'acqua sopra e sotto le porte nel tempo del flusso ordinariamente è di 3 piedi Veneti, e nel tempo del riflusso arriva sino a 6 piedi. I due sostegni della Mira, e del Dolo sono a gradino, e la differenza del livello del fondo superiore, e inferiore nel primo sostegno è di piedi $2\frac{1}{2}$, com'è pure la differenza dei peli d'acqua: e nell'altro sostegno la foglia delle porte superiori è di $\frac{1}{2}$ del piede Veneto più rilevata della foglia delle porte inferiori, e la differenza dei peli d'acqua, quand'è bassa la Brenta, non è minore di piedi 12. La fabbrica di quei sostegni, e il sistema presente della navigazione dalla Brenta alla Laguna di Venezia, è posteriore alla diversione del Brentone, che fu incominciata nel 1484. Nel Naviglio di Bologna il sostegno di Battiferro ha

la

la platea interna più bassa della foglia delle porte superiori di piedi Bolognesi $6\frac{1}{2}$: e quel sostegno fu fatto nel 1484, come attesta il Masini nella sua Bologna perlustrata. I sei sostegni che formano la comunicazione dei due nostri Navigli furono progettati, e diretti da Leonardo da Vinci, ed erano interamente finiti nel 1497, come rivelasi da una pubblica Iscrizione. Onde non avendo potuto verificare precisamente nè di quanto siano posteriori al 1484 i sostegni della navigazione di Venezia, nè di quanto sia anteriore al 1497 l'idea dei nostri sostegni, farei portare a credere che la prima invenzione dei sostegni a gradino si potesse attribuire a Leonardo da Vinci.

Il primo sostegno, per cui s'incomincia a discendere nel Naviglio derivato dall'Adda un miglio lontano da Milano, ha la caduta di circa braccia 4 dal fondo superiore all'inferiore: e gli altri cinque sostegni, che trovansi nel recinto della Città prima di arrivare all'altro Naviglio, ch'è derivato dal Tesino, hanno successivamente la caduta di braccia $1\frac{1}{2}$, 3, $1\frac{1}{2}$, 2, e 4. Si è già accennato sopra che forse pel maggior comodo dei Mulini ha voluto Leonardo da Vinci moltiplicare il numero dei sostegni, e diminuirne l'altezza: mentre ne basterebbero tre soli per la caduta totale di circa 17 braccia, e per la libera comunicazione dei due nostri Navigli principali. Anche nel canale di Bereguardo vi sono dei sostegni d'una caduta assai piccola. E così pure sul principio del secolo sedicesimo, come si è detto, trattandosi di derivare un altro canale navigabile dal tronco superiore dell'Adda furono proposti dieci sostegni consecutivi della caduta ciascuno di braccia $4\frac{1}{2}$: ma poi sul fine dello stesso secolo essendosi incominciato il canale ne fu variato sostanzialmente il progetto con sostituire ai dieci sostegni due soli, l'uno di undici, e l'altro di ventinove braccia di caduta. Istessamente nel primo progetto di continuare i nostri Navigli sino a Pavia si sono proposti otto sostegni: e posteriormente se ne sono proposti soltanto cinque, e se n'è fabbricato uno in vicinanza al piccolo Lambro di circa 15 braccia di caduta. E così in tempi differenti sono stati adottati nel nostro Paese due opposti principj di dare ai sostegni una caduta o troppo piccola, o troppo grande.

Il Belidor nel Cap. III. del Lib. IV. dell'Architettura Idraulica
fissò

fisso come un principio d'esperienza che quando la caduta è maggiore di 12, o 13 piedi di Francia è meglio ripartirla in due sostegni che di darla tutta in un solo. Si sono regolati sullo stesso principio quelli che hanno diretto la costruzione di altri sostegni in altri canali. Gli otto sostegni del Naviglio di Bologna hanno tra tutti 59 piedi Bolognesi di caduta. Nel canale di Linguadocca i sostegni non passano in nessun luogo l'altezza di 9 piedi di Parigi. Quelli del canale della Lys non passano neppure gli otto. Nel vecchio canale di Picardta i sostegni sono tra i 6, e i 13 piedi di caduta: e nel nuovo canale, ch'è stato diretto dal Belidor, sono tra i 6, e i 12. Il sostegno che in Fiandra congiugne i due canali di Furnes, e Ypres nel luogo di Bouzingue ha in tutto venti piedi di caduta: ma i primi sei piedi vengono distribuiti nella semplice inclinazione del fondo del canale verso le porte superiori: e gli altri 14 piedi restano propriamente distribuiti in due sostegni, l'uno di 10, e l'altro di 4 piedi di caduta. Il sostegno di Villebrouck, che forma la comunicazione e lo sbocco del canale di Bruxelles nella Ruppel, ha circa 16 piedi di caduta. I più alti sostegni di Olanda, dei quali io abbia avuto notizia, sono quelli di Naerden, e di Muyden, e non hanno più di 14, o 15 piedi d'acqua. In Svezia dopo i tentativi infelici di fare sul fiume Gorha dei sostegni sino di 28, di $33\frac{1}{2}$, di 52, e ancora $113\frac{1}{2}$ piedi Svezzeſi di caduta, come si è detto sopra, essendosi abbracciato il partito di evitare i passi più precipitosi e difficili colla derivazione di un canale navigabile, vi si è accresciuto il numero dei sostegni, ciascuno di 16, o al più di 17 piedi di caduta.

Le ragioni di non dare ai sostegni maggiore altezza sono in primo luogo per lasciare più spedito e più facile il maneggio dei portoni: in secondo luogo per non esporre la fabbrica alla maggiore veemenza dei vortici, che si formano nelle cadute maggiori: e in terzo luogo per non esporre le barche a maggiori scosse, e preservarle dagli urti nei muri laterali. La difficoltà di maneggiare i portoni cresce sempre crescendo l'altezza del corpo d'acqua. I pericoli delle scosse, e degli urti laterali verrebbero a diminuirsi quando si desse una maggiore ampiezza al sostegno: ma in questo caso vi vorrebbe ancora un maggior corpo d'acqua, ed un tempo maggiore per farvi passar le bar-

che.

che. La forza e la veemenza dei vortici non si diminuirebbe che poco facendo entrar l'acqua di fianco nel circondario del sostegno, in vece di lasciarla cadere liberamente dalla foglia delle porte superiori: mentre data l'altezza della caduta è sempre data la velocità, nè le resistenze del corso obbliquo possono toglierne una maggior porzione se non quando è molto più lungo il corso, e molto maggiore il tempo della discesa. Così per addurre un esempio il sostegno del Dolo rimane inofficioso nel tempo delle piene della Brenta: e quantunque sia tant' ampio il sostegno, e vi si faccia entrar l'acqua lateralmente per differenti rami, che vanno a sboccare su differenti punti del fondo; ciò non ostante il sostegno molte volte ha sofferto notabilmente sino a trovarsi sconvolto per più della metà il selciato della platea, e la riparazione riesce sempre di molto impegno per la difficoltà di mettere il sostegno in asciutto, come ha scritto ancora il Zendrini nel Cap. XII. Per queste, e per altre simili ragioni, che non occorre più di ripetere, ho creduto che quel vecchio sostegno di 29 braccia di caduta nel nuovo Naviglio dell'Adda si dovesse ridurre ai limiti dell'altezza prescritta dal Belidor, com'è poi stato eseguito.

Il sostegno di Battiferro presso Bologna proposto per un esempio nell'opera del Guglielmini, quelli del Canale di Picardia descritti minutamente dal Belidor nel Capo VIII. del Libro sopraccitato, quelli del Canale di Linguadocca descritti pure con tanta diligenza dal Sig. la Lande nella sua Opera sopra i canali navigabili, quelli di Svezia, e di altri luoghi, possono suggerire diverse idee intorno alla forma, ed a tutte le dimensioni dei sostegni per poi tracciegliere le dimensioni, e la forma più adattata alle particolari circostanze della navigazione, che si volesse facilitare. I sostegni di Svezia hanno 200 piedi Svezze di lunghezza sulla stessa uniforme larghezza del canale, ch'è di piedi 36. I sostegni d'Italia e di Francia hanno la metà incirca della larghezza del canale, ed hanno il vaso interno un poco più largo delle porte. In Francia sulla caduta di sette piedi l'allargamento del vaso interno è di circa un mezzo piede per parte. Le grossezze, e le distanze dei contrafforti possono variarsi rinforzando più o meno il sostegno, secondo che si ritrova o meno, o più incassato, e in un terreno o di minore, o di maggiore consistenza. Nei canali d'una mag-

Meccanica.

V v v

giore

giore quantità d'acqua, per non lasciarne soverchiare il sostegno, è necessario di aprirvi di fianco uno scaricatore, che ne faccia passare il di più dal tronco superiore all' inferiore. La maggiore facilità di aprire le due porte, e la maggiore fermezza di esse esige che al piede vadano a battere contro i risalti della platea superiore, e che si facciano cadere ad angolo l'una sull' altra coi spigoli di mezzo. E se continuasse l'acqua a decorrere liberamente contro le porte, secondo ciò che si è detto nel Probl. XIV. del Lib. III., l'angolo della maggiore consistenza di una porta sull' altra sarebbe il retto. Ma per evitare ogni equivoco bisogna avvertire, che ristagnando l'acqua superiormente, chiuse che siano le porte, non vi ha più luogo se non la semplice pressione: che la pressione cresce nella sola ragione della base premuta quando sia data l'altezza: e che per questo capo non conviene allungare le porte se non quanto basta perchè unendosi ad angolo nel mezzo si sostentino meglio, e si formino reciprocamente un appoggio. Nel Teor. III. del Lib. III. si sono spiegate le leggi della pressione, che non erano state esposte esattamente da un celebre nostro Scrittore.

Nei sostegni di Francia si lascia tutta la caduta libera, e a piombo: in quelli di Olanda il muro, che chiamasi di caduta, non è altrimenti a piombo, ma a scarpa: e in quelli di Lombardia la caduta è molte volte divisa in più gradini. Il Belidor nel Capitolo VIII. sopracitato non rilevò altro inconveniente che quello di allungare un poco il sostegno nel caso che si voglia tenere inclinato il piano della caduta. Ma poichè le acque cadendo dal ciglio del sostegno, o a piombo, o per qualunque piano inclinato, arrivano al fondo della platea colla medesima velocità, la principale differenza dev' essere che nel piano inclinato l'urto maggiore dell' acqua, e i vortici, e le correnti retrograde formate colla caduta si porteranno più addentro nel sostegno, e sotto al corpo maggiore delle barche: Laddove nella caduta libera i vortici devono formarsi più sopra, e nell' angolo, che corrisponde alla punta delle barche. Ma poi bisogna generalmente avvertire che nelle cadute ancor maggiori per la contrarietà delle direzioni si perde più facilmente la velocità concepita quando la caduta sia a piombo, e vadano le acque ad urtare direttamente contro il piano

piano inferiore. Questa famigliare osservazione ha suggerito forse il ripiego di diminuire la forza della percossa, e di eludere il pericolo dei vortici con dividere la caduta in più gradini consecutivi. Il Belidor ha più minutamente spiegato le altre regole che riguardano il Meccanismo, e la fabbrica dei sostegni, e dovreb' essere studiato dagli artefici in occasione di doverne fabbricare dei nuovi. Molti ancora di quei sostegni, che vedonfi di là dai monti, potrebbero servir di norma in Italia. Mentre quantunque l'invenzione dei sostegni a porte raddoppiate e a gradino, come abbiain detto, sia interamente Italiana, ciò non ostante gli Oltremontani ne hanno portato il Meccanismo a quella perfezione, e direi quasi eleganza, che non è ancora conosciuta dai nostri artefici.

Soprattutto merita di essere conosciuta in Italia l'invenzione di riunire insieme, o come dicono accollare varj sostegni, per modo che vi si possa passare immediatamente dall' uno all' altro. Tra di noi i sostegni sono tutti isolati, e divisi l'uno dall' altro con qualche tronco di canale. In Francia, in Svezia, nelle Fiandre, e in altri luoghi dove si avea molta caduta da ripartire in un tratto non molto lungo, si sono fatti i sostegni a gradino in maniera tale che nell' uscire dal primo si venisse immediatamente a scendere nel secondo, e così le porte di mezzo appartenessero egualmente ai due sostegni contigui. La più grand' Opera, che abbiaino in questo genere, si è l'unione di otto sostegni fatta in vicinanza di Beziers nel Canale di Linguadocca. Hanno essi tra tutti insieme nove sole mani di porte colla caduta totale di 66 piedi di Francia nella lunghezza di piedi 936. Il Riquet lasciò innanzi alla sua Patria un monumento della sua intelligenza e abilità. Mentre per provvedere al cambio delle barche nel circondario di quei sostegni vi diede la forma ellittica, lasciandoli nel mezzo il doppio larghi dell' apertura delle porte. Ed era ivi necessaria una tale precauzione perchè trattandosi di otto sostegni si sarebbe perduto troppo tempo nel caso che le barche arrivate al primo, e all' ultimo sostegno avessero una direzione contraria. Nel Canale di Troilhetta in Svezia si sono accollati insieme allo sbocco due sostegni, e un poco più lontano quattro altri, ciascuno colla caduta di piedi 17 di Svezia, che sono circa braccia $8\frac{1}{2}$ di Milano: e in tutti quei so-

slegni si è provveduto alla maggiore speditezza del cambio delle barche tenendo come si è detto i vasi interni, e le porte alla stessa larghezza di tutto il resto del canale. Ho proposto d'imitar questi esempj accollando insieme allo sbocco del nuovo Naviglio nell' Adda i cinque sostegni, che potevano bastare quando tutti si fossero tenuti tra i già preferiti limiti di altezza: e non potendo essere assai frequente in quei luoghi la concorrenza delle barche con direzione opposta, non ho creduto necessario di provvedere al cambio contemporaneo con una larghezza maggiore dei vasi interni. Così pure, e per la stessa ragione non si è pensato al cambio delle barche nei due sostegni accollati di Vaugaux, e nei tre altri più grandiosi e magnifici di Fargnier nel nuovo Canale di Picardia. Il primo di essi ha 6 piedi di caduta, e 'l secondo 10, e ne ha 8 ciascuno degli altri tre. La fig. 136 rappresenta la pianta, e il profilo del sostegno accollato del nuovo Canale di Castiglia descritto dal Sig. Sanchez Taramas: *A, A, A* sono le tre porte consecutive, *B* il ponte, *C* un acquedotto che passa sotto.

I sostegni accollati portano un risparmio di spesa nel fabbricarli, e un risparmio di tempo nel doverli passare. Mentre in primo luogo in due sostegni isolati vi vogliono 4 mani di porte, e 4 lastricati diversi l'uno all' ingresso, e l'altro all' egreso di ciascuno. Riunendo insieme i sostegni bastano 3 sole mani di porte, e 2 lastricati all' ingresso, e all' egreso, come se si trattasse di un sostegno solo ed isolato. I 2 vasi interni, e le platee sono le stesse in due sostegni o staccati, o accollati, colla sola differenza che le porte intermedie nei sostegni accollati servono insieme ad uscire dal vaso superiore, e ad entrare nell' inferiore. Nei sostegni medesimi la maggiore vicinanza, e il minor numero delle porte dà subito un risparmio di fatica, e di tempo nel discendervi, e rimontarvi. Scendendo si risparmia anche più tempo, perchè mentre si vuota il vaso superiore di un sostegno colla stessa quantità d'acqua si viene immediatamente a riempire il vaso inferiore. Nel canale derivato dall' Adda era ancora da valutarli il vantaggio di ridurre tutti i sostegni ad un tratto di minore lunghezza, e di tenerli più lontani dall' imboccatura di un fiume che porta ghiaie piccole e grosse in tanta copia, e che rende perciò necessarie delle mag-

maggiori precauzioni perchè il fondo del canale e i sostegni non vengano a imbarazzarsi dalle soverchie deposizioni.

Il Guglielmini, e il Zendrini nel capitolo duodecimo dei loro trattati hanno avvertito che nei canali di acque torbide tutti i sostegni hanno bisogno di stare aperti di tanto in tanto, perchè le acque scorrendo liberamente ne tengano spurgato il fondo, e lascino sempre libero il maneggio delle porte. Gl' imbarazzi crescerebbero sempre in proporzione della maggiore grossezza, e della maggiore quantità delle materie: e però in un canale derivato da un fiume, che corre in ghiaja, la prima avvertenza dev'esser quella di tenere lontani i sostegni dall' ultimo limite delle ghiaje. Ma non è stato ancora considerato da nostri Idrometri il caso di dover collocare un sostegno sopra lo stesso limite. Tutti i nostri sostegni sono fabbricati in luoghi dove arrivano solamente delle materie più sottili. Il Sig. Bouchet Inspettore Generale dei ponti, e delle strade di Francia mi ha dato notizia di un sostegno fabbricato sul Fiume Indre, nella Provincia del Berry, dove ancora seguita il Fiume a correre in ghiaja: e mi ha ancora spiegato come vi si mantenga spurgato e libero il fondo, lasciandovi entrare di fianco quando bisogna un ramo d'acqua, derivato da un torrente vicino, e spingendo con esso dall' altra parte le materie deposte dal Fiume. L' esempio non può essere facilmente imitato negli altri luoghi, dove non si trovi vicino un altro ramo d'acqua, che possa crosseggiare il canale principale, e trasportare altrove le deposizioni. Ma in qualunque caso di dover fabbricare un sostegno dove insieme colle acque potessero arrivare delle materie grosse farà sempre un espediente opportuno d'incominciare a diminuirne la copia, moltiplicando superiormente i paraporti, e collocandone ancora qualchuno nell' angolo della platea superiore del sostegno: e per quelle materie che con tutte queste avvertenze o s' ammucchiassero negli angoli della platea medesima, o trascorressero nel circondario del sostegno, converrà poi di tenere aperte tutte le porte di tanto in tanto perchè le acque scorrendo liberamente acquistino forza bastante a staccare quelle materie dal fondo, e trasportarle a qualch' altro paraporto inferiore.

CAPO DECIMO, ED ULTIMO.

DEL RAPPORTO DEL NOSTRO BRACCIO COLLE ALTRE MISURE,

DEL CALCOLO DELLE ALTEZZE DEI NOSTRI MONTI,

DEI PROBLEMI ANALOGHI DEI PALLONI VOLANTI,

DEL MIGLIO, DEL GRADO, E DELLA MAPPA DI LOMBARDIA.

IN tutto questo volume essendosi prodotte tante misure, e fatti tanti calcoli in braccia di Milano, e in piedi di Parigi, di Svezia, di Bologna, Venezia &c. secondo che occorreva di trattare dei progetti e delle opere di un Paese o dell' altro bisogna adesso metter sott'occhio i rapporti di tutte le misure fra loro. Il braccio di Milano, ch' presentemente il braccio comune di tutta la Lombardia Austriaca, si divide in dodici once, l' oncia in dodici punti, e il punto in dodici atomi, non occorendo mai di far uso degli altri minori rotoli. Il piede reale di Parigi, che ho fatto rilevare esattamente in Torino dal campione del piede, che ha servito al celebre Gian Battista Beccaria per la misura del grado del Meridiano del Piemonte, contiene precisamente once 6, punti 6, atomi, 7 del nostro braccio: onde la proporzione del nostro braccio al piede reale di Parigi è quella di 11:6, 003, o assai prossimamente di 11:6. Il Sig. Tillet ha fatto la riduzione dei piedi d' Inghilterra, di Svezia, di Vienna, di Bologna, e di altre misure col piede di Parigi. Per eseguire la commissione che ho avuto della riduzione di tutte le misure di lunghezza del nostro Paese, ho dovuto fare io medesimo il confronto immediato del nostro braccio col piede di Venezia, e con tutte le altre misure delle Città, e terre di Lombardia. Prendendo da tutte le tavole, che ho pubblicato a Milano due anni fa, ciò che unicamente appartiene a quest' opera, per seguitare e confrontare tra loro più facilmente i calcoli precedenti potrà bastare la tavola seguente.

Mi-

Misure	Ridotte al piede di Parigi .			Riduzione al nostro braccio .		
	Piedi .	Pollici .	Linee .	Oncie .	Punti .	Atomi .
Piedi di Parigi .	1.	0.	0.	6.	6.	7.
Piede d'Inghilterra . o.	11.		3,1104.	6.	1.	8,82.
Piede di Svezia . o.	10.		11,75.	5.	11.	9,68.
Piede di Vienna . o.	11.		8,117.	6.	5.	5,57.
Piede di Torino . 1.	6.		11,7.	10.	4.	3,12.
Palmo di Genova . o.	9.		3.	5.	0.	3.
Piede di Venezia . 1.	0.		10.	7.	0.	0,48.
Piede di Padova . 1.	3.		9,9.	9.	5.	5,55.
Piede di Bologna . 1.	2.		0,6.	7.	8.	0,01.
Braccio di Firenze . 1.	9.		6,454.	11.	9.	0,51.
Palmo Romano . o.	8.		3,033.	4.	6.	0,53.
Palmo di Napoli . o.	9.		8,15.	5.	3.	4,4.

La lunghezza del miglio si valuta tra di noi variamente. Alcuni vi danno 2500 braccia, altri 2600, altri fino 3000. Così da Milano a Binasco si contano volgarmente 10 miglia, e se ne contano altre 10 da Binasco a Pavia: e la precisa distanza dalla porta di Milano a Binasco è di braccia 25100, da Binasco alla porta di Pavia di 27310. Il Sig. Needham nelle osservazioni pubblicate a Torino intorno alle altezze di alcune montagne della Savoia ha supposto che nel miglio d'Italia per comune giudizio dei Geometri si debbano contare 764 tese, che farebbero 4584 piedi di Parigi, ossia $2501 \frac{1}{2}$ delle nostre braccia. In diverse Provincie d'Italia è molto varia la lunghezza del miglio: e dappertutto si è preso arbitrariamente, e senz'alcuna ragione particolare un numero piuttosto che l'altro. Il miglio marino ha una misura precisa, mentre da tutti i marinaj si prende comunemente per miglio la sessantesima parte di un grado di latitudine. Veramente i gradi di latitudine si variano anch'essi, e vanno sempre crescendo dall'Equatore sino ai Poli: ma la differenza non è poi tanto grande che se ne debba tener conto, paragonando insieme le miglia di luoghi differenti. Tratteremo diffusamente quest'argomento nell'altro tomo susseguente, e vedremo che prendendo i numeri rotondi, e più prossimi il primo grado del Meridiano che taglia l'Equatore

tare si può supporre di tese Parigini 56750: nella latitudine di 45 gradi si può supporre il grado di tese 57100, e di tese 57400 dove il Meridiano arriva a tagliare il circolo polare. Così adunque la sessantesima parte di un grado nella nostra latitudine sarebbe di tese $951\frac{1}{4}$, nè vi sarebbero che cinque tese di più andando sino all' Equatore, e circa sei tese di meno andando al circolo polare: e se questa fosse la misura del miglio non vi sarebbe differenza sensibile paragonando insieme le miglia di latitudini non molto differenti, come per esempio paragonando le miglia delle diverse Provincie d' Italia con quelle della Germania, e della Francia: e in ciascun luogo la misura sarebbe certa e determinata.

Si sono misurati diversi gradi del Meridiano in Francia, nella Lapponia, nella Pensilvania, nella Castreria, nell' Austria, nello Stato Ecclesiastico, nel Piemonte, e per queste così precise e importanti operazioni si sono resi tanto più celebri i nomi di Cassini, Maupertuis, la Condamine, Maçon, la Caille, Lefgang, le Maire, Boscovich, Beccaria, e tant' altri chiarissimi Astronomi, che vi hanno avuto parte. Nel nostro Paese vi sarebbe da misurare la lunghezza di quasi un grado andando da Pavia al Forte di Fuentes. Per la parte Geodetica della misura non abbisognerebbero più di due o tre triangoli da Pavia sino a Como, e da Como al Forte di Fuentes vi sarebbe la comodità di tirare gli altri triangoli nelle rive del Lago: e per la parte Astronomica non vi sarebbe da sospettare che prendendo le altezze del Polo nei luoghi estremi, osservando la differenza delle latitudini vi si avesse qualche aberrazione sensibile del filo a piombo per l' attrazione delle montagne. Mentre Pavia è in mezzo alla pianura, e il Forte di Fuentes in mezzo alle montagne, che per l' opposta direzione delle forze devono renderne tanto più piccola la differenza. Il più alto de' nostri monti, ch' è il Legnone, resta a Levante del suddetto Forte, e non può cagionare alcuna aberrazione sensibile da mezzogiorno a tramontana, che faccia comparire o maggiore, o minore l' arco osservato del Meridiano. L' eruditissimo nostro Professore Ermenegildo Pini vi ha trovato alla cima del monte l' altezza del Barometro di linee 250, mentr' era al piano del Lago di linee $335\frac{1}{4}$.

Ripigliando le formole, e le osservazioni già riferite nel Probl. III.
del

del Lib. III. della prima parte; farebbe l'altezza del monte Legnone di piedi Parigini $55422 \frac{1}{2}$. moltiplicati per la differenza dei logaritmi dei numeri $335 \frac{1}{2}$, e 250: cioè l'altezza farebbe di piedi 7071 $\frac{1}{2}$ sopra il livello del Lago. Generalmente chiamando z l'elevazione di un luogo sull' altro, B, b le altezze barometriche, oppure le densità, e le gravità specifiche dell' aria in que' due luoghi, nell' equazione $z = 55422 \frac{1}{2} \log. B - \log. b$, date che siano due delle tre quantità B, b, z , sarà determinata la terza. E questa formola servirà egualmente per determinare le altezze, a cui devono salire i palloni volanti. Per esempio se supponendo l'altezza barometrica al piano della terra di pollici 28 si ricercasse a quale elevazione si potessero avere nel barometro pollici 18 $\frac{1}{2}$ di altezza, come nel secondo volo che si è fatto a Parigi, si troverebbe che l'elevazione dev' essere di piedi 10204. Chi volesse audare ad una maggiore precisione per gli altri Paesi, dovrebbe dappertutto premettere un' altra osservazione analoga a quella, che si è fatta nel nostro Duomo sulla variazione del Barometro corrispondente ad un' altezza conosciuta, e ricavandone la proporzione delle densità dell' aria, e del mercurio, onde dipende la quantità costante del Problema, lo potrebbe adattare ai casi di qualunque altro luogo.

Ma giacchè abbiamo quì riassunto la formola del Probl. III. del Lib. III. della prima parte, non sarà fuor di proposito di farne un' altra applicazione a quel caso, di cui ancora non si parlava mentre stampavasi il detto Libro, e che adesso forma il soggetto più comune dei discorsi, e delle conversazioni anche volgari. Tutt' i problemi che possono proporsi intorno ai palloni volanti non riguardano che tre quantità, il peso assoluto, il diametro del globo, e l'altezza, a cui deve elevarsi: e date due di esse con quella formola si può sempre determinare la terza quantità. Supponiamo dato il peso del globo, e data l'altezza della salita, per esempio di 10000 piedi di Francia. Sarà $\log. b = \log. B - \frac{10000}{55422}$: e se per B , e b si prenderà il peso di un piede cubico d'aria, e il peso B si assumerà di grani 684; il peso b di un altro piede cubico all' altezza di 10000 piedi dovrà essere di grani 447. Supponiamo ancora che il peso da elevarsi sia di 3500 libbre di Francia, la libbra di 16 once, l'oncia di 24 denari, il denaro di 24 grani. Dividendo il numero de' grani delle suddette libbre

Meccanica,

X x x

per

per 447 si troverà che acciò il globo resti sospeso a quell' altezza dovrà occupare il volume di 72164 piedi cubici: ed essendo la solidità della sfera eguale al cubo del diametro moltiplicato per $\frac{32}{105}$, sarà il cubo del diametro di piedi cubi 237827, e il diametro sarà un poco minore di piedi 52. Però un pallone sferico, che abbia 52 piedi Parigini di diametro, e che pesi in tutto 3500 libbre di Francia, che fanno circa 2344 libbre grosse di Milano, potrà sollevarsi all' altezza di 10000 piedi.

La stessa formola potrà essere di un uso maggiore quando i palloni volanti si riducessero alla maggiore sicurezza. Io credo che per ogni sicurezza maggiore bisognerebbe fare i palloni di rame, o di qualch' altro metallo, e alzarli col semplice vapore. L'aria infiammabile oltre alla difficoltà di essere preparata in una quantità grandissima, è soggetta al pericolo di accendersi con una scintilla elettrica: e le sperienze dei cervi volanti fanno vedere quanto ciò sia da temersi alzandosi nell' atmosfera. Il vapore porta un altro pericolo che scoppj il pallone principalmente nella parte superiore: e poi è sempre pericoloso di portare in alto del fuoco in mezzo a materie più facilmente combustibili. Ecco la traccia, che si avrebbe da tenere per calcolare l' altezza, e il peso di un globo più consistente. All' altezza di piedi 600, che dovrebbe bastare per un libero viaggio in aria, secondo tutt' i principj antecedenti, il peso di un piede cubico d'aria sarebbe di grani 533. Supponendo poi che il pallone avesse 60 piedi di diametro, farebbe la superficie sferica di piedi quadri 22309 $\frac{1}{2}$, e la solidità di piedi cubi 113097 $\frac{1}{2}$: e però nell' aria occuperebbe il volume di 3737 $\frac{1}{2}$ libbre di 28 once. Dando la sesta parte di peso al vapore, dando altrettanto, o alquanto più all' armatura di legno da farsi al globo, suppongo che sopra di essa si possano tirare, e connettere delle lastre di rame ridotte a tale sottiliezza, che in quattro piedi quadri non pesino che una libbra: e poichè non è necessario di coprire tutto il globo di rame, e in tal caso il peso del globo riuscirebbe soverchio, suppongo che se ne copra la metà, e che tutto il peso del rame sia di circa libbre 1400. Da ciò apparisce già quant' era grande l'errore del Luna: che proponeva dei globi di rame, da cui fosse estratta l'aria: mentre in tal caso per reggere alla pressione dell' aria esterna si do-

rebbe dovuta ingrossare la lastra di rame, e i globi non si farebbero potuti alzare ancorchè fossero grandissimi: e non si sarebbe fatto mai nulla in questa materia se non si fosse trovato un fluido meno pesante, ed egualmente elastico dell'aria comune. Suppongo adunque che il globo si copra di rame per metà, e che le lastre di rame si distribuiscano dov'è maggiore il bisogno, cioè in tutta la parte superiore dov'è maggiore la forza del vapore, e nella parte inferiore, ch'è più vicina al fuoco: e ciò ancora perchè il centro comune di gravità resti più basso, e non vi sia da temere che nelle successive oscillazioni il globo venga a rovesciarsi. Dedotto il peso del vapore, del rame, e dell'armatura di legno avanzeranno ancora 1000 libbre di peso da ripartirsi tra la rela inverniciata, con cui si avrà da comprimere la parte di mezzo del globo, tra la galleria da sospendersi inferiormente, e tra le persone che vi si volessero alzare. Ne io intendo con ciò di fare progetto alcuno, ma solamente di accennare la traccia, che si potrebbe tenere in qualunque simil progetto, e di suggerire gli elementi del calcolo, che facilmente si potrebbero adattare alle supposizioni di altre altezze, altri pesi, ed altri diametri. Non ho potuto negare ai discorsi del giorno questa digressione, che avrebbe un luogo più proprio tra i primi problemi del Libro III.

Tornando ora alle montagne del Lago di Como, le rive istesse del Lago sarebbero la traccia da seguirsi per misurare un grado del nostro Meridiano senza che le attrazioni delle montagne portassero nella misura quelle alterazioni che si sono già rilevate da altri Autori nelle misure di alcuni altri gradi. Ma siccome si sono già misurati colla maggiore diligenza due gradi del Meridiano in una latitudine poco differente dalla nostra, l'uno in Francia, e l'altro in Piemonte, e le misure non differiscono più di 88 tese fra loro; prendendo un medio si potrà credere bastantemente determinata la lunghezza del nostro grado. In Francia il Sig. Cassini nella latitudine di $45^{\circ} 45'$ trovò che il grado del Meridiano è di tese 57050: e in quella parte del Piemonte, dove non poteva risentirsi molto l'azione delle montagne, il Sig. Beccaria trovò che nella latitudine di $44^{\circ} 44'$ il grado è di tese 57138. La latitudine di Milano è di circa $45^{\circ} 18'$ onde prendendo un numero rotondo di mezzo fra quei due numeri, un

X x x 2

gra-

grado, intero del nostro Meridiano potrà valutarfi assai prossimamente di tese 57100, ed un minuto primo di tese $951\frac{1}{2}$, ossia di 5710 piedi di Parigi, che fanno braccia $3115\frac{1}{2}$. Questo è lo spazio che bisogna percorrere nella superficie terrestre da mezzogiorno a tramontana perchè si varii di un minuto l'altezza del polo celeste: questo è il primo rapporto della Terra col Cielo, una misura reale, a cui si deve rapportare ancora la lunghezza del miglio, perchè non sia affatto arbitraria, e capricciosa. Il rapporto più semplice sarebbe quello dell'uguaglianza, e così in Terra potrebbe farsi ciò che si pratica in mare di prendere per la lunghezza del miglio una parte sessantesima di un grado di latitudine, e darvi braccia 3115. Che se poi non si volesse con questo numero scostarsi troppo dalla maniera ordinaria di contare le miglia, si potrebbe prendere un'altra frazione del minuto, e del grado. Per esempio prendendo cinque sesti di un minuto primo, ossia cinquanta minuti secondi, il miglio riuscirebbe di braccia 2596: il qual numero si accosta maggiormente alla volgare misura del nostro miglio. Ma sempre bisognerebbe rapportare il miglio al grado di latitudine come ad una misura reale e determinata.

Nel tomo susseguente vedremo ancora che il grado di un circolo parallelo all'equatore, ossia un grado di longitudine nella latitudine di 45° gradi dev'essere prossimamente di tese 40568, e un minuto primo di tese $676\frac{1}{11}$, ossia di piedi 4056 $\frac{4}{11}$, che fanno braccia 2113. Veramente non si è mai misurato alcun grado dei paralleli in una latitudine prossimamente eguale alla nostra. Se n'è misurato uno in Francia nella latitudine di $43^\circ 31'$, e si è ritrovato di tese 41618: e il grado del parallelo di Vienna, e di Parigi nella latitudine di circa $48^\circ 50'$ fu ritrovato dal Sig. Cassini di tese 37775 $\frac{1}{2}$. Queste misure non possono neppure esser certe, ed esatte entro a quei limiti, ai quali si può arrivare nella misura dei gradi di latitudine: Mentre l'arco di un parallelo, e la differenza delle longitudini di due luoghi non può determinarsi che rapportandovi gli orivoli a qualche fenomeno istantaneo come all'eclisse di qualche Satellite di Giove: e un secondo di errore, che si commettesse nella misura del tempo, porterebbe, siccome è noto, l'errore di 15 secondi di un grado, che corrisponderebbero a circa tese 169. La formola, che pro-

por-

porremo nel tomo susseguente, s' accorda entro il divario di 30 tese colla misura del primo grado del parallelo di Francia, e non discorda per più di tese 72 dalla misura del grado del parallelo di Parigi, e di Vienna. Facendo le debite sostituzioni nella suddetta formola nella latitudine di 45° il grado di longitudine risulterebbe di circa tese 40568.

Questi due dati che ad un minuto primo di longitudine nel nostro Paese corrispondano braccia 2213, e ad un minuto primo di latitudine braccia 3115, mi fanno suggerire una maniera precisa e facile di graduare le nostre mappe. Supposto che sia bastantemente determinata la longitudine, e la latitudine di Milano: supposto che Milano e Pavia siano sotto al medesimo Meridiano, com' è notato nelle mappe del Sig. d'Anville, e come portano prossimamente alcune altre osservazioni: supposto che vengano continuati, e misurati in tutto il nostro Paese i triangoli, che il più abile, e il più sperimentato Geografo dei tempi nostri, il Sig. Rizzel Zannoni, avea incominciato a delineare verso i confini dello Stato Veneto: supposto che ne sia misurata la base comune dove si trovasse più comodo, o nella stessa direzione del Meridiano, come sulla strada di Pavia, o in una direzione perpendicolare, come sulla strada vicina al maggior Naviglio: supposto che tutte le misure trigonometriche fossero rapportate, e ridotte a due perpendicolari tirate da ciascun luogo sul meridiano, e sul parallelo di Milano; senza impegnarsi in altre osservazioni delle longitudini, e delle latitudini degli altri luoghi, si potrà francamente graduare tutta la mappa dando un minuto di latitudine per ogni braccia 3115, che dal parallelo di Milano si andasse procedendo direttamente o a mezzogiorno, o a tramontana, e dando un minuto di longitudine per ogni braccia 2213 che dal Meridiano di Milano, e di Pavia si progredisse direttamente, o a Ponente, o a Levante. Questa, ch' è forse l'ultima volta ch' io scrivo sull' applicazione delle Scienze Matematiche agli usi della vita civile, e al servizio del Pubblico, non ho voluto celare al Pubblico più lungamente alcune idee, che mi si sono presentate alla mente in diverse occasioni, e il benigno Lettore se non le troverà interessanti potrà almeno gradire la buona volontà di esser utile, con cui le ho scritte.

IN-

647037



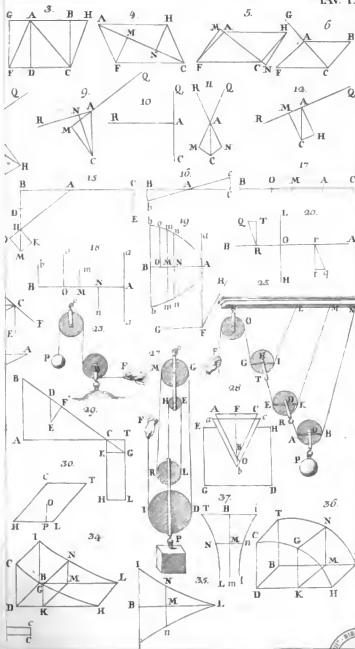
INDEX TOMI SECUNDI.

P <i>Rafano.</i>	1.
<i>Part Prior Mechanicæ Universæ.</i>	
<i>Liber Primus de æquilibrio, & motu communis corporum.</i>	9.
<i>Caput primum de æquilibrio corporum solidorum.</i>	16.
<i>Appendix de Theoria Machinarum.</i>	30.
<i>Caput secundum de resistentia corporum solidorum.</i>	40.
<i>Appendix de Architecturæ rationibus, atque ordinibus.</i>	53.
<i>Caput tertium de vi, & firmitate Fœnicum.</i>	59.
<i>Caput quartum de rectilineo motu corporum.</i>	76.
<i>Caput quintum de projectione, & oscillatione corporum.</i>	93.
<i>Caput sextum de singularibus Mechanicæ problematibus.</i>	113.
<i>Appendix de quibusdam problematum correctionibus.</i>	113.
<i>Liber Secundus de motu rotationis corporum.</i>	117.
<i>Caput primum de motu rotationis circa axem datum.</i>	133.
<i>Caput secundum de rotatione circa axem motum.</i>	151.
<i>Caput tertium de rotatione corporum regularium.</i>	169.
<i>Caput quartum de rotatione corporum quorumcumque.</i>	188.
<i>Liber Tertius de æquilibrio, & motu corporum fluidorum.</i>	203.
<i>Caput primum de pressione fluidorum.</i>	208.
<i>Caput secundum de æquilibrio aeris, & mercurii.</i>	225.
<i>Appendix de aliisudinibus montium dimetiendis.</i>	240.
<i>Caput tertium de motu fluidorum & vasis profuscentium.</i>	243.
<i>Appendix de Machinis Hydraulicis.</i>	268.
<i>Caput quartum de velocitate, & mensura aquarum fluentium.</i>	272.
<i>Caput quintum de resistentia fluidorum.</i>	290.
<i>Della Meccanica Parte Seconda, che contiene l'applicazione ai Fiumi, ai Torrenti, ed ai canali navigabili principalmente d'Italia, e di Lombardia.</i>	
<i>Libro Primo della Teoria Generale dei Fiumi.</i>	
<i>Capo primo dell'origine dei Fiumi, e delle cause, e dei Fenomeni delle piene.</i>	313.
<i>Capo secondo delle velocità, e delle resistenze dei Fiumi, e delle esperienze fatte principalmente in Francia, e in Toscana.</i>	320.
<i>Capo terzo delle altezze dei Fiumi uniti, e divisi, e degli esempi principalmente della Brenta, e del Reno.</i>	333.
<i>Capo quarto dello stabilimento degli atvici, e delle direzioni dei Fiumi.</i>	342.

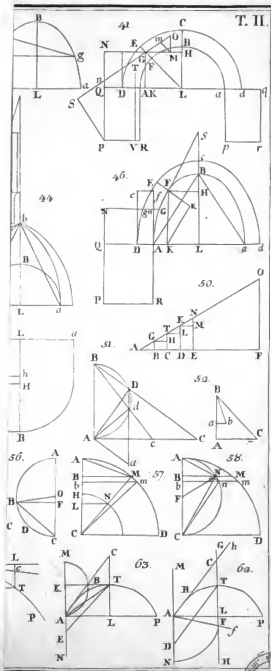
Capo quinto delle materie portate insieme coi Fiumi, e delle sperienze fatte nelle ghiaje.	348
Capo sesto del rialzamento del fondo dei Fiumi torbidi, e delle differenze dei Fiumi ghiaiosi ed arcuosi.	356.
Capo settimo delle pendenze del fondo dei fiumi principalmente del Bolognese, e del Padovano.	361.
Capo ottavo della pendenza degli ultimi tronchi, e della foce dei Fiumi che sboccano in Mare, principalmente nell' Adriatico.	368.
Libro secondo delle operazioni dei Fiumi principalmente d' Italia.	
Capo primo delle livellazioni.	376.
Capo secondo delle nuove inalveazioni dei Fiumi.	387.
Capo terzo delle controversie del Reno, e degli altri Fiumi, e Torrenti del Bolognese.	394.
Capo quarto delle neutralizzazioni dei Fiumi ghiaiosi, e torbidi, e particolarmente dell' Arno.	402.
Capo quinto degli influenti, e della diversione del Tidone, e di Fiume morio.	411.
Capo sesto della diversione degli influenti dalla Laguna di Venezia, e principalmente della Brenta.	416.
Capo settimo di varie providenze, che si potrebbero proporre sul Fiume Brenta.	422
Capo ottavo del ringorgo cagionato dalle chiuse, e delle sperienze di Roveredo.	429.
Capo nono degli invernamenti cagionati dalle chiuse, e delle controversie della Fersina.	435.
Capo decimo dei diversivi delle piene, delle rotte, e dei ripari dei Fiumi.	441.
Libro Terzo dei Canali Navigabili principalmente di Lombardia.	
Capo primo degli antichi Canali Navigabili, e principalmente di quello ch' è derivato dal Tefino a Milano.	450.
Capo secondo della continuazione proposta del suddetto Naviglio da Milano fino a Pavia, e nel Tefino.	456.
Capo Terzo dei Canali derivati anticamente dall' Adda, e della comunicazione dell' Adda col Tefino.	461.
Capo quarto della navigazione del tronco superiore dell' Adda, e della comunicazione dei Laghi di Como, e di Lugano col Lago Maggiore.	468.

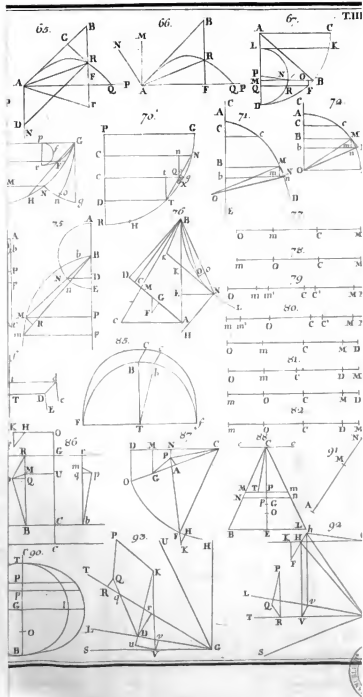
Capo quinto della quantità d'acqua dei due Navigli, e delle bocche d'irrigazione del Milanese .	471.
Capo sesto degli altri canali delle campagne, e della bonificazione principalmente delle Paludi Pontine, e di alcuni Laghi del Milanese .	486.
Capo settimo degli altri canali navigabili dell'Italia, Francia, Spagna, Paesi Bassi, Inghilterra, Prussia, Russia, e Svezia .	495.
Capo ottavo delle regole generali della derivazione, e della condotta dei canali navigabili .	506.
Capo nono della forma, e dell'altezza dei sostegni semplici, ed accollati .	517.
Capo decimo, ed ultimo del rapporto del nostro braccio colle altre misure, del calcolo dell'altezza dei nostri monti, dei problemi analoghi dei palloni volanti, del miglio, del grado, della mappa di Lombardia .	526.

pag. lin.	legge	pag. lin.	legge
22 33 DF	CF.	167 8 PR=Y	PQ=Y.
32 8 circa C... in C... circa A... in A...	fundamentum.	165 19 — WOF	— WOF.
39 11 fundamentum	fundamentum.		π
43 18 AB.AC.HI	AB.AC.HI.	168 20 D.A+D	D.A+B.
48 5 longitudinem	longitudinem.	208 1 observationibus	observationibus.
59 17 OM	Om.	218 29 aer	aqua.
70 30 = 2	= 0.	224 4 aeris	aquæ.
73 6 qdæ	qdæ.	231 23 pedum	pedum.
79 10 libere	libere.	243 21 fuerit	fuerit.
86 3 directæ	directæ.	282 26 & 9. 81	& 9. 87
92 19 r ² dx	r ² dx.		sexagesima quarta quadragesima quarta.
104 30 44° 54'	41° 54'	285 16 60 2	60 $\frac{1}{2}$.
	34'	316 13 Schencher	Schencher.
	31 major	319 18 ciascuna	ciasuna.
120 11 Bc	Ac.	328 23 sette altri	sette altre.
121 2 BN=y	BN=x.	341 28 accrescimento	accrescimento.
	BC=a—	342 21 acque	acque basse.
131 15 3MV	2MV.	359 7 sopravvengono	sopravvengono.
	M+n	367 1 $\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$.
132 7 Mm	M+n	18 17 $\frac{3}{4}$	17 $\frac{3}{4}$.
	m	19 18 $\frac{1}{4}$	18 $\frac{1}{4}$.
138 26 PB	PB.Φ.		
	CG		









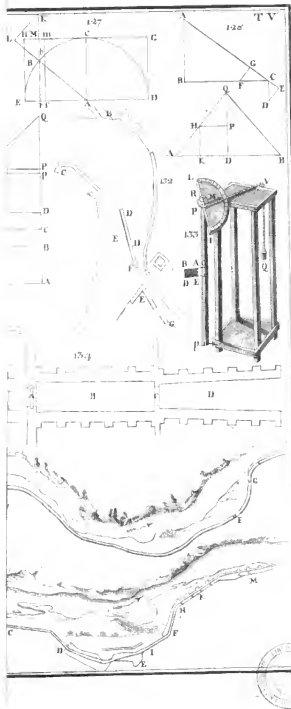


fig. 139.



136.

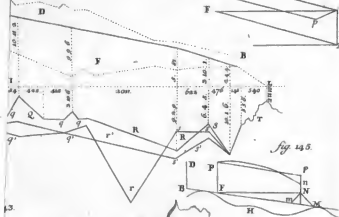


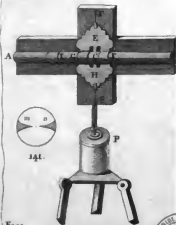
fig. 135.



fig. 132.



fig. 140.



141.





